Cách 2: Sử dụng MTCT. Gán 10^3 cho A. Nhập vào màn hình $\sum_{X=2}^{A}\frac{X}{A^2+X}$, bấm phím $\boxed{=}$ Kết quả hiển thị 0.5001664168. Vậy chọn đáp án B.

Ta thấy rằng trong trường hợp không thuộc công thức, sử dụng máy tính cầm tay là một giải pháp hiệu quả. Tuy nhiên nếu rèn luyện nhiều, cọ xát nhiều dạng bài tập thì có thể sử dụng MTCT sẽ cho kết quả chậm hơn là tính toán thông thường.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1: BÀI TẬP LÝ THUYẾT

Câu 1: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 2: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 3: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 4: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = 0$ nếu $q > 1$. **B.** $\lim q^n = 0$ nếu $q < 1$.

C. $\lim q^n = 0$ nếu $|q| > 1$. **D.** $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Câu 5: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$. **C.** $\lim q^n = +\infty$ nếu $q < 1$.

B. $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| > 1$. **D.** $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$

Câu 6: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai?

A. Nếu $|q| \le 1$ thì $\lim q^n = 0$.

B. Nếu $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ thì $\lim(u_n v_n) = ab$.

C. Với k là số nguyên dương thì $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

D. Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

Câu 7: Biết $\lim u_n = 3$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 3$. **C.** $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 2$. **B.** $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = -1$. **D.** $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 1$.

Câu 8: Biết $\lim u_n = +\infty$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \frac{1}{3}$. **C.** $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = 0$. **B.** $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \frac{1}{5}$. **D.** $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = +\infty$.

DẠNG 2: BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 9: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn?

A. $(\sin n)$. **B.** $(\cos n)$. **C.** $((-1)^n)$. **D.** $(\frac{1}{2})$.

Câu 10: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn khác 0?

A. $((0,98)^n)$. **C.** $((-0,99)^n)$. **B.** $((0,99)^n)$. **D.** $((1,02)^n)$.

Câu 11: Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 1$. **B.** $\lim u_n = 0$.

C. $\lim u_n = -1$. **D.** Không đủ cơ sở để kết luận về giới hạn của dãy số (u_n).

Câu 12: Giới hạn nào dưới đây bằng $+\infty$?

A. $\lim(3n^2 - n^3)$. **C.** $\lim(3n^2 - n)$. **B.** $\lim(n^2 - 4n^3)$. **D.** $\lim(3n^3 - n^4)$.

Câu 13: $\lim \frac{(2n-1)^2(n-1)}{(n^2+1)(2n+1)}$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 14: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim \frac{n^2 + 3n^3 + 2}{n^2 + n}$. **C.** $\lim \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$. **B.** $\lim \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3}$. **D.** $\lim \frac{n^2 - n + 1}{1 - 2n}$.

Câu 15: Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại

A. $\lim(1 + \frac{n^2 \sin 3n}{n^3 + 1})$. **C.** $\lim \frac{n^2 + \sin^2 3n}{n^2 + 5}$. **B.** $\lim \frac{2^n - \cos 5n}{5^n}$. **D.** $\lim \frac{3^n + \cos n}{3^{n+1}}$.

Câu 16: Để tính $\lim(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + n})$, bạn Nam đã tiến hành các bước như sau:

Bước 1: $\lim(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}) = \lim(\mathrm{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n\sqrt{1 - \frac{1}{n}})$.

Bước 2: $\lim(\mathrm{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n\sqrt{1 - \frac{1}{n}}) = \lim n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}})$.

Bước 3: Ta có $\lim n = +\infty$; $\lim(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}) = 0$.

Bước 4: Vậy $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n})=0$.

Hỏi bạn Nam đã làm **sai** từ bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 17: $\lim(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1})$ bằng?

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 18: $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ bằng?

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 19: $\lim(1-2n)\sqrt{\dfrac{n+3}{n^3+n+1}}$ bằng?

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 20: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là hữu hạn?

A. $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n$. **C.** $\lim(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1})$.

B. $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$. **D.** $\lim(\sqrt{n^2+n+1}-n)$.

Câu 21: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là **không** hữu hạn?

A. $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}}$. **C.** $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}$.

B. $\lim(\sqrt[3]{1+n^3}-n)$. **D.** $\lim(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n)$.

Câu 22: Biết $\lim\dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}=\dfrac{6-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{m}{n}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $m.n=10$. **C.** $m.n=15$. **B.** $m.n=14$. **D.** $m.n=21$.

Câu 23: Tìm $\lim\dfrac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$:

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

DẠNG 2: TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Câu 24: Cấp số nhân lùi vô hạn $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},...,(-\dfrac{1}{2})^{n-1},...$ có tổng là một phân số tối giản $\dfrac{m}{n}$. Tính $m+2n$.

A. $m+2n=8$. **C.** $m+2n=7$. **B.** $m+2n=4$. **D.** $m+2n=5$.

Câu 25: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,27323232...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{m}{n}$ (m, n là các số nguyên dương). Hỏi m gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 542. **B.** 543. **C.** 544. **D.** 545.

Câu 26: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 2, tổng của 3 số hạn đầu tiên của nó là $\frac{9}{4}$. Số hạn đầu của cấp số nhân đó là?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 27: Phương trình $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+...=\frac{5}{4}$, trong đó $|x|<1$, có tập nghiệm là:

A. $S=\left\{\frac{-7\pm\sqrt{97}}{24}\right\}$. **C.** $S=\left\{\frac{-3\pm\sqrt{41}}{16}\right\}$. **B.** $S=\left\{\frac{-7+\sqrt{97}}{24}\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{41}}{16}\right\}$.

Câu 28: Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh a. Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$; dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,...

A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $2a^2\sqrt{3}$.

DẠNG 4: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CHO BỞI HỆ THỨC TRUY HỒI

Câu 29: Cho số thực a và dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1=a$ và $u_{n+1}=1+\frac{u_n}{2}$ với mọi $n\ge1$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 30: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3, 2u_{n+1}=u_n+1$ với mọi $n\ge1$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số (u_n). Tìm $\lim S_n$.

A. $\lim S_n=+\infty$. **C.** $\lim S_n=1$. **B.** $\lim S_n=-\infty$. **D.** $\lim S_n=-1$.

Câu 31: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1, u_2=2, u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ với mọi $n\ge1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 32: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\frac{1}{4}, u_{n+1}=u_n^2+\frac{u_n}{2}$ với mọi $n\ge1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = \frac{1}{4}$. **C.** $\lim u_n = \frac{1}{2}$. **B.** $\lim u_n = 0$. **D.** $\lim u_n = +\infty$.

Câu 33: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ bằng.

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

DẠNG 5: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 34: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$, trong đó a và b là các số thực cho trước, $a \leq b$. Tìm giới hạn của (u_n).

A. $\lim u_n = a$. **C.** $\lim u_n = \frac{a+2b}{3}$. **B.** $\lim u_n = b$. **D.** $\lim u_n = \frac{2a+b}{3}$.

Câu 35: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-m}{5n+2}$, trong đó m là tham số. Để dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn thì:

A. m là số thực bất kỳ.
B. m nhận giá trị duy nhất bằng 3.
C. m nhận giá trị duy nhất bằng 5.
D. Không tồn tại số m.

Câu 36: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2+n+2}{an^2+5}$, trong đó a là tham số. Để (u_n) có giới hạn bằng 2 thì giá trị của tham số a là?

A. -4. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a để dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2n^2+n} - a\sqrt{2n^2-n}$ có giới hạn hữu hạn.

A. $a \in \mathbb{R}$. **C.** $a \in (1; +\infty)$. **B.** $a \in (-\infty; 1)$. **D.** $a = 1$.

Câu 38: Tìm hệ thức liên hệ giữa các số thực dương a và b để: $\lim(\sqrt{n^2+an+5} - \sqrt{n^2+bn+3}) = 2$.

A. $a+b=2$. **B.** $a-b=2$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a-b=4$.

Câu 39: Tìm số thực a để $\lim \frac{\sqrt{an^2+1} - \sqrt{4n-2}}{5n+2} = 2$.

A. $a=10$. **B.** $a=100$. **C.** $a=14$. **D.** $a=144$.

Câu 40: Tìm số thực a để $\lim(2n + a - \sqrt[3]{8n^3+5}) = 6$.

A. $a=2$. **B.** $a=4$. **C.** $a=6$. **D.** $a=8$.

Câu 41: Tìm các số thực a và b sao cho $\lim(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b) = 0$.

A. $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$.

DẠNG 6: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC

Câu 42: $\lim \dfrac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 43: $\lim \dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+5+5^2+...+5^n}$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 44: Tìm $\lim\left[(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})...(1-\dfrac{1}{n^2})\right]$ ta được:

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 45: $\lim \dfrac{n!}{(1+1^2).(1+2^2)...(1+n^2)}$ bằng:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 46: Cho dãy số (u_n). Biết $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{3n^2+9n}{2}$ với mọi $n \ge 1$. Tìm $\dfrac{1}{nu_n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 47: $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}}$ bằng:

A. 0. **B.** $\dfrac{17}{100}$. **C.** $\dfrac{17}{200}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Trong đáp án cho các bài tập dưới đây, có nhiều bài tôi chỉ nêu việc áp dụng các kết quả đã trình bày ở phần lí thuyết và ví dụ. Lời giải đầy đủ hoặc việc sử dụng MTCT xin dành lại cho độc giả.

DẠNG 1. Bài tập lí thuyết.

Câu 1: **Đáp án A.**
Xem lại định nghĩa dãy số có giới hạn 0.

Câu 2: **Đáp án B.**
Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn $+\infty$.

Câu 3: **Đáp án C.**
Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn hữu hạn.

Câu 4: **Đáp án D.**

Xem lại định lí 4.2.

Câu 5: **Đáp án A.**

Xem lại kết quả về dãy số có giới hạn $+\infty$.

Câu 6: **Đáp án A.**

Nếu $q=1$ thì $\lim q^n = \lim 1 = 1 \neq 0$.

Câu 7: **Đáp án C.**

Ta có : $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{3\lim u_n - 1}{\lim u_n + 1} = \dfrac{3.3-1}{3+1} = \dfrac{8}{4} = 2$.

Câu 8: **Đáp án C.**

Ta có : $\dfrac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \dfrac{\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_n^2}}{3 + \dfrac{5}{u_n^2}}$. Vì $\lim u_n = +\infty$ nên $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$, $\lim \dfrac{1}{u_n^2} = 0$.

Vậy $\lim \dfrac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \dfrac{0+0}{3+0} = \dfrac{0}{3} = 0$.

DẠNG 2. Bài tập tính giới hạn dãy số cho bởi công thức.

Câu 9: **Đáp án D.**

Ta có : $\lim s_n = \lim \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Bổ sung :

a) Ta chứng minh dãy số $(\sin n)$ không có giới hạn. Thật vậy, vì $|\sin n| \le 1$ nên nếu dãy số $(\sin n)$ có giới hạn thì giới hạn đó hữu hạn.

Giả sử $\lim \sin n = L$. Suy ra $\lim \sin(n+2) = L$.

Do đó : $0 = \lim\left[\sin(n+2) - \sin n\right] = 2\sin 1.\lim \cos(n+1)$

$\Rightarrow \lim \cos(n+1) = 0 \Rightarrow \lim \cos n = 0 \Rightarrow \lim \cos(n+2) = 0$

$\Rightarrow 0 = \lim\left[\cos(n+2) - \cos n\right] = -2\sin 1.\sin(n+1)$

$\Rightarrow \sin(n+1) = 0$. Vậy ta có : $1 = \lim\left(\sin^2(n+1) + \cos^2(n+1)\right) = 0 + 0 = 0$ (vô lý). Suy ra đpcm.

b) Chứng minh tương tự, ta có dãy số $(\cos n)$ không có giới hạn.

c) Ta chứng minh dãy số $\left((-1)^n\right)$ không có giới hạn hữu hạn.

Thật vậy, trên trục số, các số hạng của dãy số đó được biểu diễn bởi hai điểm -1 và 1. Khi n tăng lên, các điểm

Câu 10: **Đáp án D**

Vì $1,02>1$ nên $\lim(1,02)^n=+\infty$. (Các dãy số còn lại đều có $|q|<1$ nên đều có giới hạn bằng 0).

Câu 11: **Đáp án A.**

Vì $\lim\frac{1}{n^3}=0$ nên $\lim|u_n-1|=0$. Suy ra : $\lim u_n=1$.

Câu 12: **Đáp án C.**

Vì $3n^2-n$ có $a_2=3>0$ nên $\lim\left(3n^2-n\right)=+\infty$.

(Số hạng tổng quát của các dãy còn lại có hệ số của lũy thừa bậc cao nhất là số âm nên giới hạn của các dãy đó đều bằng $-\infty$.)

Câu 13: **Đáp án B.**

Bậc của tử và mẫu thức đều bằng 3 nên dãy có giới hạn hữu hạn. Hệ số của n^3 trên tử bằng $2^2.1=4$, hệ số của n^3 dưới mẫu bằng $1.2=2$ nên giới hạn là $\frac{4}{2}=2$.

Câu 14: **Đáp án A.**

Phân thức $\frac{n^2+3n^3+2}{n^2+n}$ có bậc của tử thức cao hơn bậc của mẫu thức, đồng thời hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của tử thức và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của mẫu thức đều dương nên suy ra giới hạn của dãy số tương ứng bằng $+\infty$.

(Phân thức $\frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$ có bậc tử bằng bậc mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng $\frac{-1}{2}$. Phân thức $\frac{2n^2-3n}{n^3+3n}$ có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng 0. Phân thức $\frac{n^2-n+1}{1-2n}$ có bậc tử lớn hơn bậc mẫu nhưng hệ số của lũy thừa bậc cao nhất trên tử và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất dưới mẫu trái dấu nhau nên giới hạn dãy số tương ứng bằng $-\infty$.)

Câu 15: **Đáp án D.**

+ Nhận xét : $\left|\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}\right|\le\frac{n^2}{n^3+1}$ mà $\lim\frac{n^2}{n^3+1}=0$ nên $\lim\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}=0$.

Do đó : $\lim\left(1+\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}\right)=1$.

+ $\left|\frac{\cos 5n}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$ mà $\lim\frac{1}{2^n}=0$ nên $\lim\frac{\cos 5n}{2^n}=0$.

Do đó : $\lim\frac{2^n-\cos 5n}{2^n}=\lim\left(1-\frac{\cos 5n}{2^n}\right)=1$.

$+\left|\dfrac{\sin^2 3n}{n^2+5}\right| \le \dfrac{1}{n^2+5}$ mà $\lim \dfrac{1}{n^2+5}=0$ nên $\lim \dfrac{\sin^2 3n}{n^2+5}=0$.

Do đó : $\lim \dfrac{n^2+\sin^2 3n}{n^2+5}=\lim\left(\dfrac{n^2}{n^2+5}+\dfrac{\sin^2 3n}{n^2+5}\right)=1$

Vậy ba giới hạn đầu đều có kết quả bằng 1 nên đáp án cần chọn là đáp án D.

($\left|\dfrac{\cos n}{3^{n+1}}\right| \le \dfrac{1}{3^{n+1}}$ mà $\lim \dfrac{1}{3^{n+1}}=0$ nên $\lim \dfrac{\cos n}{3^{n+1}}=0$.

Do đó : $\lim \dfrac{3^n+\cos n}{3^{n+1}}=\lim\left(\dfrac{3^n}{3^{n+1}}+\dfrac{\cos n}{3^{n+1}}\right)=\dfrac{1}{3}$.)

Câu 16: **Đáp án D.**

Vì $\lim n=+\infty$, $\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)=0$ nên không thể áp dụng quy tắc 2. Do đó Nam đã sai ở bước 4. (Quy tắc 2 áp dụng khi $\lim u_n=\pm\infty$ và $\lim v_n=L\ne 0$.)

Câu 17: **Đáp án D.**

Vì hai căn thức $\sqrt{3n-1}$ và $\sqrt{2n-1}$ đều chứa nhị thức dưới dấu căn mà hệ số của n lại khác nhau nên giới hạn cần tìm bằng $+\infty$ (do $3>2$).

Thật vậy, ta có : $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)=\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{3-\dfrac{1}{n}}-\sqrt{2-\dfrac{1}{n}}\right)$.

Vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{3-\dfrac{1}{n}}-\sqrt{2-\dfrac{1}{n}}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ nên $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)=+\infty$.

Hoặc độc giả có thể sử dụng MTVT để kiểm tra kết quả trên.

Câu 18: **Đáp án B.**

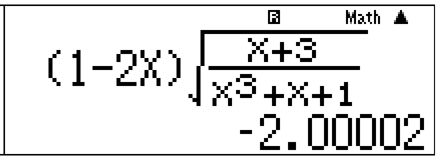
Ta thấy tử thức có bậc bằng 1, mẫu thức có bậc cũng bằng 1. Mà hệ số của n trên tử thức bằng 1, hệ số của n dưới mẫu thức bằng 3 nên giới hạn cần tìm bằng $\dfrac{1}{3}$. Thật vậy ta có :

$\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}=\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{3+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{1}{3}$ hoặc độc giả có thể sử dụng MTCT để kiểm tra kết quả trên.

Câu 19: **Đáp án B.**

Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình như sau :

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được

(1p2Q))saQ)+3RQ)^3$+Q)+1r10^5=	

Do đó đáp án đúng là đáp án B.
Hoặc ta làm như sau :
$\lim(1-2n)\sqrt{\frac{n+3}{n^3+n+1}}=\lim\left(\frac{1}{n}-2\right)\sqrt{\frac{n^3+3n^2}{n^3+n+1}}=(-2).1=-2$.

Câu 20: **Đáp án D.**
Nếu sử dụng MTCT, ta sẽ phải tính toán nhiều giới hạn. Tuy nhiên, nếu có kinh nghiệm, ta sẽ thấy ngay đáp án D. Thật vậy, theo kết quả đã biết ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$ là hữu hạn. Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.

Lời giải chính xác : $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$.

Việc tìm các giới hạn trong A, B, C xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

Câu 21: **Đáp án C.**
Lập luận như các bài toán trên, ta thấy ba giới hạn trong A, B, D đều hữu hạn. Vậy đáp án là C.

Lưu ý : $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)$.

Ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.
Lời giải chính xác :

Ta có : $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1}$. Mà : $\lim\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}=1$; $\lim\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1=0$

và $\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1>0\ \forall n$ nên $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}=+\infty$.

Việc tìm các giới hạn trong A, B, D xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

Câu 22: **Đáp án B.**
Với các bài toán dạng này, việc sử dụng MTCT là khá mất thời gian. Ta thấy tử thức và mẫu thức đều có bậc bằng 1. Mặt khác cả tử thức và mẫu thức đều có giới

hạn vô cực. Do đó ta chia tử và mẫu cho n để được : $\lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}$

$$= \lim \frac{\sqrt{1-\frac{4}{n}}-\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-1} = \frac{-1}{\sqrt{3}-1}.$$

Ta có : $\frac{-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \frac{6-\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{2}$. Vậy $m=7, n=2$ nên $m.n=14$.

Câu 23: Đáp án D.

Ta có : $\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n\left(3^{n+1}-5\right)} = \frac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}$. Từ đó dễ thấy $\lim \frac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n} = \frac{1}{3}$.

Thật vậy, $\lim \frac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n} = \lim \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{3-5.\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$.

DẠNG 3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.

Câu 24: Đáp án A.

Cấp số nhân lùi vô hạn đã cho có : $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$. Do đó tổng của cấp số nhân đó là : $S = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$. Suy ra : $m=2, n=3$. Vậy $m+2n = 2+2.3 = 8$.

Câu 25: Đáp án A

Ta có $0,27323232... = \frac{27}{100} + \frac{32}{9900} = \frac{541}{1980}$.

Hoặc sử dụng MTCT theo hai cách đã trình bày ở phần ví dụ ta được kết quả như sau :

Qui trình bấm máy	Kết quả
0.27323232323232=	0.27323232323232 $\frac{541}{1980}$
0.27Qs32=	0.27(32) $\frac{541}{1980}$

Vậy $m=541$, do đó chọn đáp án A.

Câu 26: Đáp án C.

Ta có : $\frac{u_1}{1-q}=2\Rightarrow u_1=2(1-q)$ (1) mà : $u_1+u_2+u_3=\frac{9}{4}\Rightarrow u_1.\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{9}{4}$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được : $2(1-q).\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{9}{4}\Rightarrow 1-q^3=\frac{9}{8}\Rightarrow q^3=-\frac{1}{8}\Rightarrow q=-\frac{1}{2}$.

Vậy $u_1=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3$.

Câu 27: Đáp án A.

Ta có : $2x+1+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 3x+1-x+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}$. Vì $|x|<1$ nên $1-x+x^2-x^3+...$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=1$ và $q=-x$. Do đó ta có :

$3x+1-x+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 3x+\frac{1}{1+x}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 12x^2+7x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{24}$ (t/m $|x|<1$).

Câu 28: Đáp án C.

Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích của tam giác đều cạnh a là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng $a\Rightarrow$ tam giác $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$ tam giác $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\Rightarrow\ldots\Rightarrow$ tam giác $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$.

Và $S_{A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $S_{A_2B_2C_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{3}{4}$, $S_{A_3B_3C_3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{3}{4}\right)^2$, …, $S_{A_nB_nC_n}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Như vậy (S_n) là một CSN lùi vô hạn với $q=\frac{3}{4}$. Vậy $S_1+S_2+...=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{3}a^2$.

DẠNG 4. Tìm giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.

Câu 29: Đáp án D.

Ta thầy các đáp án chỉ là các giới hạn hữu hạn nên chứng tỏ dãy đã cho có giới hạn hữu hạn. Gọi giới hạn đó là L. Ta có : $L=1+\frac{L}{2}\Rightarrow L=2$. Hoặc theo kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, giới hạn của dãy đã cho bằng $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\left(r=\frac{1}{2},s=1\right)$.

Câu 30: **Đáp án B.**

Cách 1 : Ta có $2u_{n+1}=u_n+1\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}$. Đặt $v_n=u_n-1$.

Khi đó : $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$. Vậy (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}$. Gọi T_n là tổng n số hạng đầu tiên của (v_n).

Ta có : $T_n=v_1.\frac{1-q^n}{1-q}=v_1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2v_1.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Suy ra : $S_n=T_n+n=2v_1.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+n$.

Vậy $\lim S_n=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình : $A=A+X:Y=\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}:X=Y$.

Bấm r, máy hỏi A? nhập 0, máy hỏi X? nhập 3, máy hỏi Y? Nhập 0, bấm = liên tiếp ta thấy giá trị của A ngày một tăng cao. Vậy chọn đáp án B.

Câu 31: **Đáp án C.**

Sử dụng MTCT.

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QcQraQz+QxR2$QyQzQrQxQyQxQrQcr1=2========= ======================================= ======================================= ======================================= ====	Math ▲Disp $C=\frac{A+B}{2}$ 1.666666667

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,(6)$ ta được $1,66666667=\frac{5}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{5}{3}$. Do đó chọn đáp án C.

Bổ sung : Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2}=\frac{u_n+u_{n+1}}{2}$ với $\forall n\ge 1$, trong đó a,b là các số thực cho trước, $a\le b$. Người ta chứng minh được rằng $\lim u_n=\frac{a+2b}{3}$.

Câu 32: **Đáp án B.**

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn L. Khi đó ta có : $L = L^2 + \frac{L}{2} \Rightarrow 2L^2 = L \Rightarrow \left[\begin{array}{l} L = 0 \\ L = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Tuy nhiên đến đây ta không còn căn cứ để kết luận $L = 0$ hay $L = \frac{1}{2}$.

Ta sử dụng MTCT tương tự như bài tập trên thì thấy rằng giới hạn của dãy số là 0. Vậy chọn đáp án B.

$Y = X^2 + \frac{X}{2}$ $1,706192802.10^{-9}$

Câu 33: **Đáp án C.**

Cách 1: Ta có

$u_1 = 1^2$; $u_2 = 1 + 2.1 + 1 = 2^2$; $u_3 = 2^2 + 2.2 + 1 = 9 = 3^2$;...

Dự đoán $u_n = n^2$. Khi đó $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = (n+1)^2$. Vậy $u_n = n^2\ \forall n \ge 1$.

Suy ra $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. Do đó chọn đáp án C.

Cách 2 : Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình.

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QnQrQ)+2Qz+1QyaQnRQ)$QyQ)QrQnQyQzQrQz+1r1=1= ====================	Math ▲Disp $\frac{Y}{X}$ $\frac{25}{16}$

Bấm r, máy hỏi X? nhập 1, máy hỏi A? nhập bấm = liên tiếp, theo dõi giá trị của $\frac{Y}{X}$, ta thấy giá trị đó dần về 1. Vậy chọn đáp án C.

Nhận xét : Ở bài này sẽ phải bấm phím = liên tiếp khá nhiều lần, do khi n chưa đủ lớn thì chênh lệch giữa $(n+1)^2$ và n^2 là khá xa nên giá trị của $\frac{(n+1)^2}{n^2}$ khá xa so với 1.

DẠNG 5. Tìm giới hạn của dãy số có chứa tham số.

Câu 34: **Đáp án C.**

Đây là một bài toán chứa tham số.

Vì là bài toán trắc nghiệm nên có một cách là cho a và b các giá trị cụ thể, rồi sử dụng MTCT để tìm giới hạn, từ đó tìm được đáp án đúng.

Chẳng hạn cho $a=2,b=3$. Khi đó $\frac{a+2b}{3}=\frac{8}{3}$, $\frac{2a+b}{3}=7$ và $a,b,\frac{a+2b}{3},\frac{2a+b}{3}$ đôi một khác nhau.

Nhập vào màn hình :

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QcQraQz+QxR2$QyQzQrQxQyQxQrQcr2=3==	Math ▲Disp $C=\frac{A+B}{2}$ 2.666666666

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,(6)$, ta được $2,(6)=\frac{8}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{8}{3}$. Do đó chọn đáp án C.

Bổ sung : Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ $\forall n\geq 1$, trong đó a,b là các số thực cho trước, $a\leq b$.

a) Chứng minh dãy (u_{2n}) là dãy giảm, còn dãy (u_{2n+1}) là dãy tăng.

b) Chứng minh rằng $|x_{n+2}-x_{n+1}|=\frac{|x_2-x_1|}{2^n}$ $\forall n\geq 1$.

c) Chứng minh rằng $2x_{n+2}+x_{n+1}=2x_2+x_1$ $\forall n\geq 1$.

d) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn và giới hạn đó là $\frac{a+2b}{3}$.

Việc chứng minh bài toán trên xin dành cho độc giả.

Câu 35: Đáp án A.

Dễ thấy $\lim u_n=\lim\frac{3n-m}{5n+1}=\frac{3}{5}$ với mọi m.

Câu 36: Đáp án B.

Dễ thấy với $a=2$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{2n^2+5}=2$.

Thật vậy :

Nếu $a=0$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{5}=+\infty$.

Nếu $a\neq 0$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\frac{4}{a}$.

Do đó để $\lim u_n=2$ thì $\frac{4}{a}=2\Leftrightarrow a=2$.

Câu 37: **Đáp án D.**

Với kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy để (u_n) có giới hạn hữu hạn thì $a=1$.

Câu 38: **Đáp án D.**

Từ kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta có :

$$\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}=\frac{(a-b)n+2}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+bn+3}}=\frac{a-b+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{3}{n^2}}}.$$

Suy ra $\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right)=\frac{a-b}{2}$. Do đó để

$\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right)=2$

$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2}=2 \Leftrightarrow a-b=4$.

Câu 39: **Đáp án B.**

Ta có : $\lim\frac{\sqrt{an^2+1}-\sqrt{4n-1}}{5n+2}=\frac{\sqrt{a}}{5}$. Do đó ta phải có $\sqrt{a}=10 \Leftrightarrow a=100$.

Câu 40: **Đáp án C.**

Ta có $\lim\left(2n+a-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)=6 \Leftrightarrow 6-a=\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)$ mà $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)=0$. Do đó $6-a=0 \Leftrightarrow a=6$.

Câu 41: **Đáp án A.**

Ta có $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right)=0 \Leftrightarrow b=\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an\right)$. Để $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an\right)$ hữu hạn thì $a>0$ (xem lại phần ví dụ).

phần Ví dụ). Ta có $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)=0$. Vậy $b=0$. Do đó đáp án là A.

DẠNG 1. TÌM SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC.

Câu 42: **Đáp án A.**

Lời giải

Theo kết quả đã trình bày trong phần Ví dụ thì $\lim\frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}=\frac{1}{2}$ do tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng 1, mẫu thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng 2.

Tuy nhiên, ta có thể giải nhanh chóng như sau:

$$\lim\frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}=\lim\frac{1+2+3+...+n}{2(1+2+3+...+n)}=\frac{1}{2}.$$

Câu 43: Đáp án A.

Lời giải

Ta thấy tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng 2, mẫu thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng 5. Mà $2<5$ nên theo kết quả trình bày trong phần Ví dụ, giới hạn cần tìm là 0.

Câu 44: Đáp án B.

Lời giải

Ta có:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times...\times\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$=\frac{1.3}{2^2}\times\frac{2.4}{3^2}\times\frac{3.5}{4^2}\times...\times\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}.$$

Vậy $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$

Câu 45: Đáp án A.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)}\le\frac{n!}{1^2\times2^2\times...\times n^2}=\frac{n!}{(1\times2\times...\times n)^2}=\frac{n!}{(n!)^2}=\frac{1}{n!}.$$

Mà $\lim\frac{1}{n!}=0$ nên suy ra: $\lim\frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)}=0.$

Câu 46: Đáp án B.

Lời giải

Ta có:

$$u_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{3(n+1)^2+9(n+1)}{2}-\frac{3n^2+9n}{2}=3n+6=3(n+1)+3.$$

Suy ra $u_n=3n+3.$

Vậy $\lim\frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\lim\frac{3n^2+9n}{2n(3n+3)}=\frac{3}{2.3}=\frac{1}{2}.$

Câu 47: Đáp án C.

Lời giải

Ta có: $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}} = \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i-1}}{5^{k+2}}$.

Do đó nên rất khó để sử dụng MTCT đối với bài toán này. Ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i-1}}{5^{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}-1}{2.5^{k+2}} = \frac{3}{50}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k - \frac{1}{50}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{3}{50}.\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} - \frac{1}{50}\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{17}{200}.$$

Vậy chọn đáp án C.

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm

1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm

Định nghĩa 1:

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\backslash\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n \in (a;b)\backslash\{x_0\}, x_n \to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Nhận xét:

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.
- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại x_0.

Định nghĩa 2 (Giới hạn một bên):

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_0<x_n<b, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $a<x_n<x_0, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

STUDY TIP

$x\to x_0^+$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

$x\to x_0^-$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

Định lí 1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L.$

2. Giới hạn vô cực tại một điểm

Định nghĩa 3

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\backslash\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\backslash\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $f(x_n)=+\infty$.

Lưu ý:

Các định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

3. Lưu ý:

a) $f(x)$ không nhất thiết phải xác định tại điểm x_0.

b) Ta chỉ xét giới hạn của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;b)$ (dù nhỏ) chứa x_0 mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\backslash\{x_0\}$.

Chẳng hạn, hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ *có tập xác định là* $D = [0;+\infty)$. *Do đó ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm* $x_0 = 0$, *do không có một khoảng* $(a;b)$ *nào chứa điểm* 0 *mà* $f(x)$ *xác định trên đó cả. Tương tự vậy ta cũng không xét giới hạn của* $f(x)$ *tại mọi điểm* $x_0 < 0$.

c) Ta chỉ xét giới hạn bên phải của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(x_0;b)$ (khoảng nằm bên phải x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Tương tự, ta chỉ xét giới hạn bên trái của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;x_0)$ (khoảng nằm bên trái x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Chẳng hạn, với hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$, *tại điểm* $x_0 = 1$, *ta chỉ xét giới hạn bên phải. Với hàm số* $g(x) = \sqrt{1-x}$, *tại điểm* $x_0 = 1$, *ta chỉ xét giới hạn bên trái.*

d) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x^-_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x^+_o} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x^-_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x^+_o} f(x) = -\infty$

II. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại vô cực

1. Giới hạn hữu hạn tại vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ ta đều có $\lim f(x) = L$.

LƯU Ý: Định nghĩa $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

2. Giới hạn vô cực tại vô cực

Định nghĩa 5

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ ta đều có $\lim f(x) = +\infty$.

LƯU Ý: Các định nghĩa: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

III. Một số giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x \to x_o} x = x_o$.

b) $\lim\limits_{x \to x_o} c = c$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$ (c là hằng số)

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ (c là hằng số, k nguyên dương).

d) $\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương; $\lim_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số nguyên lẻ;
$\lim_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số nguyên chẵn.

Nhận xét: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[-f(x)\right] = -\infty$.

IV. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 2

Giả sử $\lim_{x\to x_o} f(x) = L$ và $\lim_{x\to x_o} g(x) = M$. Khi đó

a) $\lim_{x\to x_o}\left[f(x)\pm g(x)\right] = L\pm M$.

b) $\lim_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right] = LM$; $\lim_{x\to x_o}\left[cf(x)\right] = cL$ với c là một là một hằng số.

c) $\lim_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}(M\neq 0)$.

STUDY TIP: Giới hạn hữu hạn, giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

Định lí 3

Giả sử $\lim_{x\to x_o} f(x) = L$. Khi đó

a) $\lim_{x\to x_o}\left|f(x)\right| = \left|L\right|$.

b) $\lim_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$.

c) Nếu $f(x)\geq 0$ với mọi $J\setminus\left\{x_o\right\}$, trong đó J là khoảng nào đó chứa x_o, thì $L\geq 0$ và $\lim_{x\to x_o}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

LƯU Ý: Định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay $x\to x_o$ bởi $x\to x^-_o, x\to x^+_o$.

V. Quy tắc về giới hạn vô cực

Các định lí và quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp:
$x\to x_o, x\to x^-_o, x\to x^+_o, x\to+\infty$ và $x\to-\infty$.

Tuyên nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x\to x_o$.

Quy tắc 1 (Quy tắc tìm giới hạn của tích).

$L = \lim_{x\to x_o} f(x)$	$\lim_{x\to x_o} g(x)$	$\lim_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

STUDY TIP: Giới hạn của tích hai hàm số

- Tích của một hàm số có giới hạn hữu hạn khác 0 với một hàm số có giới hạn vô cực là một hàm số có giới hạn vô cực.
- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép nhân hai số.

Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giới hạn của thương)

$L = \lim\limits_{x\to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_o$).

STUDY TIP: Giới hạn của thương hai hàm số. Tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0:
- Mẫu thức càng tang (dần đến vô cực) thì phân thức càng nhỏ (dần đến 0).
- Mẫu thức càng nhỏ (dần đến 0) thì phân thức có giá trị tuyệt đối càng lớn (dần đến vô cực).
- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép chia hai số.

VI. Các dạng vô định: Gồm $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0.\infty$ **và** $\infty - \infty$.

B. Các dạng toán về giới hạn hàm số

***Dạng 1:* Tìm giới hạn xác định bằng cách sử dụng trực tiếp các định nghĩa, định lí và quy tắc**

Phương pháp:

- Xác định đúng dạng bài toán: giới hạn tại một điểm hay giới hạn tại vô cực? giới hạn xác định hay vô định?
- với giới hạn hàm số tại một điểm ta cần lưu ý: Cho $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0. Khi đó, $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$.
- Với giới hạn hàm số tại vô cực ta "xử lí" tương tự như giới hạn dãy số.
- Với giới hạn xác định, ta áp dụng trực tiếp định nghĩa giới hạn hàm số, các định lí về giới hạn hữu hạn và các quy tắc về giới hạn vô cực.

STUDY TIP: Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y = f(x)$ **không có giới hạn khi** $x \to x_0$

- chọn hai dãy số khác nhau (a_n) và (b_n) thỏa mãn a_n và b_n thuộc tập xác định của hàm số $y = f(x)$ và khác x_0; $a_n \to x_0; b_n \to x_0$.
- Chứng minh $\lim f(a_n) \neq \lim f(b_n)$ hoặc chứng minh một trong hai giới hạn này không tồn tại.
- Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ không tồn tại. TH $x \to x_0^{\pm}$ hoặc $x \to \pm\infty$ chứng minh tương tự.

Ví dụ 1: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x = 1$ **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x = -1$ **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x = 0$ **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ không tồn tại.

Đáp án D

Lời giải

Xét dãy số (x_n) với $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

Ta có $x_n \to +\infty$ và $\lim \sin x_n = \lim \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$. (1)

Lại xét dãy số (y_n) với $y_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

Ta có $y_n \to +\infty$ và $\lim \sin y_n = \lim \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

STUDY TIP: Giới hạn tại một điểm

Nếu $f(x)$ xác định tại x_0 và tồn tại một khoảng $(a;b)$ thuộc tập xác định của $f(x)$ chứa x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$.

- Việc sử dụng hay không sử dụng MTCT để tính $f(x_o)$ tùy thuộc vào mức độ phức tạp của $f(x_o)$ và khả năng tính toán của độc giả.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $(0;+\infty)$.

Cách 1(sử dụng định nghĩa):

Giải sử (x_n) là một dãy số bất kỳ, thỏa mãn $x_n > 0, x_n \neq 3$ và $x_n \to 3$ khi $n \to +\infty$. Ta có

$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2+1}{2\sqrt{x_n}} = \frac{3^2+1}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ (áp dụng quy tắc về giới hạn hữu hạn của dãy số). Do đó $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2(sử dụng định lí về giới hạn hữu hạn):

Theo định lí 1 ta có:

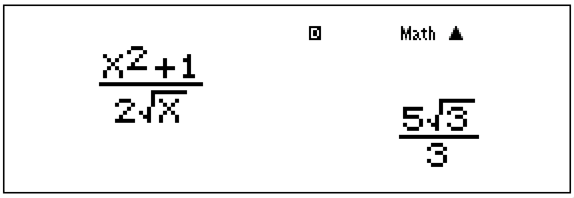
$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to3}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to3}(2\sqrt{x})} = \frac{\lim\limits_{x\to3} x^2 + \lim\limits_{x\to3} 1}{\lim\limits_{x\to3} 2.\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to3} x.\lim\limits_{x\to3} x + \lim\limits_{x\to3} 1}{\lim\limits_{x\to2} 2.\sqrt{\lim\limits_{x\to3} x}} = \frac{3.3+1}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Tuy nhiên trong thực hành, vì là câu hỏi trắc nghiệm nên ta làm như sau.

Cách 3: Vì $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định trên $(0;+\infty)$ chứa điểm $x_0 = 3$ nên $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = \dfrac{10}{2\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Do đó sử dụng MTCT ta làm như cách 4 dưới đây.

Cách 4: Nhập biểu thức của vào màn hình. Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$, máy hỏi X ? nhập 3 $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình:



Do đó chọn đáp án C.

Ví dụ 3: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây ?

A. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2} = 1$.

B. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2} = 5$.

C. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2} = -1$.

D. Hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ không có giới hạn khi $x \to 3$.

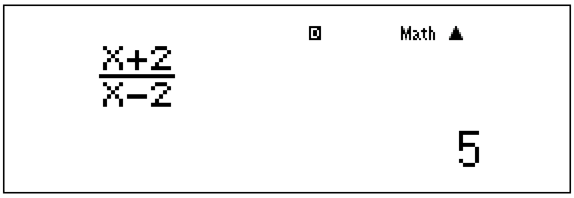
Đáp án B

Lời giải

Hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ xác định trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. Ta có $3 \in (2;+\infty)$.

Cách 1 : $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = \dfrac{3+2}{3-2} = 5$.

Cách 2 : Nhập biểu thức của hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ và màn hình MTCT. Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$, máy hỏi X? nhập 3 $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình:



Vậy $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2} = 5$.

Ví dụ 4: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-2x^3 + 5x\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.