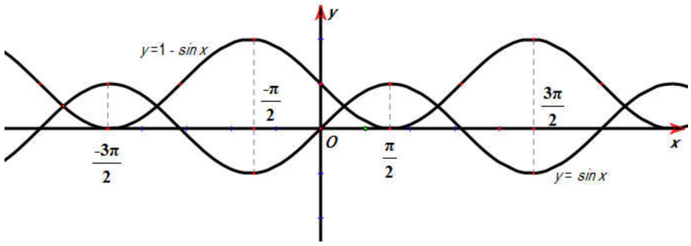


Ví dụ 5. Xét sự biến thiên của hàm số $y=\sin x-\cos x$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

C. Hàm số đã cho có tập giá trị là $[-1;1]$.

D. Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Ta có $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Từ đây ta có thể loại đáp án C, do tập giá trị của hàm số là $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ 2π do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$.

Ta có:

* Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$.

* Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$. Từ đây ta chọn A.

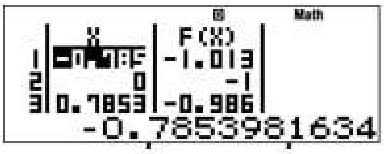
Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay

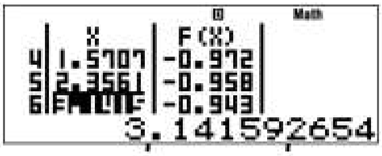
Tương tự như ở ví dụ 1, ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

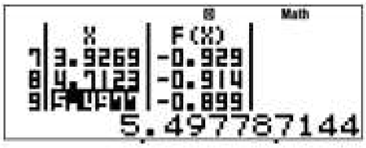
Ấn MODE 7

Máy hiện $f(X) =$ thì ta nhập $\sin X - \cos X$. Chọn STAR; TEND; STEP

phù hợp ta sẽ có kết quả như hình dưới:







Từ bảng giá trị của hàm số $f(x)$ trên ta thấy khi x chạy từ $-\frac{\pi}{4} \approx -0,785$ đến

$\frac{3\pi}{4} \approx 2,3561$ thì

giá trị của hàm số tăng dần, tức là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Phân tích thêm: Khi x chạy từ $\frac{3\pi}{4}$ đến $\frac{7\pi}{4} \approx 5,49778$ thì giá trị của hàm số giảm dần, tức là

hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

STUDY TIP

Ta chú ý ở đây có $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ nên ta có thể suy ra STEP phù hợp.

Trong bài gán STEP $= \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 6. Chọn câu đúng?

A. Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn tăng.

B. Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn tăng trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong các khoảng $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

D. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B.

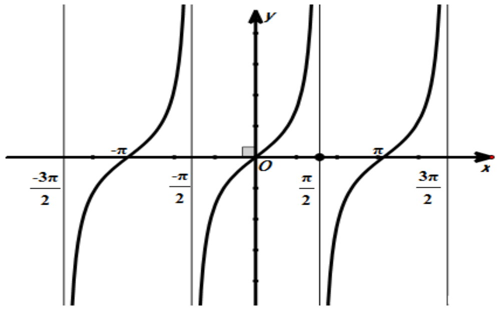
Với A ta thấy hàm số $y = \tan x$ không xác định tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ nên tồn tại các điểm làm

cho hàm số bị gián đoạn nên hàm số không thể luôn tăng.

Với B ta thấy B đúng vì hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng

$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$

Từ đây loại C và D.



Ví dụ 7. Xét hai mệnh đề sau:

(I) $\forall x \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ giảm.

(II) $\forall x \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ giảm.

Mệnh đề đúng trong hai mệnh đề trên là:

A. Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả 2 sai . **D.** Cả 2 đúng .

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Như bài toán xét xem hàm số tăng hay giảm. Ta lấy $x_1 < x_2 \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$

Lúc này ta có $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{\sin x_2} - \frac{1}{\sin x_1} \; \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2}$

Ta thấy $x_1 < x_2 \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow \sin x_1 - \sin x_2 > 0$

$0 > \sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 . \sin x_2} > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Vậy $y = \frac{1}{\sin x}$ là hàm tăng.

Tương tự ta có $y = \frac{1}{\cos x}$ là hàm giảm. Vậy I sai, II đúng.

Cách 2:

Sử dụng lệnh TABLE để xét xem hàm số tăng hay giảm trên máy tính.

Với hàm $\frac{1}{\sin x}$ ta nhập MODE 7: TABLE ($\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$)

Nhập hàm $f(x)$ như hình bên:

◆/◆	1	∇	SIN	ALPHA	)	)	=

START? π ; END? $\frac{3\pi}{2}$. STEP? $\frac{\pi}{10}$.

Của hàm số $y=\frac{1}{\sin x}$ như hình bên. Ta thấy giá trị của hàm số tăng dần khi x chạy từ π đến $\frac{3\pi}{2}$. Nên ta kết luận trên $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ hàm số $y=\frac{1}{\sin x}$ tăng.

Tương tự với II và kết luận.

Ví dụ 8. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $y=|\tan x|$ đồng biến trong $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

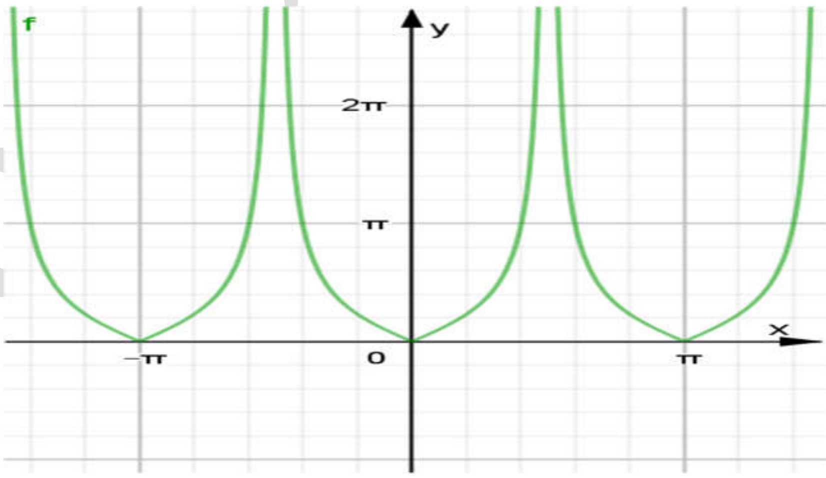
B. $y=|\tan x|$ là hàm số chẵn trên $D=R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $y=|\tan x|$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

D. $y=|\tan x|$ luôn nghịch biến trong $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B.



Ta được đồ thị như hình vẽ trên. Ta thấy hàm số $y=|\tan x|$ nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ và đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Nên ta loại A và D.

Với B ta có $f(-x)=|\tan(-x)|=|\tan x|=f(x)$ $\Rightarrow$ hàm số $y=|\tan x|$ là hàm số chẵn.

Với C ta thấy đồ thị hàm số đã cho không đối xứng qua gốc tọa độ, từ đây ta chọn B.

STUDY TIP

Ta suy diễn đồ thị hàm hàm số $y=|f(x)|$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ từ đó suy ra khoảng đơn điệu của hàm số $y=|f(x)|$.

-Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía trên trục Ox .

-Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ phía dưới trục Ox qua Ox .

-Hợp hai phần trên ta được đồ thị hàm số $y=|f(x)|$.

STUDY TIP

Với bài toán này ta có thể không suy diễn đồ thị mà làm theo hướng tư duy sau:

-Với A: $y=|\tan x|$ không xác định tại $x=\pm\frac{\pi}{2}$ nên không thể đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

-Từ B suy ra C;D sai.

DẠNG 4. **Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác.**

*Các kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền $D\subset R$.

1. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$$

2. Số thực N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x)>m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$$

Một số kiến thức ta sử dụng trong các bài toán này:

1. Tính bị chặn của hàm số lượng giác .
2. Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất giữa $\sin$ và $\cos$.
3. Bảng biến thiên của hàm số lượng giác.
4. Kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=2017\cos(8x+\frac{10\pi}{2017})+2016.$

A. $\min y=1; \max y=4033.$ **B.** $\min y=-1; \max y=4033.$

C. $\min y=1; \max y=4022.$ **D.** $\min y=-1; \max y=4022.$

Phân tích

Ta có các bước để giải quyết bài toán như sau:

Bước 1: Chỉ ra $f(x) \le M, \forall x \in D$.

Bước 2 : Chỉ ra $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kết luận : $\max_D f(x) = M$

Tương tự với tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Hàm số xác định trên R .

Ta có $-1 \le \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) \le 1, \forall R$.

$\Leftrightarrow -2017 \le 2017\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 \le 4033, \forall \in R$.

$\Leftrightarrow -1 \le 2017\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 \le 4033, \forall \in R$

Ta có $y = -1$ khi $\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) = -1$; $y = 4033$ khi $\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) = 1$.

Vậy $\min y = -1; \max y = 4033$.

Cách 2: sử dụng máy tính cầm tay.

Trong bốn phương án chỉ có hai giá trị max là $4022; 4033$.

Chỉ có hai giá trị min là 1;-1.

Lúc này ta sử dụng chức năng SHIFT CALC để thử giá trị:

Ví dụ ta nhập vào màn hình $2017\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 = 4033$ ta thấy phương trình có nghiệm.

Tương tự nhập $2017\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 = -1$ ta thấy phương trình có nghiệm.

Từ đây ta chọn **B**.

STUDY TIP

Trong bài toán ta chọn thử hai giá trị trên vì 4033 là giá trị lớn hơn và -1 là giá trị nhỏ hơn nên ta thử trước. Nếu phương trình không có nghiệm thì sẽ là trường hợp còn lại.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1$

A. $\min y = 0; \max y = 4$

B. $\min y = 1 - \sqrt{3}; \max y = 3 + \sqrt{3}$.

C. $\min y = -4; \max y = 0$.

D. $\min y = -1 + \sqrt{3}; \max y = 3 + \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Để sử dụng tính bị chặn của hàm số ở trong STUDY TIP ta đưa ra ở trên, ta sẽ đưa $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1$ về theo $\sin u(x)$ hoặc $\cos u(x)$.

Ta có $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1$ $= 2\cos^2 x - 1 - \sqrt{3}\sin 2x + 2$ $= \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2 \ (*)$

$= 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + 2$ $= 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$

Mặt khác $-1 \le 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2 \le 4, \forall x \in R \Leftrightarrow 0 \le y \le 4, \forall x \in R$.

Ta có bài toán tổng quát:
Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a\sin u + b\cos u$ trên R . Với $a, b \in R; a^2 + b^2 > 0$.

Lời giải tổng quát

$y = a\sin u + b\cos u \Rightarrow y = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u\right)\sqrt{a^2+b^2}$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 1 \Rightarrow \ni \alpha \in R$ sao cho $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin u.\cos\alpha + \cos u.\sin\alpha\right) \Rightarrow y = \sqrt{a^2+b^2}.\sin\left(u+\alpha\right)$

Vì $-1 \le \sin\left(u+\alpha\right) \le 1 \Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2} \le y \le \sqrt{a^2+b^2}$

Ngoài ra ta có thể mở rộng bài toán như sau:

$y = a\sin\left[f\left(x\right)\right] + b\cos\left[f\left(x\right)\right] + c$. Ta có $-\sqrt{a^2+b^2} + c \le y \le \sqrt{a^2+b^2} + c$

Từ bài toán tổng quát trên ta có thể giải quyết nhanh bài toán ví dụ 2 từ dòng (*) như sau: Ta có $-\sqrt{1+3} + 2 \le y \le \sqrt{1+3} + 2 \Leftrightarrow 0 \le y \le 4$.

STUDY TIP

Ngoài cách nhớ công thức ở bài toán tổng quát phía bên phải ta có thể nhớ theo điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất theo sin và cos như sau:
Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a\sin\left[f\left(x\right)\right] + b\cos\left[f\left(x\right)\right] + c$

$a\sin\left[f\left(x\right)\right] + b\cos\left[f\left(x\right)\right] + c - y = 0$ điều kiện có nghiệm $a^2 + b^2 \ge \left(c-y\right)^2$. Từ đây ta tìm được $\min, \max$ của y.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 3}{2 + \cos x}$

A. $\min y = -\frac{2}{3}; \max y = 2$.

B. $\min y = \frac{2}{3}; \max y = 2$

B. $\min y = \frac{1}{2}; \max y = \frac{3}{2}$

D. $\min y = -\frac{1}{2}; \max y = \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $\cos x + 2 > 0, \forall x \in R$.

$y = \frac{\sin x + 2\cos x + 3}{2 + \cos x} \Leftrightarrow \sin x + 2\cos x + 3 = 2y + y\cos x \Leftrightarrow \sin x + \left(2-y\right)\cos x + 3 - 2y = 0$

Ta sử dụng điều kiện ở STUDY TIP trong bài tổng quát trên.

Ta có $1^2 + \left(2-y\right)^2 \ge \left(3-2y\right)^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 - y^2 + 4y - 4 - 1 \le 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \le y \le 2$

Cách 2 : sử dụng máy tính cầm tay

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có thể sử dụng SHIFT SOLVE: $\frac{\sin x + 2\cos x + 3}{2 + \cos x} = 2$ thì phương trình có nghiệm. Do 2 là số lớn nhất trong các phương án A;B;C;D nên ta không cần thử trường hợp $\max = \frac{3}{2}$.

Lúc này chỉ còn A và B. Thử với $\min y = -\frac{2}{3}$ thì không có nghiệm.

Từ đây chọn B.

STUDY TIP

Nếu hàm số có dạng $y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$ ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về dạng phương trình trong STUDY TIP ở phía trên và tiếp tục lời giải.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$.

A. $\min y = -1; \max y = 1$.

B. $\min y = 0; \max y = 1$

C. $\min y = -1; \max y = 0$.

D. $\min y = -1; \max y$ không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1 : Ta có $\begin{cases} 0 \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1 \\ 0 \le \sqrt{\cos x} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1 \\ -1 \le -\sqrt{\cos x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le y \le 1$.

Vậy khi $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in Z$

Cách 2 : sử dụng máy tính cầm tay

STUDY TIP

Nhiều độc giả không lưu ý đổi dấu của bpt thứ hai của hệ khi nhân các vế với -1 dẫn đến chọn đáp án sai.

Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2\tan^2 a.\tan^2 b + 2$

A. $\min y = 2$.

B. $\min y = 6$.

C. $\min y = 4$.

D. Không tồn tại GTLN.

Lời giải

Chọn B.

$P = \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\cot^2 a.\cot^2 b + 2\tan^2 a.\tan^2 b + 2$

$= \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\left(\cot^2 a.\cot^2 b + \tan^2 a.\tan^2 b - 2\right) + 6$

$= \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\left(\cot^2 a.\cot^2 b + \tan^2 a.\tan^2 b - 2\cot a.\cot b.\tan a.\tan b\right) + 6$

$= \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\left(\cot a.\cot b - \tan a.\tan b\right)^2 + 6 \ge 6$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \cot^2 a = \cot^2 b \\ \cot a.\cot b = \tan a.\tan b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 a = 1 \\ \cot^2 b = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow a=b=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

STUDY TIP:
Với các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm lượng giác ta có thể đưa về dạng $y=A^2(x)+B\geq B$. Nhưng cần lưu ý xem dấu bằng có xãy ra hay không.

Tiếp theo ta có ví dụ 6 là một câu hỏi khác cho ví dụ 2 như sau

Ví dụ 6. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x.\cos x+1$ trên đoạn $\left[0,\dfrac{7\pi}{12}\right]$ lần lượt là

A. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=2;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=3$.

B. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=2$.

C. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=4$.

D. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=3$.

Lời giải

Chọn B.

Từ ví dụ 2 ta có $y=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$. Đặt $u=2x+\dfrac{\pi}{3}$

Từ đề bài ta xét $x\in\left[0;\dfrac{7\pi}{12}\right]\Rightarrow u\in\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}\right]$

Ta lập BBT của hàm số $y=2\cos u+2$ trên $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

u	$\dfrac{\pi}{3}$		π		$\dfrac{3\pi}{2}$
$2\cos u+2$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]} f(\mathrm{u})=0$ khi $u=\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$

$\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]} f(\mathrm{u})=3$ khi $u=\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=0$

Hay $\min\limits_{\left[0;\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0;\frac{7\pi}{12}\right]} y=3$.

STUDY TIP:

Với các bài toán tìm min, max của hàm số lượng giác trên một đoạn ta thường phải xét nhanh BBT để giải quyết bài toán. Ở chương trình 11 ta chưa học đạo hàm nên chưa giải quyết được bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số sử dụng đạo hàm. Sau khi học xong đạo hàm ta sẽ giải quyết bài toán này nhanh chóng hơn.

Ví dụ 7. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^2 x-\sin x+2$.

A. $\min y=\frac{7}{4};\max y=4$.

B. $\min y=\frac{7}{4};\max y=2$.

C. $\min y=-1;\max y=1$.

D. $\min y=\frac{1}{2};\max y=2$.

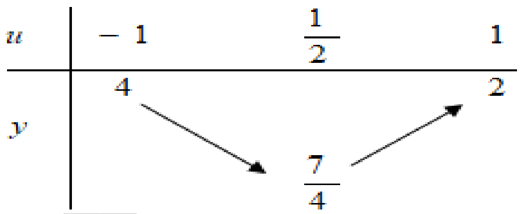
Lời giải

Chọn A.

Đặt $\sin x=u;\ u\in[-1;1]$

Xét hàm số: $y=u^2-u+2$ trên $[-1;1]$.

Ta có: $\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}\in[-1;1]$. Từ đây có bảng biến thiên



Ta kết luận: $\min\limits_{[-1;1]} f(u)=\frac{7}{4}$ và $\max\limits_{[-1;1]} y=4\Leftrightarrow u=-1$.

Hay $\min y=\frac{7}{4}\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ và $\max y=4\Leftrightarrow \sin x=-1$.

Ngoài các phương pháp giải các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số lượng giác ta rút ra từ các ví dụ trên ta còn phương pháp sử dụng bất đẳng thức cơ bản. Phương pháp này được coi là một phương pháp khó vì đòi hỏi tính sang tạo và kĩ thuật trong việc sử dụng bất đẳng thức.

Một số bất đẳng thức ta thường dung:

1.Bất đẳng thức AM – GM.

a. Với hai số:

Cho hai số thực a,b là hai số dương, ta có $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

b. Với n số:

Cho hai số thực $x_1;x_2;x_3;...;x_n$ là các số dương $n\in N^*$, ta có

$\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1.x_2.x_3...x_n}$ dấu bằng xảy ra khi $x_1=x_2=x_3=...=x_n$.

2. Bất đẳng thức Bunyakovsky

a. Bất đẳng thuwcsBunyakovsky dạng thông thường.

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge\left(ac+bd\right)^2$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

b. Bất đẳng thức Bunyakovsky cho bộ hai số

Với hai bộ số $\left(a_1;a_2;...;a_n\right)$ và $\left(b_1;b_2;...;b_n\right)$ ta có

$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$

STUDY TIP

Ta có thể sử dụng tính chất của tam thức bậc hai để giải các bài toán tìm min max hàm lượng giác như sau:

Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$

+ Nếu $a<0$ thì $ax^2+bx+c\le\frac{-\Delta}{4a}$ dấu bằng xảy ra khi $x=-\frac{b}{2a}$.

+ Nếu $a>0$ thì $ax^2+bx+c\ge\frac{-\Delta}{4a}$ dấu bằng xảy ra khi $x=-\frac{b}{2a}$.

+ Nếu hàm số đã cho là hàm bậc hai mà điều kiện không phải là $\forall x\in R$ thì ta phải lập BBT để tìm min max

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=....=\frac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu một số b_i nào đó $\left(i=1,2,3...\right)$ bằng 0 thì a_i tương đương bằng 0.

c. Hệ quả của bất đẳng thức Bunyakopvsky ta có $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge 4abcd$

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2x}$

A. $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{22}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

Đáp án B

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2x}\Leftrightarrow y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x}+\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2x}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakopvsky cho 4 số: 1; 1; $\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x}$; $\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2x}$ ta có:

$$1.\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x}+1.\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2x}\le\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2x}=\sqrt{2}.\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{2.1}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

Hay $y\le\frac{\sqrt{22}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $1+\frac{1}{2}\cos^2 x=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

STUDY TIP

Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức Bunyakopvsky bởi ở trong căn lần lượt có $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$. Ta cân bằng hệ số của $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$ để áp dụng tính chất $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Áp dụng Bunyakopvsky thì vế phải sẽ là hằng số, từ đó giải quyết được bài toán.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\frac{1}{2-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ T

B. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$

C. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

D. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: Ta thấy $2-\cos x>0, \forall x\in R$ và $1+\cos x>0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $\frac{1}{2-\cos x}$ và $\frac{1}{1+\cos x}$ là hai số dương. Áp dụng vất đẳng thức AM- GM cho hai số dương ta có

$$\frac{1}{2-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}\geq\frac{2}{\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}}$$

Mặt khác tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}\leq\frac{2-\cos x+1+\cos x}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y\geq\frac{2}{\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}}\geq\frac{4}{3}$$

STUDY TIP

Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức AM-GM bởi vì ta thấy mẫu số của hai phân thức cộng lại sẽ ra hằng số, nên ở đây ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM.

Ta có thể giải quyết bài toán theo hướng khác đó là sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu.

Với x, y là hai số thực dương ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ dấu bằng xảy ra khi $x=y$

Vậy $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$, dấu bàng xảy ra khi $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$ vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Cách 2: Để ý đề bài hỏi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Trên đây là hai ví dụ sử dụng bất đẳng thức tìm GTLN, GTNN của hàm số lượng giác mà không có liên hệ cho trước. Ví dụ 10 dưới đây là một ví dụ khó hơn về sử dụng bất đẳng thức kết hợp với lượng giác để giải quyết.

Ví dụ 10. Cho $x, y, z > 0$ và $x+y+z=\frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$y=\sqrt{1+\tan x.\tan y}+\sqrt{1+\tan y.\tan z}+\sqrt{1+\tan z.\tan x}$$

A. $y_{\max}=1+2\sqrt{2}$. **B.** $y_{\max}=3\sqrt{3}$. **C.** $y_{\max}=\sqrt{4}$. **D.** $y_{\max}=2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $x+y+z=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x+y=\frac{\pi}{2}-z\Rightarrow \tan(x+y)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\Leftrightarrow \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}=\frac{1}{\tan z}$

$\Leftrightarrow \tan x.\tan z+\tan y.\tan z=1-\tan x.\tan y \Leftrightarrow \tan x.\tan z+\tan y.\tan z+\tan x.\tan y=1$

Ta thấy $\tan x.\tan z$; $\tan y.\tan z$; $\tan x.\tan y$ lần lượt xuất hiện trong hàm số đề cho dưới căn thức, tương tự như ví dụ 8, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 6 số ta có: $1.\sqrt{1+\tan x.\tan y}+1.\sqrt{1+\tan y.\tan z}+1.\sqrt{1+\tan z.\tan x}\le$

$\le\sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{1.\tan x.\tan z+1.\tan y.\tan z+1.\tan x.\tan y}=$

$=\sqrt{3}\sqrt{3+(\tan x.\tan z+\tan y.\tan z+\tan x.\tan y)}=2\sqrt{3}$

Vậy $y_{\max}=2\sqrt{3}$

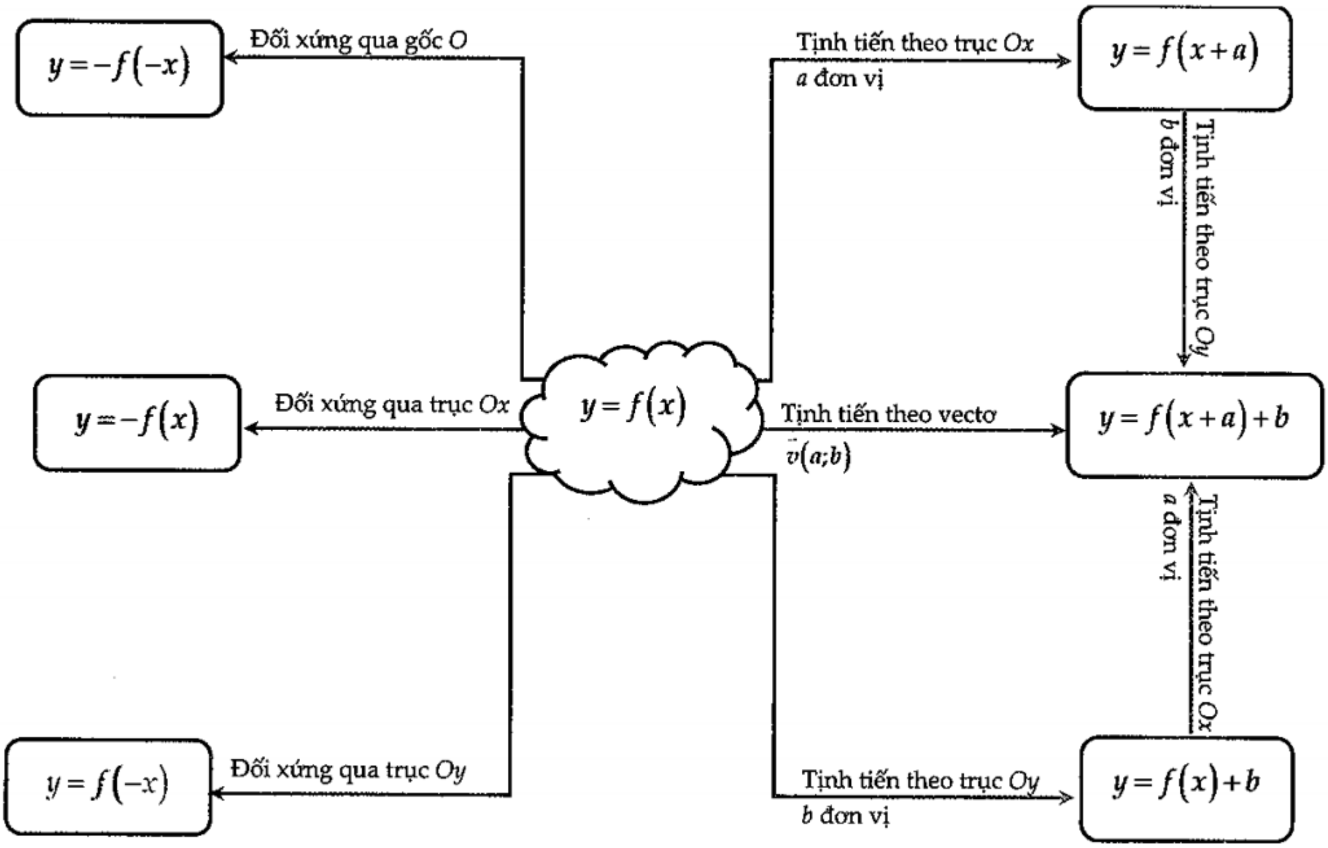
Đọc thêm

DẠNG 5: Dạng đồ thị của hàm số lượng giác

Các kiến thức cơ bản về dạng của hàm số lượng giác được đưa ra ở phần 1:

Lý thuyết cơ bản:Sau đây ta bổ sung một số kiến thức lý thuyết để giải quyết bài toán nhận dạng đồ thị hàm số lượng giác một cách hiệu quả.

Sơ đồ biến đổi đồ thị hàm số cơ bản:



Các kiến thức liên quan đến suy diễn đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối:

Cho hàm số $y=f(x)$. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy diễn:

Đồ thị hàm số $y=\lvert f(x)\rvert$ gồm	*Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y=f(x)$. *Đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.
Đồ thị hàm số $y=f(\lvert x\rvert)$ gồm	*Phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ nằm bên phải trục Oy. *Đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy.
Đồ thị hàm số $y=\lvert u(x)\rvert.v(x)$ với $f(x)=u(x).v(x)$ gồm	*Phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên miền thỏa mãn $u(x)\ge 0$. *Đối xứng phần đồ thị $y=f(x)$ trên trên miền $u(x)<0$ qua trục hoành.

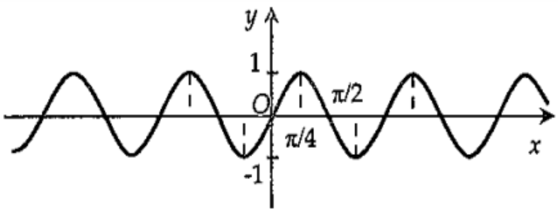
Ở phần lý thuyết có đưa ra phần đọc thêm về hàm số $y=a\sin(\omega x+b)+c$ với $a;b;c;\omega\in\mathbb{R};a\omega\neq 0.$

> Hàm số $y = a\sin\left(\omega x + b\right) + c, (a, b, c, \omega \in R, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.
> Tương tự hàm số $y = a\cos(\omega x + b), (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

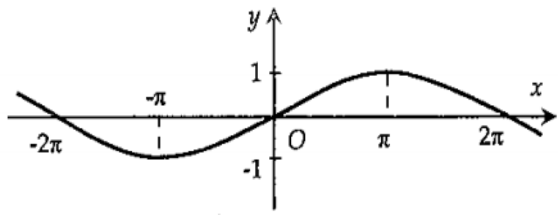
Ta có ví dụ sau:

Ví dụ 11. Hình nào dưới đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = f(x) = 2\sin 2x$?

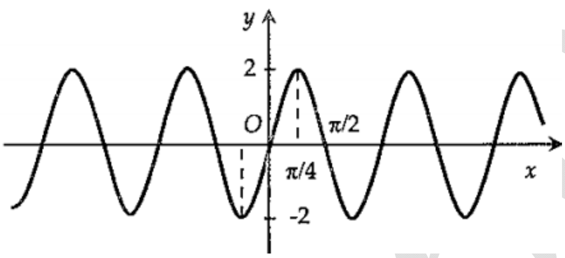
A.



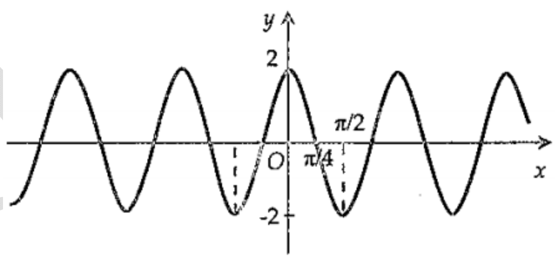
B.



C.



D.



Lời giải

Chọn C.

Ta thấy $-2 \leq 2\sin 2x \leq 2$ nên ta có loại A và B.

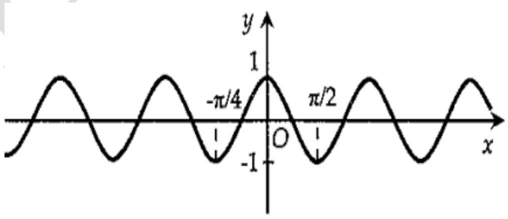
Tiếp theo với C và D ta có:

Từ phần lý thuyết ở trên ta có hàm số tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{|2|} = \pi.$

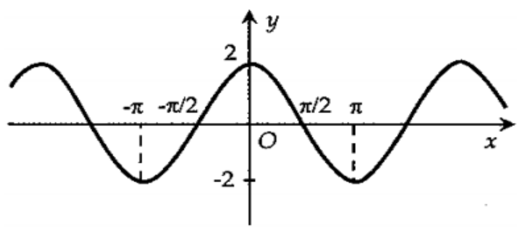
Ta thấy với $x = 0$ thì $y = 0$ nên đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ. Từ đây ta chọn đáp án C.

Ví dụ 11. Hình vẽ nào sau đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = \cos\dfrac{x}{2}$?

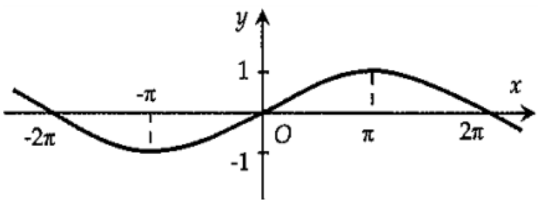
A.



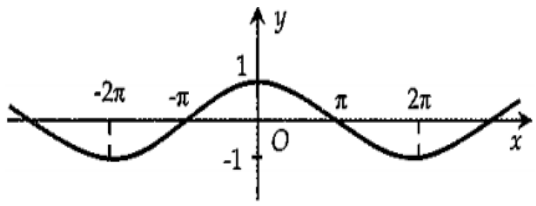
B.



C.



D.



Lời giải

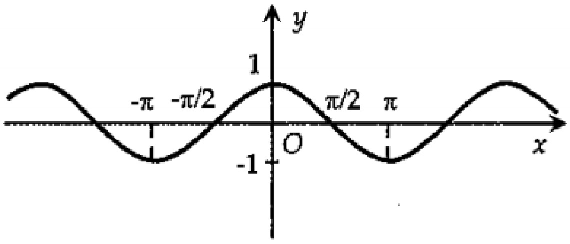
Chọn D

Ta thấy $-1 \le \cos\frac{x}{2} \le 1$ nên ta loại B.

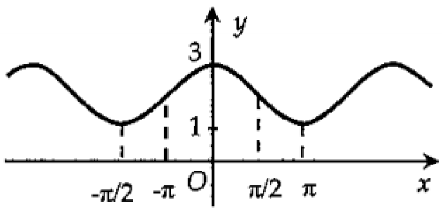
Tiếp theo ta có hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$ có chu kì tuần hoàn là $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Ta thấy với $x = 0$ thì $y = \cos\frac{x}{2} = \cos 0 = 1$ nên ta chọn D.

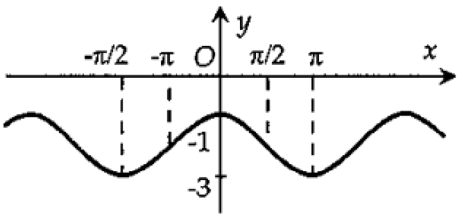
Ví dụ 12. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ như hình vẽ :



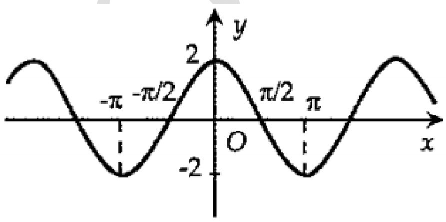
Hình vẽ nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \cos x + 2$?



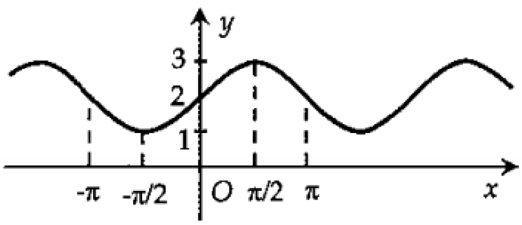
A. .



B. .



C. .



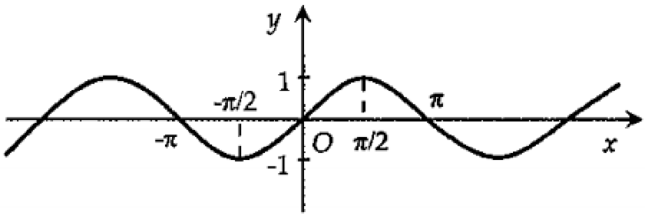
D. .

Lời giải

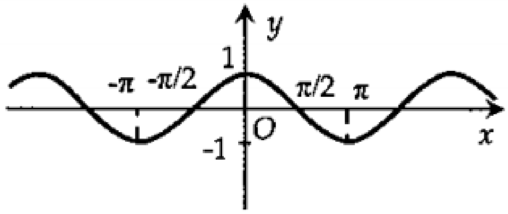
Chọn A

Ta thực hiện phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên trục Oy lên trên 2 đơn vị (xem lại sơ đồ biến đổi đồ thị cơ bản ở bên trên).

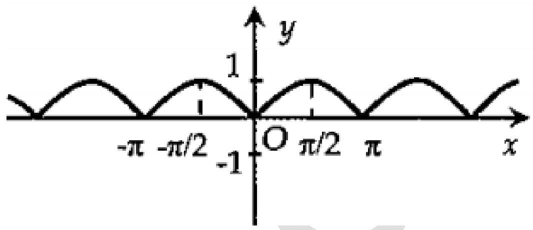
Ví dụ 13. Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình vẽ:



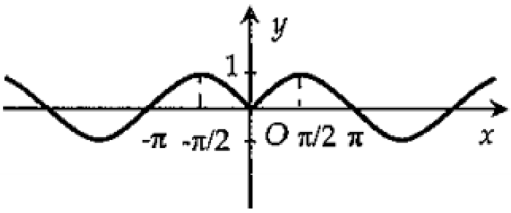
Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \sin|x|$?

A. 

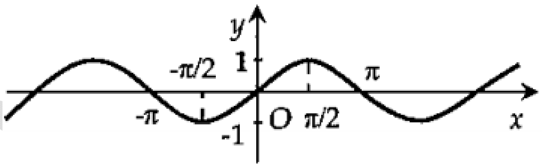
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

Lời giải

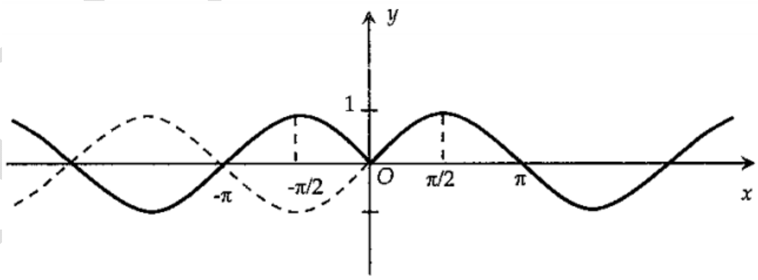
Chọn C

Suy diễn đồ thị hàm số $y = \sin|x|$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$:

Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm bên phải trục Oy.

Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy.

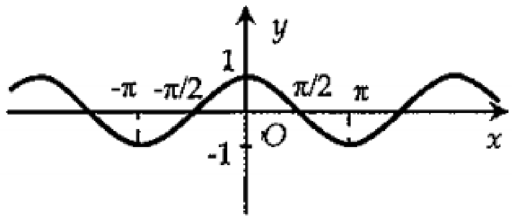
Dưới đây là đồ thị ta thu được sau khi thực hiện các bước suy diễn ở trên. Phần đồ thị nét đứt là phần bỏ đi của đồ thị hàm số $y = \sin x$.

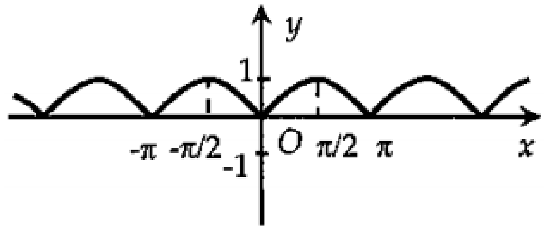


STUDY TIP

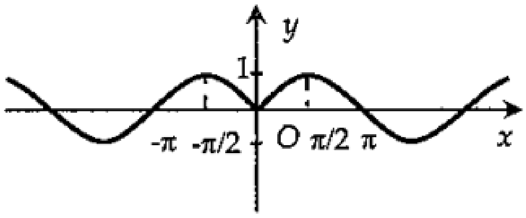
Ngoài ra ở bài toán này, ta có thể áp dụng tính chất hàm chẵn lẻ mà tôi đã cung cấp ở phần xét tính chẵn lẻ của hàm số phía trước. Hàm số $y = \sin|x|$ là hàm số chẵn có đồ thị đối xứng qua trục Oy. Nhìn các phương án A, B, C, D chỉ có phương án D là không có đồ thị đối xứng qua trục Oy. Tiếp theo ta tìm giá trị của một số điểm đặc biệt và chọn được C.

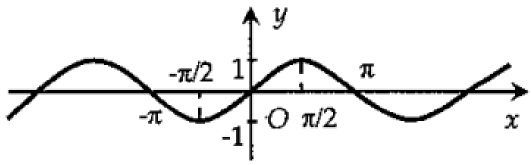
Ví dụ 14. Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = |\sin x|$?

A. 

. **B.** 

.

C. 

. **D.** 

.

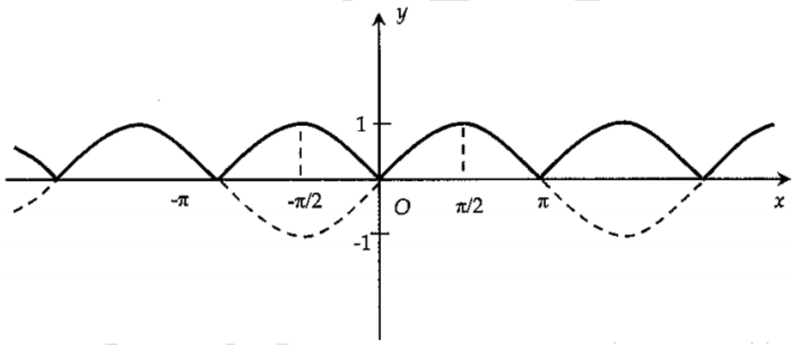
Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Suy diễn đồ thị hàm số $y=|\sin x|$ từ đồ thị hàm số $y=\sin x$:

Giữ nguyên phần tử từ trục hoành trở lên của đồ thị $y=\sin x$.

Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=\sin x$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.



Cách 2: Ta thấy $|\sin x|\ge 0,\forall x$ nên đồ thị hàm số $y=|\sin x|$ hoàn toàn nằm trên trục Ox.

Từ đây ta chọn **B**.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

A. $D=R\backslash\{k\pi\,|\,k\in Z\}$. **B.** $D=R\backslash\{\pi+k\pi\,|\,k\in Z\}$.

C. $D=R\backslash\{\pi+k2\pi\,|\,k\in Z\}$. **D.** $D=R\backslash\{k2\pi\,|\,k\in Z\}$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\sin 5x+\tan 2x$ là:

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}, k\in Z.$ **B.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right\}, k\in Z.$

C. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}(k+1)\right\}, k\in Z.$ **D.** $R.$

Câu 3. Tập xác định D của hàm số $y=\tan x-\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$ là

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in Z\right\}.$ **B.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$

C. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$ **D.** $R\backslash\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$ **B.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$

C. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$ **D.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$

Câu 5. Xét bốn mệnh đề sau

(1) Hàm số $y=\sin x$ có tập xác định là $R.$

(2) Hàm số $y=\cos x$ có tập xác định là $R.$

(3) Hàm số $y=\tan x$ có tập xác định là $R\backslash\{k\pi \mid k\in Z\}.$

(4) Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là $R\backslash\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$

Số mệnh đề đúng là

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y=\cos\sqrt{x}$ là

A. $D=[0;2\pi].$ **B.** $D=[0;+\infty).$

C. $D=R.$ **D.** $D=R\backslash\{0\}.$

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$ là

A. $R\backslash\{k\pi \mid k\in Z\}.$ **B.** $R\backslash\{k2\pi \mid k\in Z\}.$

C. $R\backslash\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$ **D.** $R\backslash\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y=3\tan x+2\cot x+x.$

A. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$ **B.** $D=R\backslash\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$

C. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R$.

Câu 9. Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $R\backslash\left\{k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$.

C. R. **D.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 10. Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{2017\tan 2x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

C. R. **D.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$.

A. $D=R\backslash\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $D=R\backslash\left\{k\frac{\pi}{4}\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 12. Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}$.

A. $D=R\backslash\left\{-\frac{\pi}{4}+k2\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $D=R\backslash\left\{k\frac{\pi}{4}\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\sin 2x+1}$ là

A. $D=R\backslash\{k\pi\,|\,k\in Z\}$. **B.** $D=R$.

C. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 14. Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{\tan x}{\sqrt{15-14\cos 13x}}$.

A. $D=R\backslash\{k\pi\,|\,k\in Z\}$. **B.** $D=R$.

C. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 15. Tìm tập xác định của hàm số: $y=\dfrac{\cot 2x}{\sqrt{2017-2016\sin 2015x}}$.

A. . $D=R\backslash\{k\pi \mid k\in Z\}$.
B. $D=R$. .
C. $D=R\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}$.
D. $D=R\backslash\left\{k\dfrac{\pi}{2} \mid k\in Z\right\}$.

Câu 16. Tìm tập xác định của hàm số: $y=\sqrt{\dfrac{20+19\cos 18x}{1-\sin x}}$.

A. $D=R\backslash\{k\pi \mid k\in Z\}$.
B. $D=R\backslash\{k2\pi \mid k\in Z\}$.
C. $D=R\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in Z\right\}$.
D. $D=R\backslash\left\{k\dfrac{\pi}{2} \mid k\in Z\right\}$.

Câu 17. Hàm số nào sau đây có tập xác định là R?

A. $y=2\cos\sqrt{x}$.
B. $y=\cos\dfrac{1}{x}$.
C. $y=\dfrac{\tan 2x}{\sin^2 x+1}$.
D. $y=\sqrt{\dfrac{\sin 2x+3}{\cos 4x+5}}$.

Câu 18. Hàm số nào sau đây có tập xác định khác với các hàm số còn lại?

A. $y=\tan x$.
B. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}$.
C. $y=\dfrac{\tan 2017x+2018}{\cos x}$.
D. $y=\sqrt{\dfrac{1}{1-\sin^2 x}}$.

Câu 19. Hàm số $y=\sqrt{\cos x-1}+1-\cos^2 x$ chỉ xác định khi:

A. $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.
B. $x=0$.
C. $x\neq k\pi, k\in Z$.
D. $x=k2\pi, k\in Z$.

Câu 20. Hàm số $y=\sqrt{1-\sin 2x}-\sqrt{1+\sin 2x}$ có tập xác định là:

A. $\varnothing$.
B. R .
C. $\left[\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right], k\in Z$.
D. $\left[\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{13\pi}{6}+k2\pi\right], k\in Z$.

Câu 21. Chọn khẳng định đúng:

A. Hàm số $y=\sqrt{\sin x}$ có tập xác định là các đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right], k\in Z$.

B. Hàm số $y=\sqrt{\cos x}$ có tập xác định là các đoạn $[k2\pi;\pi+k2\pi], k\in Z$.

C. Hàm số $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$ có tập xác định là các đoạn $\left[k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right], k\in Z$.

D. Hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ có tập xác định là các đoạn $\left[k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right], k\in Z$.

Câu 22. Xét hai mệnh đề:

(I): Các hàm số $y=\frac{1}{\sin x}$ và $y=\cot x$ có chung tập xác định là $R\setminus\{x\mid x=k\pi, k\in Z\}$.

(II): Các hàm số $y=\frac{1}{\cos x}$ và $y=\tan x$ có chung tập xác định là $R\setminus\left\{x\mid x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\right\}$.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng. **C.** Cả hai đều sai . **D.** Cả hai đều đúng.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}$ với $0\le x\le 2\pi$. Tập xác định của hàm số là:

A. $[0;\pi]$. **B.** $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. **C.** $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. **D.** $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{\tan x+1}{\tan x-1},(0<x<\pi)$. Tập xác định:

A. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. **C.** $(0;\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. **D.** $(0;\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\}$.

Câu 25. Tập xác định của hàm số $y=3\tan^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. R.

B. $R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\right\}$.

C. $R\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in Z\right\}$.

D. $R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in Z\right\}$.

Câu 26. Tập xác định của hàm số $y=2\cot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ là:

A. $R\setminus\left\{\frac{2\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z\right\}$.

B. $R\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z\right\}$.

C. $R\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in Z\right\}$.

D. $R\setminus\left\{\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z\right\}$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\frac{\cos 2x}{1+\tan x}$. Hãy chỉ ra khoảng mà hàm số không xác định $(k\in Z)$

A. $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)$.

B. $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$.

C. $\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

D. $\left(\pi+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

Câu 28. Xét hai câu sau:

(I): Các hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ có chung tập xác định là R.

(II): Các hàm số $y=\tan x$ và $y=\cot x$ có chung tập xác định là $R\setminus\left\{\left\{x\,|\,x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\cup\left\{x\,|\,x=k\pi\right\}\right\},k\in Z$.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng. **C.** Cả hai đều sai . **D.** Cả hai đều đúng.

Câu 29. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\cos 3x}{\cos x.\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}$ là:

A. $R\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3};\frac{5\pi}{6}+\mathrm{k}\,\pi;\frac{\pi}{6}+\mathrm{k}\,\pi,k\in Z\right\}$. **B.** $R\setminus\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z\right\}$.

C. $R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\mathrm{k}\,\pi;\frac{5\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z\right\}$. **D.** $R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{5\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z\right\}$.

Câu 30. Tập xác định của hàm số $f(x)=\dfrac{5\sin 2x+3}{12\sin x}+\dfrac{\sqrt{\cos^2 x+5}}{\cos x}$ là:

A. $D=R\setminus\{k2\pi\,|\,k\in Z\}$. **B.** $D=R\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\setminus\{\mathrm{k}\,\pi\,|\,k\in Z\}$. **D.** $D=R\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 31. Tập xác định của hàm số $\dfrac{1-\cos x}{2\sin x+1}$ là:

A. $D=R\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi;\frac{7\pi}{6}+\mathrm{k}\,2\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $D=R\setminus\left\{\frac{7\pi}{6}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+\mathrm{k}\,\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{7\pi}{6}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 32. Tập xác định của hàm số $\sqrt{\dfrac{5-3\cos 2x}{\left|1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|}}$ là:

A. $D=R\setminus\{k\pi\,|\,k\in Z\}$. **B.** $D=R$.

C. $D=R\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\setminus\{k2\pi\,|\,k\in Z\}$.

Câu 33. Tập xác định của hàm số $y=\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ là:

A. $D=R\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $D=R\setminus\left\{\frac{7\pi}{6}+k\pi,\mathrm{k}\,2\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D = R\backslash\{k2\pi \mid k \in Z\}$.　　**D.** $D = R\backslash\left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in Z\right\}$.

Câu 34. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2+\sin x} - \frac{1}{\tan^2 x - 1}$ là:

A. $D = R\backslash\left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\right\}$.　　**B.** $D = R\backslash\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$.

C. $D = R\backslash\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in Z\right\}$.　　**D.** $D = R\backslash\left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in Z\right\}$.

Câu 35. Hàm số $y = \frac{1+\tan\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)}{\cot^2 x + 1}$ có tập xác định là:

A. $D = R\backslash\left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k\pi \mid k \in Z\right\}$.　　**B.** $D = R\backslash\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$.

C. $D = R\backslash\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi; k\pi \mid k \in Z\right\}$.　　**D.** $D = R\backslash\left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; k\pi \mid k \in Z\right\}$.

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Câu 36. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = -2\cos x$.　　**B.** $y = -2\sin x$.　　**C.** $y = 2\sin(-x)$.　　**D.** $y = \sin x - \cos x$.

Câu 37. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y = -2\cos x$.　　**B.** $y = -2\sin x$.　　**C.** $y = -2\sin^2 x + 2$.　　**D.** $y = -2\cos x + 2$.

Câu 38. Hàm số $y = \sin x.\cos^2 x + \tan x$ là:

A. Hàm số chẵn.　　**B.** Hàm số lẻ

C. Vừa chẵn vừa lẻ.　　**D.** Không chẵn không lẻ.

Câu 39. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \frac{1+\sin^2 2x}{1+\cos 3x}$ ta kết luận hàm số đã cho là:

A. Hàm số chẵn.　　**B.** Hàm số lẻ .

C. Vừa chẵn vừa lẻ　　**D.** Không chẵn không lẻ

Câu 40. Xét các câu sau:

I.Hàm số $y = \sin x\sqrt{\sin x}$ là hàm số lẻ.

II.Hàm số $y = \cos x\sqrt{\cos x}$ là hàm số chẵn.

III.Hàm số $y = \sin x\sqrt{\cos x}$ là hàm số lẻ.

Trong các câu trên, câu nào đúng?

A. Chỉ (I).　　**B.** Chỉ (II).　　**C.** Chỉ (III) .　　**D.** Cả 3 câu .

Câu 41. Hãy chỉ ra hàm số nào là hàm số lẻ:

A. $y=\sqrt{\sin x}$. **B.** $y=\sin^2 x$.

C. $y=\dfrac{\cot x}{\cos x}$. **D.** $y=\dfrac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 42. Hàm số $y=\dfrac{\tan 2x}{\sin^3 x}$ có tính chất nào sau đây?

A. Hàm số chẵn. **B.**Hàm số lẻ.

C. Hàm không chẵn không lẻ. **D.** Tập xác định $D=R$.

Câu 43. Hãy chỉ ra hàm số không có tính chẵn lẻ

A. $y=\text{sinx}+\text{tanx}$. **B.** $y=\tan x+\dfrac{1}{\sin x}$.

C. $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\cos^4 x-\sin^4 x$.

Câu 44. Hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **B.** $y=\dfrac{1}{\sin^{2013} x}$.

C. $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\sqrt{1-\sin 2012x}$.

Câu 45. Hàm số nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

A. $y=\sin 2017x$. **B.** $y=\dfrac{1}{\sin x}$. **C.** $y=\sqrt{\cos x}$. **D.** $y=\sqrt{\sin 2x}$.

Câu 46. Hãy chỉ ra hàm nào là hàm số chẵn:

A. $y=\sin^{2016} x.\text{cosx}$. **B.** $y=\dfrac{\cot x}{\tan^2 x+1}$.

C. $y=\text{sinx}.\cos 6\text{x}$. **D.** $y=\cos x.\sin^3 x$.

Câu 47. Xét hai mệnh đề:

(I)Hàm số $y=f(x)=\text{tanx}+\text{cotx}$ là hàm số lẻ

(II) Hàm số $y=f(x)=\text{tanx}-\text{cotx}$ là hàm số lẻ

Trong các câu trên, câu nào đúng?

A. Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả hai đúng. **D.** Cả hai sai.

Câu 48. Xét hai mệnh đề:

(I)Hàm số $y=f(x)=\text{tanx}+\text{cosx}$ là hàm số lẻ

(II) Hàm số $y=f(x)=\text{tanx}+\text{sinx}$ là hàm số lẻ

Trong các câu trên, câu nào đúng?

A. Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả hai đúng. **D.** Cả hai sai.

Câu 49. Hàm số $y=1-\sin^2 x$ là:

A. Hàm số chẵn. B.Hàm số lẻ.
C. Hàm không chẵn không lẻ. D.Hàm số không tuần hoàn.

Câu 50. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?
A. $y = \sin 2x$. B. $y = x.\cos x$.
C. $y = \cos x.\cot x$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 51. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?
A. $y = \sin|x|$. B. $y = x^2.\sin x$.
C. $y = \frac{x}{\cos x}$. D. $y = x + \sin x$.

Câu 52. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?
A. $y = \frac{1}{2}\sin x.\cos 2x$. B. $y = 2\cos 2x$.
C. $y = \frac{x}{\sin x}$. D. $y = 1 + \tan x$.

Câu 53. Khẳng định nào sau đây là sai?
A. $y = |\sin x|$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ. B. $y = \cos x$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy.
C. $y = |\tan x|$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy. D. $y = \cot x$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Câu 54. Cho hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ xét trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. Hàm không chẳn không lẻ. B. Hàm lẻ.
C. Hàm chẳn. D. Có đồ thị đối xứng qua trục hoành.

Câu 55. Tìm kết luận sai:
A. Hàm số $y = x.\sin^3 x$ là hàm chẵn.
B. Hàm số $y = \frac{\sin x.\cos x}{\tan x + \cot x}$ là hàm lẻ.
C. Hàm số $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$ là hàm chẵn.
D. Hàm số $y = \cos^3 x + \sin^3 x$ là hàm số không chẵn không lẻ.

Câu 56. Nhận xét nào sau đây là sai?
A. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sin x - \tan x}{2\sin x + 3\cot x}$ nhận trục Oy làm trục đối xứng.
B. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{\sin x + \tan x}$ nhận góc tọa độ làm tâm đối xứng.
C. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sin^{2008n} x + 2009}{\cos x}, (n \in Z)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng.

D. Đồ thị hàm số $y=\sin^{2009}x+\cos nx,(n\in Z)$ nhật góc tọa độ làm tâm đối xứng.

Câu 57. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có trục đối xứng.

A. $y=\dfrac{\cos^{2008n}x+2003}{2012\sin x}$.

B. $y=\tan x+\cot x$.

C. $y=\dfrac{\cos x}{6x^6+4x^4+2x^2+15}$.

D. $y=\dfrac{1}{2\sin x-1}$.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{\cos x+2}+\cot^2 x}{\sin 4x}$. Hàm số trên là hàm số.

A. Hàm lẻ.

B. Hàm không tuần hoàn.

C. Hàm chẵn.

D. Hàm không chẵn không lẻ.

Câu 59. Hàm số $y=\cos 2x.\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ là

A. Hàm lẻ.

B. Hàm không tuần hoàn.

C. Hàm chẵn.

D. Hàm không chẵn không lẻ.

Câu 60. Xác định tĩnh chẳn lẻ của hàm số: $y=1+2x^2-\cos 3\text{x}$

A. Hàm lẻ.

B. Hàm không tuần hoàn.

C. Hàm chẳn.

D. Hàm không chẳn không lẻ.

DẠNG 3: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 61. Trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y=\sin x-\cos x$ là hàm số:

A. Đồng biến.

B. Nghịch biến.

C. Không đổi.

D. Vừa đồng biến vừa nghịch biến.

Câu 62. Hàm số $y=\sin 2x$ nghịch biến trên các khoảng nào sau đây $(k\in Z)$?

A. $(k2\pi;\pi+k2\pi)$.

B. $\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right)$.

C. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

D. $\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

Câu 63. Hàm số $y=\cos 2x$ nghịch biến trên khoảng $(k\in Z)$?

A. $\left(k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$.

B. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k\pi\right)$.

C. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$.

D. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

Câu 64. Xét các mệnh đề sau:

(I): $\forall x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$:Hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ giảm.