$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x \neq \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

+ Phương trình $\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(2\cos^2 x - 1 - \sin x\right) \Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(\cos 2x - \sin x\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{6} = 2x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{6} = \pi - 2x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} - k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + (2k+2)\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp điều kiện suy ra phương trình có các nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{6} - k2\pi \, (k \in \mathbb{Z})$

Chọn $k = 1 \Rightarrow a = \dfrac{11\pi}{6}; k = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow a.b = -\dfrac{11\pi^2}{36}$

Ví dụ 4. Phương trình $3\sin 3x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x + 4\sin^3 3x$ có số nghiệm trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow 3\sin 3x - 4\sin^3 3x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x$

$$\Leftrightarrow \sin 9x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\sin 9x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 9x = \cos x \Leftrightarrow \cos\left(9x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x - \dfrac{\pi}{6} = x + k2\pi \\ 9x - \dfrac{\pi}{6} = -x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{60} + k\dfrac{\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

- **TH1:** $x = \dfrac{\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{4}$. Chọn $k = \{0;1\} \Rightarrow x = \left\{\dfrac{\pi}{48}; \dfrac{13\pi}{48}\right\} \subset \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

- **TH2:** $x = \dfrac{\pi}{60} + k\dfrac{\pi}{5}$. Chọn $k = \{0;1;2\} \Rightarrow x = \left\{\dfrac{\pi}{60}; \dfrac{13\pi}{60}; \dfrac{5\pi}{12}\right\} \subset \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Vậy phương trình có 5 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

Là phương trình dạng $f\left(\sin x;\cos x\right)=0$ trong đó lũy thừa của $\sin x$ và $\cos x$ cùng bậc chẵn hoặc lẻ.

Phương pháp giải:

- Bước 1: Xét $\cos x=0\Rightarrow$ Kết luận nghiệm
- Bước 2: Xét $\cos x\neq 0$, ta chia 2 vế của phương trình cho $\cos^n x$ (n là bậc cao nhất) đưa về phương trình bậc cao của tanx.

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x-5\sin x\cos x-\cos^2 x=2\left(1\right)$ là:

A. $x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

B. $x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

D. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải:

Chọn C.

+ Với $\cos x=0\Rightarrow\sin^2 x=1$. Thay vào phương trình $\left(1\right)\Leftrightarrow 2=2$ luôn đúng

$\Rightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ là nghiệm của $\left(1\right)$

+ Với $\cos x\neq 0$, chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\left(1\right)\Leftrightarrow 2\tan^2 x-5\tan x-1=2.\frac{1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow 2\tan^2 x-5\tan x-1=2\left(1+\tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow\tan x=-\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=\arctan x\left(-\frac{3}{5}\right)+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Kết luận: Nghiệm của phương trình $\left(1\right)$ là $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

LƯU Ý:

- Khi nhìn các phương án trả lời của bài này bạn phải chia 2 vế cho $\cos^2 x\neq 0$ để đưa về phương trình bậc 2 theo tan x.
- Tuy nhiên đối với các phương án trả lời có nghiệm biểu diễn dạng khác. Bạn đọc có thể giải theo các cách sau:

  + Xét $\sin x=0$ không thỏa mãn phương trình $\left(1\right)$

  + Với $\sin x\neq 0$, chia 2 vế cho $\sin^2 x$ đưa về phương trình bậc 2 theo $\cot x$.

Hoặc dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình bậc nhất với sin và cos:

$(1)\Leftrightarrow 2\frac{1-\cos 2x}{2}-5.\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=2$

$\Leftrightarrow 5\sin 2x+3\cos 2x=-3$ (đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$,$\cos 2x$ đã học trong phần trước)

Hoặc $(1)\Leftrightarrow 2\sin^2 x-5\sin x\cos x-\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 5\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$ (đây là phương trình đẳng cấp bậc 2)

Ví dụ 2. Tổng 2 nghiệm âm liên tiếp lớn nhất của phương trình $4\sin^3 x-\sin x-\cos x=0$ bằng:

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi}{2}$. **C.** $-\frac{5\pi}{4}$. **D.** $-\pi$.

Lời giải

Chọn B.

Trường hợp 1: $\cos x=0\Leftrightarrow \sin^2 x=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.$

Với $\sin x=1$ $\Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow 3=0$ (vô nghiệm).

Với $\sin x=-1$ $\Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow 5=0$ (vô nghiệm).

Vậy $\cos x=0$ không thỏa mãn phương trình.

Trường hợp 2: $\cos x\ne 0$, chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta được:

Phương trình $\Leftrightarrow 4.\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=0$

$\Leftrightarrow 4\tan^3 x-\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-\left(1+\tan^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-\tan^2 x-\tan x-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ 3\tan^2 x+2\tan x+1=0\,(VN)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

Với $k=-1\Rightarrow x=-\frac{3\pi}{4}$. Với $k=-2\Rightarrow x=-\frac{7\pi}{4}$.

Vậy tổng 2 nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}=-\frac{5\pi}{2}$.

Nhận xét: Đây là phương trình cùng bậc lẻ do đó có biến đổi sau:

$4\sin^3 x-\sin x-\cos x=0$ $\Leftrightarrow 4\sin^3 x-\sin x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-\cos x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\sin^3 x-\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0$ là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với $\sin x$, $\cos x$.

STUDY TIP

Có thể sử dụng đường tròn lượng giác để xác định nghiệm âm lớn nhất.
Cách biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác:

Đuôi $k2\pi$ có 1 điểm.	Đuôi $\frac{k2\pi}{2}=k\pi$ có 2 điểm.	Đuôi $\frac{k2\pi}{3}$ có 3 điểm.
Đuôi $\frac{k2\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}$ có 4 điểm.	Đuôi $\frac{k2\pi}{n}$ có n điểm.	

Ví dụ 3. Phương trình $1+3\tan x-2\sin 2x$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+3\frac{\sin x}{\cos x}=4\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x+3\sin x=4\sin x\cos^2 x$ (*)

Đến đây ta thấy phương trình (*) có cùng bậc lẻ cao nhất là 3, ta chia 2 vế cho $\cos^3 x\neq 0$ (do điều kiện)

$(*)\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}+3\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}=4\tan x$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+\tan^2 x-\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x+1\right)\left(3\tan^2 x-2\tan x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ (TMĐK)

$\Rightarrow$ Số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là 2.

STUDY TIP

Ở đây ta có thể từ phương trình đầu chia ngay cho $\cos^2 x$ sẽ nhanh hơn. Tuy nhiên nó sẽ không tự nhiên bởi bạn chưa nhận ra dạng quen thuộc của bài toán.

Ví dụ 4. Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $8\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ ở cung phần tư thứ I và thứ III của đường tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Phương trình $\Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ (cùng bậc lẻ)

Chia 2 vế cho $\cos^3 x \neq 0$ (do điều kiện)

Phương trình $\Leftrightarrow 8\tan^2 x = \sqrt{3}\tan x.\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 8\tan^2 x = \sqrt{3}\tan x\left(1+\tan^2 x\right) + \left(1+\tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^3 x - 7\tan^2 x + \sqrt{3}\tan x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}\tan^2 x - 6\tan x - \sqrt{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan x = \sqrt{3}+2 \\ \tan x = \sqrt{3}-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \arctan\left(\sqrt{3}+2\right) + k\pi \\ x = \arctan\left(\sqrt{3}-2\right) + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Dựa vào việc biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta thấy số điểm biểu diễn nghiệm cần tìm là $4 \Rightarrow$ Đáp án B.

Ví dụ 4. Các nghiệm của phương trình $\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \cos 2x$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2}arc\cot\frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$

B. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{1}{2}arc\cot\frac{1}{2} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$

C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$

D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \arctan\frac{1}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}\left(k \in \mathbb{Z}\right).$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 2\sin x\cos x\sin 2x + \sin x\cos x\cos 2x$

$\Leftrightarrow 1 = \sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$ (*)(đây là phương trình bậc 2)

Chia 2 vế cho $\sin^2 2x \neq 0$ (do điều kiện) ta được:

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 2x} = 1 + \frac{1}{2}\cot 2x$

$$\Leftrightarrow 1+\cot^2 2x = 1+\frac{1}{2}\cot 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot 2x = 0\\ \cot 2x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x = arc\cot\frac{1}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x = \frac{1}{2}arc\cot\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \text{ (TMĐK)}$$

STUDY TIP (nếu có)

Với $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases}$, ta chia luôn 2 vế cho $\sin^2 2x$ để khỏi phải chia 2 trường hợp, bài giải sẽ ngắn gọn hơn.

Khi giải mà kết quả nghiệm có $arc\cot\alpha$ thì chia 2 vế cho $\sin^2 x$ và nếu kết quả nghiệm có $\arctan\alpha$ thì chia 2 vế cho $\cos^2\alpha$.

DẠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI $SINX$ VÀ $COSX$.

Dạng: $a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x = c\,(1)$ trong đó $\begin{cases}a,b,c\in\mathbb{R}\\ a.b\neq 0\end{cases}$.

Phương pháp chung:

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ (vì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\,\forall x\in\mathbb{R}$).

$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x = 1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow at+b\frac{t^2-1}{2}=c$ (là phương trình bậc 2 theo t)

Ví dụ 1. Phương trình $\sin x+\cos x-1=2\sin x\cos x$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C.

$\sin x+\cos x-1=2\sin x\cos x$ (1)

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow t-1=2\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^2-t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\end{array}\right.$ (TMĐK)

Với $t=0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Với $t=1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow$ có 4 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

> **STUDY TIP**
>
> Có bao nhiêu điểm biễu diễn trên đường tròn lượng giác các nghiệm của phương trình thì phương trình đó có bấy nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$.

Chú ý: Với phương trình: $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x=c\,(2)$.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ (vì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\,\forall x\in\mathbb{R}$).

$t^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x=1-2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow at+b\frac{1-t^2}{2}=c$ (là phương trình bậc 2 theo t)

Một số sách gọi phương trình này là phản đối xứng với $\sin x$, $\cos x$.

Ví dụ 2. Phương trình $1+\sin x-\cos x-\sin 2x=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 1 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$t^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x=1-\sin 2x \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+t-\left(1-t^2\right)=0 \Leftrightarrow t^2+t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$ (TMĐK)

Với $t=0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Với $t=-1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

$\Rightarrow$ có 2 nghiệm thuộc $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ là $x=0$ và $x=\frac{\pi}{4}$.

STUDY TIP

Dạng: $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x+c=0$.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. $\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Cách 2: Nhận thấy phương trình có $\sin x-\cos x$ và $1-\sin 2x$ có nhân tử chung là $\sin x-\cos x$ nên ta có:

$1+\sin x-\cos x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow \sin x-\cos x+(\sin x-\cos x)^2=0$

$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1+\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x-\cos x=0 \\ 1+\sin x-\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ 1+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

STUDY TIP

$1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2$. $\quad 1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$.

Ví dụ 3. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x\cos x+|\cos x+\sin x|=1$ trên $(0;2\pi)$ là:

A. π. **B.** 2π. **C.** 3π. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn C.

$\sin x\cos x+|\cos x+\sin x|=1$ (3)

Đặt $t=|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

$$t^2=1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2} \Rightarrow (3) \Rightarrow \frac{t^2-1}{2}+t=1 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3\,(l) \end{array}\right.$$

Với $t=1: \sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

Suy ra phương trình có 3 nghiệm trên $(0;2\pi)$ là $x=\frac{\pi}{2}; x=\pi; x=\frac{3\pi}{2}$

Vậy tổng 3 nghiệm là $\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3\pi}{2}=3\pi.$

Ví dụ 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-m=0$ có nghiệm.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B.

$\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-m=0 \Leftrightarrow \sin 2x+\sin x-cosx-m=0$

Đặt $t=\sin x-cosx=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right], \forall x\in\mathbb{R}$

$t^2=1-2\sin xcosx \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$

Ta đi tìm m để phương trình $1-t^2+t-m=0$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow 1-t^2+t=m$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Xét $f(t)=1-t^2+t$ trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

t	$-\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$f(t)$	$-1-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	$-1+\sqrt{2}$

Suy ra $-1-\sqrt{2} \le f(t) \le \frac{5}{4}, \forall t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m = f(t)$ có nghiệm trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow m \in \left[-1-\sqrt{2};\frac{5}{4}\right]$ mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0;1\}$

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn.

STUDY TIP

Bảng biến thiên

+) $a<0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$-\infty$ $\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$ $+\infty$

+) $a>0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$-\infty$ $\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$ $+\infty$

Ví dụ 5. Phương trình $cos^3 x+\sin^3 x = cos2x$ có tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất là:

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{5\pi}{4}$. **C.** $\frac{7\pi}{2}$. **D.** $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

$\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x \Leftrightarrow (\cos x+\sin x)\left(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x\right)=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(1-\cos x\sin x)=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x+\sin x=0 & (1)\\ 1-\cos x\sin x=\cos x-\sin x & (2)\end{array}\right.$$

Giải $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Giải $(2): 1-\cos x\sin x+\sin x+\cos x=0$

Đặt $t=\sin x-cosx=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right], \forall x\in\mathbb{R}$

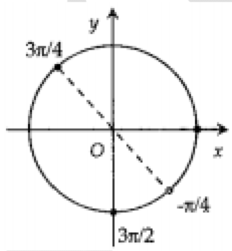
$t^2=1-2\sin xcosx\Rightarrow\sin 2x=1-t^2$

$(2)\Rightarrow 1-\frac{1-t^2}{2}+t=0\Leftrightarrow t^2+2t+1=0\Leftrightarrow t=-1$

$\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$

Biểu diễn nghiệm này trên vòng tròn lượng giác



ta suy ra nghiệm lớn nhất là $x_1=-\frac{\pi}{4}$ và nghiệm bé nhất là $x_2=\frac{3\pi}{4}$

Vậy $x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$.

STUDY TIP

+) $\cos^3 x+\sin^3 x=(\cos x+\sin x)(1-\cos x\sin x)$

+) $\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$

+) $1+\sin 2x=(\cos x+\sin x)^2$

Ba biểu thức trên cùng có nhân tử chung là $\cos x+\sin x$.

DẠNG IV. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

Ví dụ 1. **Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích**

Phương trình $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ có số điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác là:

A. 2 . **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

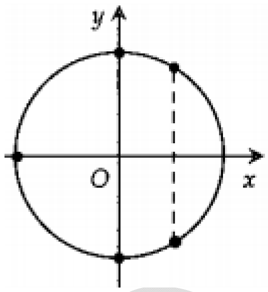
Chọn D.

Phương trình $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0\Leftrightarrow(\cos 3x+\cos x)+(1+\cos 2x)=0$

$$\Leftrightarrow 2cos2x\cos x+2cos^2x=0\Leftrightarrow 2cosx\left(cos2x+cosx\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4cosxcos\frac{3x}{2}cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}cosx=0\\ cos\frac{3x}{2}=0\\ cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Dựa vào điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác



Vậy ta có 5 điểm.

Ví dụ 2. **Sử dụng công thức hạ bậc**

Phương trình $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$ không phải là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây ?

A. $\sin x=0$. **B.** $\cos x=0$. **C.** $\sin 9x=0$. **D.** $\cos 2x=0$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình

$$\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x\Leftrightarrow\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1-\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\cos 12x+\cos 10x\right)-\left(\cos 8x+\cos 6x\right)=0\Leftrightarrow 2\cos 11x\cos x-\cos 7x\cos x=0$$ hông phải

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\cos 11x-\cos 7x\right)=0\Leftrightarrow -4\cos x\sin 9x\sin 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 9x=0\Rightarrow\cos 2x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right.$$

là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

Chú ý: Bạn đọc có thể giải các phương trình đơn giản ở các phương án rồi thay vào phương trình ban đầu để kiểm tra.

STUDY TIP

+) Phương trình (1) được gọi là phương trình hệ quả của phương trình (2) nếu tập nghiệm của phương trình (1) chứa tập nghiệm của phương trình (2).

+) $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$; $\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$.

Ví dụ 3. **Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng**

Cho phương trình $\cos x\cos 5x=\cos 2x\cos 4x$ số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là:

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 6 . **D.** 8 .

Lời giải

Chọn C.

Phương trình $\cos x\cos 5x=\cos 2x\cos 4x\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos 6x+\cos 4x]=\frac{1}{2}[\cos 6x+\cos 2x]$

$\Leftrightarrow \cos 4x=\cos 2x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=2x+k2\pi\\4x=-2x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=k\frac{\pi}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{3}=\frac{k2\pi}{6}\,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy số điểm biểu diễn nghiệm là 6.

STUDY TIP

$+)\ cosa.\cos b=\frac{1}{2}\left[cos(a-b)+cos(a+b)\right]$

$+)\ \sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left[cos(a-b)-cos(a+b)\right]$

$+)\ \sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

Ví dụ 4. **Sử dụng công thức nhân ba**

Cho phương trình $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;14]$?

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 5 . **D.** 6 .

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow 4cos^3x-3\cos x-4\left(2cos^2x-1\right)+3\cos x-4=0$

$\Leftrightarrow 4cos^3x-8cos^2x=0\Leftrightarrow cosx=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

Mà $x\in[0;14]\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 14\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le k\le\frac{14}{\pi}-\frac{1}{2}\Rightarrow k\in\{0;1;2;3\}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc $[0;14]$.

STUDY TIP

$+)\ cos3a=4cos^3a-3cosa$

$+)\ \sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$

Ví dụ 5. **Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt**

Phương trình $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$?