

- A. $p = 9$. B. $p = 2$. C. $p = 6$. D. $p = 3$.

Câu 3. Tính tổng S của 2018 số hạng đầu tiên của dãy (a_n)

- A. $S = 2016$. B. $S = 2019$. C. $S = 2017$. D. $S = 2018$.

Câu 4. Tính tổng bình thường của 2018 số hạng đầu tiên của dãy (a_n)

- A. $S = 3360$. B. $S = 3361$. C. $S = 3364$. D. $S = 3365$.

Ví dụ 7. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n) .

- A. $a_n = \sqrt{2}$. B. $a_n = \sqrt{2n-1}$. C. $a_n = \sqrt{3n-2}$. D. $a_n = \sqrt{n}$.

Đáp án D

Lời giải

Ta có $a_2 = \sqrt{2}; a_3 = \sqrt{3}; a_4 = \sqrt{4}; a_5 = \sqrt{5}$.

Từ 5 số hạng đầu của dãy ta dự đoán được $a_n = \sqrt{n}$. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được $a_n = \sqrt{n}$. Vậy phương án đúng là D.

Nhận xét: Với kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm dưới đây:

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 1. Rút gọn biểu thức $s_n = \frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + a_n}, n \geq 2$ ta được

- A. $S_n = \sqrt{n} + 1$. B. $S_n = \sqrt{n} - 1$. C. $S_n = \frac{n}{\sqrt{n} + 1}$. D. $S_n = \frac{n}{\sqrt{n} - 1}$.

Câu 2. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

- A. Dãy số (a_n) là dãy số giảm. B. Dãy số (a_n) không là dãy số giảm.
C. Dãy số (a_n) là dãy số tăng. D. Dãy số (a_n) không là dãy số tăng.

Câu 3. Rút gọn biểu thức $S_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$

- A. $S_n = n(n-1)$. B. $S_n = n(n+1)$. C. $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. D. $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

STUDY TIP

Ngoài cách làm bên, ta có thể kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua việc xác định một vài số hạng đầu của dãy

+ Với $a_1 = 1$ thì loại ngay được phương án A.

+ Ta có $a_2 = \sqrt{2}$ thì loại ngay được các phương án B và C.

Ví dụ 8. Cho dãy số (a_n) có tổng của n số hạng đầu tiên bằng $S_n = n^3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. (a_n) là dãy số tăng và $a_n = 3n^2 - 3n + 1$.

B. (a_n) là dãy số giảm và $a_n = 3n^2 + 3n + 1$.

C. (a_n) là dãy số tăng và $a_n = 3n^2 + 3n + 1$.

D. (a_n) là dãy số tăng và $a_n = 3n^2 - 3n + 1$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n = n^3$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = S_{n-1} = (n-1)^3$.

Suy ra $a_n = S_n - S_{n-1} = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$.

Ta có $a_n = 3n^2 - 3n + 1$ và $a_{n-1} = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 = 3n^2 - 9n + 7$.

Do đó $a_n - a_{n-1} = 6n - 1 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $n-1=0$ hay $n=1$. suy ra dãy số (a_n) là dãy số tăng.

Vậy phương án đúng là A.

Ví dụ 9. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng thứ 15 của dãy số (a_n) .

A. $a_{15} = 28697809$. **B.** $a_{15} = 28697814$.

C. $a_{15} = 9565933$. **D.** $a_{15} = 86093437$.

Đáp án A

Lời giải

Chúng ta đi tìm công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số (a_n) .

Đặt $b_n = a_n + 5$ khi đó $b_{n+1} = a_{n+1} + 5$.

Từ hệ thức truy hồi $a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $b_{n+1} - 5 = 3(b_n - 5) + 10 \Leftrightarrow b_{n+1} = 3b_n$.

Như vậy ta có $b_1 = a_1 + 5 = 6; b_{n+1} = 3b_n$.

Ta có $b_2 = 3b_1; b_3 = 3b_2 = 3^2 b_1; b_{43} = 3b_3 = 3^3 b_1$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng $b_n = 3^{n-1} b_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $a_n = 2 \cdot 3^n - 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $a_{15} = 28697809$. Vậy suy ra phương án đúng là A.

STUDY TIP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = qa_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$

-Nếu $q \neq 1$ thì số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = aq^{n-1} + \frac{d(1-q^{n-1})}{1-q}$.

-Nếu $q = 1$ thì số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = a + (n-1)d$.

Cho dãy số (a_n) xác định bởi và $a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

- Câu 1.** Số hạng thứ ba, thứ năm và thứ bảy của dãy số (a_n) lần lượt là:
A. 13, 49, 157. **B.** 49, 481, 4369. **C.** 49, 157, 1453. **D.** 49, 1453, 4369.
- Câu 2.** Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n) .
A. $a_n = 2 \cdot 3^n - 5$. **B.** $a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 5$. **C.** $a_n = 2 \cdot 3^n - 5$. **D.** $a_n = 2 \cdot 3^n + 5$.
- Câu 3.** Số 2324522929 có là số hạng của dãy số (a_n) không, nếu có thì nó là số hạng thứ bao nhiêu?
A. Không. **B.** Có, 18. **C.** Có, 19. **D.** Có, 20.
- Câu 4.** (a_n) là một dãy số:
A. Giảm và bị chặn trên. **B.** Tăng và bị chặn trên.
C. Tăng và bị chặn dưới. **D.** Giảm và bị chặn dưới.
- Ví dụ 6.** Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_2 = 0$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1$. Số hạng thứ 14 của dãy là số hạng nào?
A. 3164070. **B.** 9516786. **C.** 1050594. **D.** 9615090.

Đáp án A

Lời giải

+ Ta có $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n), \forall n \geq 1$.

Do đó ta có $b_1 = a_2 + 2a_1 = 10$ và $b_{n+1} = 3b_n, \forall n \geq 1$.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (b_n) , ta có $b_2 = 3b_1; b_3 = 3b_2 = 3^2b_1; b_4 = 3b_3 = 3^3b_1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng:

$b_n = 3^{n-1}b_1 = 10 \cdot 3^{n-1}, \forall n \geq 1$.

+ Ta có $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n), \forall n \geq 1$.

Do đó ta có: $c_1 = a_2 - 3a_1 = -15$ và $c_{n+1} = -2c_n, \forall n \geq 1$.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (c_n) , ta có $c_2 = -2c_1; c_3 = (-2)^2c_1; c_4 = (-2)^3c_1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng:

$c_n = (-2)^{n-1}c_1 = -15 \cdot (-2)^{n-1}, \forall n \geq 1$.

+ Từ các kết quả trên, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{n+1} + 2a_n = 10 \cdot 3^{n-1} \\ a_{n+1} - 3a_n = 15 \cdot (-2)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot (-2)^{n-1}.$$

Do đó số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot (-2)^{n-1}, \forall n \geq 1$.

Vậy suy ra $a_{14} = 3164070$. Vậy phương án đúng là **A**.

Nhận xét: Với kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây:

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5; a_2 = 0$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

- Câu 1.** Tính số hạng thứ năm của dãy số (a_n) .
A. $a_5 = 210$. **B.** $a_5 = 66$. **C.** $a_5 = 36$. **D.** $a_5 = 360$.

Câu 2. Số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là:

A. $a_n = 2.3^{n-1} + 3.(-2)^{n-1}$.

B. $a_n = 2.3^n + 3.(-2)^n$.

C. $a_n = 2.3^{n-1} - 3.2^{n-1}$.

D. $a_n = 2.3^n - 3.2^n$.

STUDY TIP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a, a_2 = b$ và $a_{n+2} = \alpha.a_{n+1} + \beta.a_n$, với mọi $n \geq 1$, trong đó phương trình $t^2 - \alpha t - \beta = 0$ có hai nghiệm phân biệt là t_1 và t_2 . Khi đó số hạng tổng quát của dãy số

(a_n) là $a_n = m_1.t_1^{n-1} + m_2.t_2^{n-1}$, trong đó m_1, m_2 thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} m_1 + m_2 = a \\ m_1.t_1 + m_2.t_2 = b \end{cases}$.

Ví dụ 7. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = -3$ và $a_{n+1} = a_n + n^2 - 3n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số 1391 là số hạng thứ mấy của dãy số đã cho?

A. 18.

B. 17.

C. 20.

D. 19

Đáp án A.

Lời giải

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (a_n) ta có:

$$a_n = a_1 + [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] - 3[1 + 2 + \dots + (n-1)] + 4(n-1) \Leftrightarrow a_n = \frac{n^3 - 6n^2 + 17n - 21}{3}.$$

Suy ra số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = \frac{n^3 - 6n^2 + 17n - 21}{3}$.

Giải phương trình $a_n = 1391$ ta được $n = 18$

Vậy phương án đúng là **A**.

STUDY TIP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a$ và $a_{n+1} = a_n + f(n), \forall n \geq 1$.

Số hạng tổng quát của dãy số (a_n) được tính theo công thức: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$.

Ví dụ 8. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 2$ và $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1), \forall n \geq 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. (a_n) là một dãy số giảm và bị chặn.

B. (a_n) là một dãy số tăng và bị chặn.

C. (a_n) là một dãy số giảm và không bị chặn dưới.

D. (a_n) là một dãy số tăng và không bị chặn trên.

Đáp án A

Lời giải

Ta có $a_1 = 2 > a_2 = \frac{3}{2} > a_3 = \frac{5}{4}$. Do đó ta loại được các phương án **B** và **D**.

+ Ta có $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + 1)$ nên $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}}(a_2 - a_1) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 1$ nên (a_n) là dãy số giảm.

+ Vì (a_n) là một dãy số giảm nên dãy số này bị chặn trên bởi $a_1 = 2$.

Ta có $\frac{1}{2}(1 - a_n) = a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow a_n > 1, \forall n \geq 1$.

Vậy phương án đúng là A.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Dạng 1: Bài tập về xác định số hạng của dãy số

Câu 1. Cho dãy số (x_n) có $x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $x_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+5}$. B. $x_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. C. $x_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$. D. $x_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+1}$.

Câu 2. Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{2n\pi}{3}$. Bốn số hạng đầu của dãy số đó là:

A. $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$. B. $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. C. $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$. D. $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_1 = y_2 = 1$ và $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là:

A. 1, 1, 2, 4, 7. B. 2, 3, 5, 8, 11. C. 1, 2, 3, 5, 8. D. 1, 1, 2, 3, 5.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = -1$ và $u_n = 2.n.u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $u_{11} = 2^{10}.11!$. B. $u_{11} = -2^{10}.11!$. C. $u_{11} = 2^{10}.11^{10}$. D. $u_{11} = -2^{10}.11^{10}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_n = u_{n-1} + 2n$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{50} bằng:

A. 1274,5. B. 2548,5. C. 5096,5. D. 2550,5.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số (u_n) ?

A. 8. B. 6. C. 5. D. 7.

Câu 7. Cho dãy số (a_n) có $a_n = -n^2 + 4n + 11, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng lớn nhất của dãy số (a_n) .

A. 14. B. 15. C. 13. D. 12.

Câu 8. Cho dãy số (a_n) có $a_n = \frac{n}{n^2 + 100}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng lớn nhất của dãy số (a_n) .

A. $\frac{1}{20}$. B. $\frac{1}{30}$. C. $\frac{1}{25}$. D. $\frac{1}{21}$.

Câu 9. Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_1 = 2$ và $y_{n+1} = 2y_n + n^2 - 3n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tổng S_4 của 4 số hạng đầu tiên của dãy số là:

- A. $S_4 = 20$. B. $S_4 = 10$. C. $S_4 = 30$. D. $S_4 = 14$.

Câu 10. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 5$ và $x_{n+1} = x_n + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy số (x_n) là:

- A. $x_n = \frac{n^2 - n + 10}{2}$. B. $x_n = \frac{5n^2 - 5n}{2}$. C. $x_n = \frac{n^2 + n + 10}{2}$. D. $x_n = \frac{n^2 + 3n + 12}{2}$.

Câu 11. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{2}{3}$ và $x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. $x_{100} = \frac{2}{39999}$. B. $x_{100} = \frac{39999}{2}$. C. $x_{100} = \frac{2}{40001}$. D. $x_{100} = \frac{2}{40803}$.

Dạng 2: Bài tập về xét tính tăng, giảm của dãy số.

Câu 12. Trong các dãy số dưới đây dãy số nào là dãy số tăng ?

A. Dãy (a_n) , với $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \sin \frac{\pi}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy (b_n) , với $b_n = (-1)^{2n} \cdot (5^n + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy (c_n) , với $c_n = \frac{1}{n + \sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy (d_n) , với $d_n = \frac{n}{n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 13. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là dãy số giảm ?

A. Dãy (a_n) , với $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. B. Dãy (b_n) với $b_n = \frac{n^2 + 1}{n}$.

C. Dãy (c_n) , với $c_n = \frac{1}{n^3 + 1}$. D. Dãy (d_n) , với $d_n = 3 \cdot 2^n$.

Câu 14. Cho dãy số (x_n) với $x_n = \frac{an + 4}{n + 2}$. Dãy số (x_n) là dãy số tăng khi:

- A. $a = 2$. B. $a > 2$. C. $a < 2$. D. $a > 1$.

Câu 15. Cho hai dãy số (x_n) với $x_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$ và (y_n) với $y_n = n + \sin^2(n+1)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. (x_n) là dãy số giảm, (y_n) là dãy số giảm.

B. (x_n) là dãy số giảm, (y_n) là dãy số tăng.

C. (x_n) là dãy số tăng, (y_n) là dãy số giảm.

D. (x_n) là dãy số tăng, là dãy số tăng.

Dạng 3: Bài tập về xét tính bị chặn của dãy số.

Câu 16. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{3n-1}{3n+7}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. Dãy (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.
- B. Dãy (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.
- C. Dãy (u_n) bị chặn trên và bị chặn dưới.
- D. Dãy (u_n) không bị chặn.

Câu 17. Trong các dãy số sau dãy số nào là dãy bị chặn ?

- A. Dãy (a_n) , với $a_n = \sqrt{n^2 + 16}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- B. Dãy (b_n) , với $b_n = n + \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- C. Dãy (c_n) , với $c_n = 2^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- D. Dãy (d_n) , với $d_n = \frac{n}{n^2 + 4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 18. Trong các dãy số dưới đây dãy số nào bị chặn trên ?

- A. Dãy (a_n) , với $a_n = 3n + 1$.
- B. Dãy (b_n) , với $b_n = \frac{1}{n(2n+1)}$.
- C. Dãy (c_n) , với $c_n = 3 \cdot 2^{n+1}$.
- D. Dãy (d_n) , với $d_n = (-2)^n$.

Câu 19. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào bị chặn dưới ?

- A. Dãy (x_n) , với $x_n = (-1)^n \cdot (n^2 + 2n + 3)$.
- B. Dãy (y_n) , với $y_n = -(n^2 + 6n)$.
- C. Dãy (z_n) , với $z_n = \frac{2018^n}{2017^{n+1}}$.
- D. Dãy (w_n) , với $w_n = (-2017)^n$.

Dạng 4: Bài tập về tính chất của dãy số.

Câu 20. Cho dãy số (x_n) , xác định bởi: $x_n = 2 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$.
- B. $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 5x_n$.
- C. $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 6x_n = 0$.
- D. $x_{n+2} + 6x_{n+1} - 5x_n = 0$.

Câu 21. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 3^n$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\frac{u_1 + u_9}{2} = u_5$.
- B. $\frac{u_2 \cdot u_4}{2} = u_3$.
- C. $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = \frac{u_{100} - 1}{2}$.
- D. $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{100} = u_{5050}$.

Câu 22. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017 \cos \frac{(3n+1)\pi}{6}$. Mệnh đề nào dưới đây là sai ?

A. $a_{n+12} = a_n, \forall n \geq 1$. B. $a_{n+8} = a_n, \forall n \geq 1$. C. $a_{n+9} = a_n, \forall n \geq 1$. D. $a_{n+4} = a_n, \forall n \geq 1$.

Câu 23. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n^2 + \frac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $a_{2018} = a_2$. B. $a_{2018} = a_1$. C. $a_{2018} = a_3$. D. $a_{2018} = a_4$.

Câu 24. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1, a_2 = 2$ và $a_{n+2} = \sqrt{3} \cdot a_{n+1} - a_n, \forall n \geq 1$. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất sao cho $a_{n+p} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

A. $p = 9$. B. $p = 12$. C. $p = 24$. D. $p = 18$.

Câu 25. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **SAI** ?

A. Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \frac{2018}{a_n + 2017}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một dãy số không đổi.

B. Dãy số (b_n) , với $b_n = \tan(2n+1)\frac{\pi}{4}$, có tính chất $b_{n+2} = b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n) , với $c_n = \tan(n\pi) + 1$, là một dãy số bị chặn.

D. Dãy số (d_n) , với $d_n = \cos(n\pi)$, là một dãy số giảm.

Ví dụ 10. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_2 = 2u_{n+1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, có tính chất

A. Là dãy số tăng và bị chặn dưới. B. Là dãy số giảm và bị chặn trên.

C. Là dãy số giảm và bị chặn dưới. D. Là dãy số tăng và bị chặn trên.

Ví dụ 11. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}, \forall n \geq 1$. Tổng $S_{2018} = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2018}^2$ là

A. $S_{2018} = 2015^2$. B. $S_{2018} = 2018^2$. C. $S_{2018} = 2017^2$. D. $S_{2018} = 2016^2$.

Ví dụ 12. Cho dãy số (z_n) xác định bởi $z_n = \sin \frac{n\pi}{2} + 2 \cos \frac{n\pi}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong các số hạng của dãy số (z_n) . Tính giá trị biểu thức $T = M^2 + m^2$.

A. $T = 13$. B. $T = 5$. C. $T = 18$. D. $T = 7$.

Ví dụ 13. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \frac{1}{2}; u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}, n \geq 1. S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n < \frac{2017}{2018}$ khi n có giá trị nguyên dương lớn nhất.

A. 2017. B. 2015. C. 2016. D. 2014.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Dạng 1: Bài tập về xác định số hạng của dãy số

Câu 1. Đáp án C.

$$\text{Ta có } x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \text{ nên } x_{n+1} = \left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}.$$

Câu 2. Đáp án A.

$$\text{Ta có } y_1 = \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos \frac{2\pi}{3} = 0; y_2 = \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}. \text{ (loại phương án B và D) và}$$

$$y_3 = \sin^2 \frac{3\pi}{4} + \cos 2\pi = \frac{3}{2}. \text{ (loại phương án C).}$$

Câu 3. Đáp án D.

Ta có $y_3 = 2; y_4 = 3$ nên loại các phương án còn lại.

Câu 4. Đáp án B.

Ta có $u_2 = 2^2 u_1; u_3 = 6u_2 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3u_1; u_4 = 8u_3 = 2^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4u_1$. Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $u_n = 2^{n-1} \cdot n! u_1 = -2^{n-1} \cdot n!$. Do đó $u_{11} = -2^{10} \cdot 11!$.

Câu 5. Đáp án D.

$$\text{Ta có } u_n = \frac{1}{2} + 2(1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{2} + n(n+1). \text{ Suy ra } u_{50} = \frac{1}{2} + 50 \cdot 51 = 2550,5.$$

Câu 6. Đáp án D.

$$\text{Giải phương trình } \frac{n+1}{2n+1} = \frac{8}{15} \text{ ta được } n = 7.$$

Câu 7. Đáp án B.

Ta có $a_n = -(n-2)^2 + 15 \leq 15, \forall n \geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi $n-2=0 \Leftrightarrow n=2$.

Vậy số hạng lớn nhất của dãy số là số hạng bằng 15.

Câu 8. Đáp án A.

$$\text{Ta có } a_n = \frac{n}{n^2+100} \leq \frac{n}{2\sqrt{n^2 \cdot 100}} = \frac{1}{20}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } n^2 = 100 \Leftrightarrow n = 10.$$

Vậy số hạng lớn nhất của dãy là số hạng bằng $\frac{1}{20}$.

Câu 9. Đáp án A.

$$\text{Ta tính được } y_2 = 2; y_3 = 4; y_4 = 12 \Rightarrow S_4 = 20.$$

Câu 10. Đáp án A.

Cách 1: Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

$$\text{Ta có } x_n = x_1 + (1 + 2 + \dots + n - 1) \Leftrightarrow x_n = 5 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 10}{2}.$$

Cách 2: Kiểm tra từng phương án cho đến khi tìm được phương án đúng.

Phương án A: $x_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 10}{2} = \frac{n^2 + n + 10}{2} = \frac{n^2 - n + 10}{2} + n = x_n + n.$

Cách 3: Với $n=1 \Rightarrow x_1 = 5$ loại các phương án còn lại B, C, D.

Câu 11. Đáp án A.

Ta có $x_n > 0, \forall n \geq 1$ và $\frac{1}{x_{n+1}} = 2(2n+1) + \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 1.$

Suy ra $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_1} + 4(1+2+\dots+n-1) + 2(n-1) = \frac{3}{2} + 2n(n-1) + 2(n-1) = \frac{4n^2-1}{2}.$

Suy ra $x_n = \frac{2}{4n^2-1}.$ Do đó $x_{100} = \frac{2}{39999}.$

Dạng 2: Bài tập về xét tính tăng giảm của dãy số

Câu 12. Đáp án B.

- Dãy số (a_n) là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.
- Với dãy (b_n) , ta có $b_n = 5^n + 1$ (do $(-1)^{2n} = 1$). Vì $b_{n+1} = 5^{n+1} + 1 = 5 \cdot 5^n + 1 > b_n, \forall n \geq 1$ nên (b_n) là một dãy số tăng.
- Dãy số (c_n) là một dãy số giảm vì $c_{n+1} = \frac{1}{n+1+\sqrt{n+2}} < \frac{1}{n+\sqrt{n+1}} = c_n, \forall n \geq 1.$
- Dãy số (d_n) là một dãy số giảm vì $d_{n+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+2} < \frac{n}{n^2+1} = d_n, \forall n \geq 1.$

Câu 13. Đáp án C.

- Dãy số (a_n) là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.
- Dãy số (b_n) là một dãy số tăng vì $b_n = n + \frac{1}{n} < n + 1 + \frac{1}{n+1} = b_{n+1}, \forall n \geq 1.$
- Dãy số (c_n) là một dãy số giảm vì $c_n = \frac{1}{n^3+1} > \frac{1}{(n+1)^3+1} = c_{n+1}, \forall n \geq 1.$
- Dãy số (d_n) là một dãy số tăng vì $d_n = 3 \cdot 2^n < 3 \cdot 2^{n+1} = d_{n+1}, \forall n \geq 1.$

Câu 14. Đáp án B.

Ta có $x_{n+1} = \frac{a(n+1)+4}{n+3}.$ Xét hiệu $x_{n+1} - x_n = \frac{a(n+1)+4}{n+3} - \frac{an+4}{n+2} = \frac{2a-4}{(n+2)(n+3)}.$

(x_n) là dãy tăng khi và chỉ khi $x_{n+1} - x_n > 0, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow 2a-4 > 0 \Leftrightarrow a > 2.$

Câu 15. Đáp án D.

Ta có $x_n > 0, \forall n \geq 1$ và $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{2} > 1, \forall n \geq 1$ nên (x_n) là dãy số tăng.

Ta có $y_{n+1} - y_n = \sin^2(n+1) + 1 - \sin^2 n > 0, \forall n \geq 1$ nên (y_n) cũng là dãy số tăng.

Dạng 3: Bài tập về xét tính bị chặn của dãy số

Câu 16. Đáp án C.

Ta có $u_n = 1 - \frac{8}{3n+7} < 1 - \frac{8}{3n+10} = u_{n+1}, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là một dãy số tăng. Suy ra nó bị chặn dưới bởi $u_1 = \frac{1}{5}$. Lại do $u_n = 1 - \frac{8}{3n+7} < 1, \forall n \geq 1$ nên dãy số u_n bị chặn trên bởi 1.

Câu 17. Đáp án D.

- Dãy số (a_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $a_n = \sqrt{n^2 + 16} \geq \sqrt{17}, \forall n \geq 1$.
- Dãy số (b_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $b_n = n + \frac{1}{2n} > 2\sqrt{n \cdot \frac{1}{2n}} = \sqrt{2}, \forall n \geq 1$.
- Dãy số (c_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $c_n = 2^n + 3 \geq 5, \forall n \geq 1$.
- Dãy số (d_n) là dãy số bị chặn vì $0 < d_n \leq \frac{1}{4}, \forall n \geq 1$. $\left(\text{do } 0 < \frac{n}{n^2 + 4} \leq \frac{n}{4n} = \frac{1}{4} \right)$.

Câu 18. Đáp án B.

- Dãy số (a_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $u_1 = 4$.
- Dãy số (b_n) có $0 < b_n < 1, \forall n \geq 1$ nên dãy số (b_n) là dãy số bị chặn.
- Dãy số (c_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới bởi $c_1 = 12$.
- Dãy số (d_n) là dãy đan dấu và $d_{2n} = (-2)^{2n} = 4^n$ lớn tùy ý khi n đủ lớn, còn $d_{2n+1} = (-2)^{2n+1} = -2 \cdot 4^n$ nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

Câu 19. Đáp án C.

- Dãy số (x_n) là dãy đan dấu và x_{2n} lớn tùy ý khi n đủ lớn, x_{2n+1} nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.
- Dãy số (y_n) là dãy số giảm và y_n nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.
- Dãy số (z_n) là dãy số tăng nên nó bị chặn dưới bởi $z_1 = \frac{2018}{2017^2}$.
- Dãy số (w_n) là dãy đan dấu và w_{2n} lớn tùy ý khi n đủ lớn, w_{2n+1} nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

Dạng 4: Bài tập về tính chất của dãy số.

Câu 20. Đáp án A.

Ta có $x_{n+2} = 2 \cdot 3^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+2} = 18 \cdot 3^n - 20 \cdot 2^n; x_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot 2^{n+1} = 6 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n$.

- Phương án A: $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$.
- Phương án B: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = -8 \cdot 3^n + 15 \cdot 2^n \neq 0$.
- Phương án C: $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 6x_n = 36 \cdot 3^n - 40 \cdot 2^n \neq 0$.
- Phương án D: $x_{n+2} + 6x_{n+1} - 5x_n = 44 \cdot 3^n - 55 \cdot 2^n \neq 0$.

Câu 21. Đáp án D.

- Phương án A: $\frac{u_1 + u_9}{2} = \frac{3 + 3^9}{2} \neq 3^5 = u_5$.

- Phương án B: $\frac{u_2 \cdot u_4}{2} = \frac{3^6}{2} \neq 3^3 = u_3$.
- Phương án C: $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_{100} > u_{100} > \frac{u_{100} - 1}{2}$.
- Phương án D: $u_1 \cdot u_2 \dots u_{100} = 3^{1+2+\dots+100} = 3^{5050} = u_{5050}$.

Câu 22. Đáp án C.

- Phương án A:

$$a_{n+12} = 2017 \cos \frac{[3(n+12)+1]\pi}{6} = 2017 \cos \left(\frac{(3n+1)\pi}{6} + 6\pi \right) = 2017 \cos \frac{(3n+1)\pi}{6} = a_n, \forall n \geq 1.$$
- Phương án B:

$$a_{n+8} = 2017 \cos \frac{[3(n+8)+1]\pi}{6} = 2017 \cos \left(\frac{(3n+1)\pi}{6} + 4\pi \right) = 2017 \cos \frac{(3n+1)\pi}{6} = a_n, \forall n \geq 1.$$
- Phương án C:

$$a_{n+9} = 2017 \cos \frac{[3(n+9)+1]\pi}{6} = 2017 \cos \left(\frac{(3n+4)\pi}{6} + 4\pi \right) = 2017 \cos \frac{(3n+4)\pi}{6} \neq a_n, \forall n \geq 1.$$
- Phương án D:

$$a_{n+4} = 2017 \cos \frac{[3(n+4)+1]\pi}{6} = 2017 \cos \left(\frac{(3n+1)\pi}{6} + 2\pi \right) = 2017 \cos \frac{(3n+1)\pi}{6} = a_n, \forall n \geq 1.$$

Lưu ý: Quan sát vào các chỉ số dưới của số hạng tổng quát, ta thấy ở C có sự khác biệt so với ba phương án trên nên ta có thể kiểm tra ngay phương án C trước.

Câu 23. Đáp án A.

Sáu số hạng đầu tiên của dãy là 1;2;0;1;2;0.

Từ đây ta dự đoán $a_{n+3} = a_n, \forall n \geq 1$. Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được rằng $a_{n+3} = a_n, \forall n \geq 1$.

Mặt khác $2018 = 3 \cdot 672 + 2$ nên $a_{2018} = a_2$.

Câu 24. Đáp án B.

Trước hết ta kiểm tra phương án với p nhỏ nhất. Viết 10 số hạng đầu tiên của (a_n) :

$$a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 2\sqrt{3} - 1; a_4 = 4 - \sqrt{3}; a_5 = 2\sqrt{3} - 2; a_6 = 2 - \sqrt{3}; a_7 = -1;$$

$$a_8 = -2; a_9 = 1 - 2\sqrt{3}; a_{10} = \sqrt{3} - 4.$$

Để dàng thấy $a_{10} = \sqrt{3} - 4 \neq 1 = a_1$ nên phương án A là sai.

Cách 1: Ta viết thêm 4 số hạng nữa của dãy (a_n) : ta được

$$(a_n): a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 2\sqrt{3} - 1; a_4 = 4 - \sqrt{3}; a_5 = 2\sqrt{3} - 2; a_6 = 2 - \sqrt{3}; a_7 = -1;$$

$$a_8 = -2; a_9 = 1 - 2\sqrt{3}; a_{10} = \sqrt{3} - 4; a_{11} = 2 - 2\sqrt{3}; a_{12} = \sqrt{3} - 2; a_{13} = 1; a_{14} = 2.$$

Từ đây ta dự đoán được $a_{n+12} = a_n, \forall n \geq 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được $a_{n+12} = a_n, \forall n \geq 1$.

Vậy số nguyên dương cần tìm là $p = 12$.

Cách 2: Sau khi viết 10 số hạng của dãy ta có thể đoán được $a_{n+6} = -a_n, \forall n \geq 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh được rằng $a_{n+6} = -a_n, \forall n \geq 1$. Như vậy 6 là số nguyên dương nhỏ nhất để $a_{n+6} = -a_n, \forall n \geq 1$. Do đó

$$a_{n+12} = a_{(n+6)+6} = -a_{n+6} = a_n, \forall n \geq 1.$$

Suy ra số cần tìm là $p = 12$.

Câu 25. Đáp án D.

- Phương án A: Ta có $a_1 = 1; a_2 = \frac{2018}{1+2017} = 1; a_3 = 1$. Từ đây ta dự đoán $a_n = 1, \forall n \geq 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $a_n = 1, \forall n \geq 1$. Suy ra (a_n) là dãy số không đổi. Do đó phương án A đúng.

- Phương án B: Ta có

$$b_{n+2} = \tan\left[2(n+2)+1\right] \frac{\pi}{4} = \tan\left[(2n+1) \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \tan(2n+1) \frac{\pi}{4} = a_n, \forall n \geq 1.$$

Vậy $b_{n+2} = b_n, \forall n \geq 1$. Do đó phương án B là đúng.

- Phương án C: Ta có $c_n = 1, \forall n \geq 1$. nên dãy số (c_n) là dãy số không đổi. Suy ra (c_n) là dãy số bị chặn. Do đó phương án C là đúng.
- Phương án D: Ta có $d_{2n} = \cos(2n\pi) = 1 = \cos(4n\pi) = d_{4n}$. Suy ra khẳng định (d_n) là một dãy số giảm là khẳng định sai.

Câu 26. Đáp án C.

Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) = \dots = \frac{1}{2^{n-1}}(u_2 - u_1)$. Từ đó ta tính được $u_n = 1 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Do $u_{n+2} - u_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n} < 0, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là dãy số giảm

Ta có $1 < u_n = 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là dãy số bị chặn. Suy ra phương án đúng là

C.

Câu 27. Đáp án B.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2, \forall n \geq 1$. Suy ra

$$u_n^2 = u_1^2 + 2(n-1) = 2n-1.$$

Do đó $S_n = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 2(1+2+\dots+n) - n = n(n+1) - n = n^2$.

Vậy $S_{2018} = 2018^2$.

Câu 28. Đáp án A.

Dựa vào chu kỳ của hàm số $y = \sin x; y = \cos x$, ta có $z_{n+12} = z_n, \forall n \geq 1$.

Do đó tập hợp các phần tử của dãy số là $S = \{z_1; z_2; \dots; z_{12}\} = \{-3; -2; -1; 0; 2\}$.