$$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2$$

Giải:

Áp dụng (1) dạng $\frac{1}{xy}\geq\frac{4}{(x+y)^2}$, ta được: $\frac{1}{ab}\geq\frac{4}{(a+b)^2}$

Tương tự: $\frac{1}{ac}\geq\frac{4}{(a+c)^2}$; $\frac{1}{bc}\geq\frac{4}{(b+c)^2}$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\geq 4\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\right)$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\geq 4.3\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right]\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2$$

(Do $3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2,\quad \forall x,y,z.$)

Ví dụ 18: Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}\leq\frac{a+b+c}{2}$

Giải:

Từ (1) ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\frac{1}{4}(a+b)$.

Tương tự: $\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\frac{1}{4}(b+c)$, $\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}\leq\frac{1}{4}(c+a)$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm.

Đặt Mẫu là biến mới

Ví dụ 19: Cho ba số thực dương *x, y, z*. Chứng minh rằng: $\frac{25x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{9z}{x+y}>12$ (*)

Giải:

Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ (với *a* > 0, *b* > 0, *c* > 0).

Suy ra: $x=\frac{b+c-a}{2},\ y=\frac{c+a-b}{2},\ z=\frac{a+b-c}{2}$.

Ta có: VT (*) = $\frac{25(b+c-a)}{2a}+\frac{4(c+a-b)}{2b}+\frac{9(a+b-c)}{2c}$

= $\left(\frac{25b}{2a}+\frac{4a}{2b}\right)+\left(\frac{25c}{2a}+\frac{9a}{2c}\right)+\left(\frac{4c}{2b}+\frac{9b}{2c}\right)-19$ ≥ 10 + 15 + 6 – 19 = 12.

Đẳng thức xảy ra ⇔ $\begin{cases}5b=2a\\5c=3a\end{cases}\Rightarrow 5b+5c=5a\Rightarrow$ *x* = 0 (vô lí). Vậy BĐT (*) đúng.

Ví dụ 20: Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3 \qquad (*)$$

Giải:

Đặt $x=b+c-a;\ y=c+a-b;\ z=a+b-c\Rightarrow x+y+z=a+b+c$

Suy ra: $a=\frac{y+z}{2};\quad b=\frac{z+x}{2};\quad c=\frac{x+y}{2}$

Ta có: $VT(*)=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}+\frac{x}{y}\right)\ge\frac{1}{2}(2+2+2)=3$

Dấu "=" xảy ra ⇔ *x = y = z* ⇔ *a = b = c* hay ∆ABC đều.

Ví dụ 21: Cho ba số $a,b,c\in(0;\frac{3}{2}):a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{3-2a}}+\frac{1}{\sqrt{3-2b}}+\frac{1}{\sqrt{3-2c}}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Giải:

Đặt $\sqrt{3-2a}=x,\sqrt{3-2b}=y,\sqrt{3-2c}=z$ thì $\begin{cases}x,y,z>0\\x^2+y^2+z^2=3\end{cases}$;

Ta có: $ab+bc+ca=\frac{1}{4}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9)$.

Do đó BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{36}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9}\Leftrightarrow(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9)\ge 36.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương và 12 số dương ta được:

` $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$ >0 (1)

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+\underbrace{1+1+...+1}_{9so1}\ge 12\sqrt[12]{(xyz)^4}=12\sqrt[3]{xyz}>0 \text{ (2)}$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Vai trò như nhau của các biến

Ví dụ 22: Cho các số thực *a, b, c* đôi một khác nhau thuộc đoạn [0; 2]. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{9}{4} \qquad (*)$$

Giải:

Sử dụng BĐT Cô-si với *x* > 0, *y* > 0, ta có: $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(x+y)^2\ge\frac{2}{xy}.4xy=8$.

Suy ra: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{8}{(x+y)^2}$ (1). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ *x* = *y*.

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử *a* > *b* > *c*. Áp dụng BĐT (1) cho cặp số dương *a* – *b* và *b* – *c*, ta có: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}\ge\frac{8}{(a-b+b-c)^2}=\frac{8}{(a-c)^2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ *a – b = b – c.*

Suy ra: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\geq\frac{8}{(a-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\frac{9}{(a-c)^2}$.

Mặt khác, do *a, c* $\in$ [0; 2] và *a > c* nên 0 < *a – c* $\leq$ 2. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ *a* = 2 và *c* = 0.

Do đó: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\geq\frac{9}{(a-c)^2}\geq\frac{9}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi *(a; b; c)* = (2; 1; 0) và các hoán vị.

Ví dụ 23: Cho $a,b,c>0$ thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$.

<u>Giải:</u>

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử *a* $\geq$ *b* $\geq$ *c*.

Vì *abc* = 1 nên *bc* $\leq$ 1 và *a* $\geq$ 1. Ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2\leq 2\left(\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\right)=2\left(1+\frac{1-b^2c^2}{(1+b^2)(1+c^2)}\right)\leq 2\left(1+\frac{1-b^2c^2}{(1+bc)^2}\right)$$

$$=\frac{4}{1+bc}=\frac{4a}{1+a}$$

Suy ra: $\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leq 2\sqrt{\frac{a}{1+a}}$ (1)

Mặt khác ta có: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\leq\frac{\sqrt{2}}{1+a}$ (2)

Ta sẽ chứng minh: $2\sqrt{\frac{a}{1+a}}+\frac{\sqrt{2}}{1+a}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$ (3)

Thật vậy, (3) $\Leftrightarrow 1+3a-2\sqrt{2a(1+a)}\geq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2a}-\sqrt{1+a}\right)^2\geq 0$ (luôn đúng).

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ *a = b = c* = 1.

Ví dụ 24: Cho các số thực a, b, c không âm. Chứng minh rằng:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0 \qquad (*)$$

Giải:

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a\geq b\geq c$.

+ Nếu có hai trong ba số *a, b, c* bằng nhau thì BĐT hiển nhiên đúng.

+ Nếu $a > b > c$, chia hai vế của (*) cho $(a-b)(b-c)(a-c)$ ta được BĐT tương đương:

$$\frac{a}{b-c}-\frac{b}{a-c}+\frac{c}{a-b}\geq 0 \qquad (1)$$

(1) luôn đúng do $\begin{cases} a>b>0 \\ 0<b-c<a-c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b-c}>\frac{b}{a-c}$ và $\frac{c}{a-b}>0$.

Bài tập tương tự

Bài 1: Cho $0 < b < a$. Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{(a-b)b} \geq 3$

Bài 2: Cho $0 < b < a$. Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3$

Bài 3: Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng : $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

Bài 4: (Đề thi tuyển sinh cao đẳng khối A,B – 2005) Cho $x \geq 2,\ y \geq 3,\ z \geq 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{xy\sqrt{z-4} + yz\sqrt{x-2} + zx\sqrt{y-3}}{xyz}$

Bài 5: Chứng minh rằng với $a,b,c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$, ta luôn có

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$$

Bài 6 : Cho ba số thực dương *a, b, c*. Chứng minh $\frac{2a^3}{a^6+bc} + \frac{2b^3}{b^6+ca} + \frac{2c^3}{c^6+ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$.

Bài 7: Cho ba số thực dương *x, y, z* thảo mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z} \geq \frac{51}{7}.$$

Bài 8: Cho hai số *a, b* dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = $\frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)} + \sqrt{b(4b+5a)}}$

Bài 9: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{2a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{2b+ca}} \leq 1.$$

Bài 10: Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh rằng: $1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geq \frac{6}{a+b+c}$.

Bài 11: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

M = $\frac{a^5}{b^3+c^2} + \frac{b^5}{c^3+a^2} + \frac{c^5}{a^3+b^2} + a^4 + b^4 + c^4$.

__Bài 12:__ Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}.$$

__Bài 13:__ Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5+b^5}{ab(a+b)}+\frac{b^5+c^5}{bc(b+c)}+\frac{c^5+a^5}{ca(c+a)}\ge 3(ab+bc+ca)-2.$$

__Bài 14:__ Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $abc\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right)\ge\frac{27}{8}.$$

__Bài 15:__ Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\ge a+b+c$

__Bài 16:__ Cho *a, b, c* là các số thực thuộc đoạn [1; 2]. Chứng minh $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 10$

&2. MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

I-KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI

Ý tưởng chính là việc xác định được dấu "=" xảy ra khi nào, để ta có những đánh giá hợp lí. Lý do là trong "Bất đẳng thức" bất kỳ đánh giá nào của chúng mà không bảo toàn được dấu "=" thì điều trở nên vô nghĩa. Hãy xét những ví dụ minh họa sau đây.

Ví dụ 1: Cho $x \geq 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3x + \frac{1}{2x}$

Lời giải sai thường gặp: Áp dụng bất đẳng thức Côsi dạng $\frac{x+y}{2} \geq 2\sqrt{xy}$, ta có

$$A = 3x + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{3x.\frac{1}{2x}} = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \min A = \sqrt{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Nguyên nhân:

- $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ không thỏa điều kiện $x \geq 1$.
- $A > \sqrt{6}$

Lời giải đúng: Dự đoán dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$. Để bảo toàn dấu bằng khi sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta chọn số α thỏa $\alpha x = \frac{1}{2x} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$. Khi đó

$$A = 3x + \frac{1}{2x} = \frac{5x}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} \geq \frac{5x}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x.\frac{1}{2x}} = \frac{5x}{2} + 1 \geq \frac{5.1}{2} + 1 = \frac{7}{2} \quad (do\, x \geq 1)$$

Suy ra $\min A = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = 1$.

Bài tập tương tự

a) Cho $x \geq 2$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$

b) Cho $x \geq 10$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$

c) Cho $x \geq 100$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$

Ví dụ 2: Cho các số thực a,b thỏa mãn $0 \le a \le 3, 3 \le b \le 8$ và $a+b=11$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab$.

Lời giải sai thường gặp: Áp dụng bất đẳng thức Côsi dạng $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, ta có

$$P=ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4} \Rightarrow \max P = \frac{121}{4} \Leftrightarrow a=b=\frac{11}{2}$$

Nguyên nhân:

- $a=\frac{11}{2}$ không thỏa điều kiện $0 \le a \le 3$
- $P<\frac{121}{4}$

Lời giải đúng: Dự đoán $\max P \ \ khi \ \begin{cases} a=3 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow 8a=3b$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P=ab=\frac{1}{24}(8a)(3b) \le \frac{1}{24}\left(\frac{8a+3b}{2}\right)^2 = \frac{1}{96}\left[3(a+b)+5a\right]^2 \le \frac{1}{96}(3.11+5.3)=24$$

Suy ra $\max P = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=8 \end{cases}$

Ví dụ 3: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a} \le 3\sqrt[3]{3}$.

Sai lầm thương gặp:

Ta có: $\sqrt[3]{1.1(a+2b)} \le \frac{1+1+(a+2b)}{3} = \frac{2+a+2b}{3}$, tương tự ta có:

$$\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a} \le \frac{2+a+2b}{3}+\frac{2+b+2c}{3}+\frac{2+c+2a}{3}=5$$

mà $5>3\sqrt[3]{3} \Rightarrow$ đề ra sai...?...?

Nguyên nhân sai lầm: $P=VT \le 5. \quad MaxP=5 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=b+2c=c+2a=1 \\ a+b+c=3 \end{cases} \quad (vn)$

Vậy $P<5$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu "=" trong bất đẳng thức xảy ra khi

$a=b=c=1 \Rightarrow a+2b=b+2c=c+2a=3$. Nên áp dụng bất đẳng thức Côsi dạng $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$, ta có:

$$\sqrt[3]{a+2b}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{3.3(a+2b)} \le \frac{1}{\sqrt[3]{9}}.\frac{3+3+(a+2b)}{3}=\frac{6+a+2b}{3\sqrt[3]{9}}$$

$\Rightarrow P \le \frac{6+a+2b}{3\sqrt[3]{9}}+\frac{6+b+2c}{3\sqrt[3]{9}}+\frac{6+c+2a}{3\sqrt[3]{9}}=3\sqrt[3]{3}$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài tập tương tự

a) Cho $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 3$ thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng: $abc \le \frac{27}{4}$.

b) Cho $x,y,z>0$ thỏa $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Tìm GTLN của $P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$

c) Cho $a\ge 2, b\ge 3, c\ge 4$, tìm GTLN: $P=\frac{ab\sqrt{c-4}+bc\sqrt{a-2}+ca\sqrt{b-3}}{abc}$.

d) Cho $x,y,z>0$ và $x+y=1$.Tìm GTNN của $P=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}$ (ĐHNT 2001–2002)

Ví dụ 4: Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a+b\le 1$. Tìm GTNN của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab$.

Lời giải đúng: Do P là biểu thức đối xứng với a,b, ta dự đoán $MinP$ đạt tại $a=b=\frac{1}{2}$, ta có:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\left(4ab+\frac{1}{4ab}\right)+\frac{1}{4ab} \ge \frac{4}{(a+b)^2}+2\sqrt{4ab.\frac{1}{2ab}}+\frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \ge 7$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2ab \\ a^2b^2=\frac{1}{16}, \quad a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Vậy $\min P = 7 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

<u>Bài tập tương tự</u>

a) Cho $a,b > 0$ thỏa mãn $a + b \le 1$. Tìm GTNN của biểu thức $S = \frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^2 b} + \frac{1}{ab^2}$.

b) Cho $a,b,c > 0$ và $a + b + c \le 1$. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

$$Q = \frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

Ví dụ 5: Cho $x,y,z > 0$ và $xyz = 1$.Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \ge \frac{3}{2}$

Ý tưởng là triệt tiêu mẫu.

Sai lầm thường gặp:

Ta có: $\frac{x^2}{1+y} + (1+y) \ge 2x,\ \ \frac{y^2}{1+z} + (1+z) \ge 2y,\ \ \frac{z^2}{1+x} + (1+x) \ge 2$

$$\Rightarrow P \ge 2(x+y+z) - (x+y+z) - 3 = x + y + z - 3$$

Mặt khác $x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \Rightarrow P \ge 0$

Nguyên nhân sai lầm: Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z, \quad xyz = 1 \\ \frac{x^2}{1+y} = 1 + y, \frac{y^2}{1+z} = 1 + z, \frac{z^2}{1+x} = 1 + x \end{cases} (vn)$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vì vậy để bảo toàn dấu bằng khi sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta chọn số α thỏa $\frac{x^2}{1+y} = \frac{1+y}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 4$. Khi đó

Ta có: $\frac{x^2}{1+y}+\frac{1+y}{4}\geq x,\quad \frac{y^2}{1+z}+\frac{1+z}{4}\geq y,\quad \frac{z^2}{1+x}+\frac{1+x}{4}\geq z$

$$\Rightarrow P\geq (x+y+z)-\frac{1}{4}(x+y+z)-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}(x+y+z)-\frac{3}{4}\geq\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài tập tương tự

a) Cho x,y,z là 3 số thỏa $x+y+z=0$. Chứng minh : $\sqrt{3+4^x}+\sqrt{3+4^y}+\sqrt{3+4^z}\geq 6$

b) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa $xyz=1$. Chứng minh:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$$

c) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z$

Ví dụ 6: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2+2z^2$$

Lưu ý: Bài này việc dự đoán dấu "=" xảy ra là không thể. Để tìm minP, ta mong muốn có một bất đẳng thức dạng $x^2+y^2+2z^2\geq k(xy+yz+zx)$ vì bậc của P và giả thiết bằng nhau, hơn nữa lại có dạng tổng tích. Nên ta nghỉ đến việc có thể dùng bất đẳng thức Côsi dạng $X^2+Y^2\geq 2XY\,(*)$?

Nhưng muốn áp dụng ý tưởng $(*)$ vào bài này, ta cần biết được dấu "=" xảy ra khi nào.

Tuy nhiên việc xem xét bài toán chỉ cho ta một dữ liệu duy nhất, đó là ta có thể dự đoán được khi P đạt min thì dấu "=" sẽ xảy ra khi $x=y$ (x, y đối xứng). Có nghĩa là ta vẫn chưa biết được giá trị cụ thể của x, y, z là bao nhiêu, nhưng ta thấy khi thay $(x;y;z)$ bởi $(-x;y;z)$, $(-x;-y;z)$, $(-x;-y;-z)$,... thì bài toán vẫn không thay đổi. Do đó ta chỉ cần xét x, y, z là các số thực dương.

Giả sử rằng khi P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\begin{cases}x=y=a>0\\ z=b>0\end{cases}\Rightarrow a^2+2ab=xy+yz+zx=1$

và $bx=by=az$

Áp dụng $X^2+Y^2\geq 2XY(*)$, ta có:

$$\begin{cases} ab\left(x^2+y^2\right)\geq 2abxy \\ b^2x^2+a^2z^2\geq 2abxz \\ b^2y^2+a^2z^2\geq 2abyz \end{cases}\Rightarrow 2ab\left(xy+yz+zx\right)\leq\left(ab+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)+2a^2z^2$$

Đến đây thì chỉ cần tìm a, b thỏa: $\begin{cases} a^2+2ab=1 \\ 2\left(ab+b^2\right)=2a^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a^2+2ab=1 \\ ab+b^2=a^2 \end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt[4]{5}},b=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt[4]{5}}$

Lời giải:

Đặt $a=\frac{1}{\sqrt[4]{5}},b=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt[4]{5}}\Rightarrow\begin{cases} a^2+2ab=1 \\ ab+b^2=a^2 \end{cases}$

Áp dụng $X^2+Y^2\geq 2XY(*)$, ta có:

$$\begin{cases} ab\left(x^2+y^2\right)\geq 2abxy \\ b^2x^2+a^2z^2\geq 2abxz \\ b^2y^2+a^2z^2\geq 2abyz \end{cases}\Rightarrow 2ab\left(xy+yz+zx\right)\leq\left(ab+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)+2a^2z^2=a^2P$$

Từ đó suy ra $P\geq\frac{2ab}{a^2}=\frac{2b}{a}=\sqrt{5}-1$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} x=y,\ bx=az,\ by=az \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y=a \\ z=b \end{cases}$

Bài tập tương tự

Cho x, y, z là các số thực thỏa $xy+yz+zx=8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

a) $P=x^2+y^2+2z^2$ b) $P=x^2+3y^2+2z^2$ c) $P=5x^2+3y^2+2z^2$

Ví dụ 7: Cho các số thực dương x, y, z thỏa $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^3$

Nhận xét : Bài này cũng như ví dụ 6, việc dự đoán dấu "=" xảy ra rất khó. Hơn nữa, biểu thức P là bậc hai nhưng giả thiết lại là bậc nhất, nên ta nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức Côsi dạng $X^2+Y^2\geq 2XY(*)$? Với Y là hằng số để giảm bậc của P.

Dự đoán được khi P đạt min thì dấu "=" sẽ xảy ra khi $x=y$ (x, y đối xứng), nên ta có ý tưởng là tìm hai số a, b tương tự ví dụ 6.

Áp dụng $(*)$, ta có :

$$\begin{cases} x^2+a^2\ge 2ax \\ y^2+a^2\ge 2ay \\ z^3+b^3+b^3\ge 3b^2z \end{cases} \Rightarrow P+2a^2+2b^3\ge 2a\left(x+y\right)+3b^2z \Leftrightarrow P\ge 2a\left(x+y\right)+3b^2z-\left(2a^2+2b^3\right)$$

Từ đó suy ra : $\begin{cases} 2a=3b^2 \\ x=y=a \\ z=b \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=a=\dfrac{19-\sqrt{37}}{12} \\ z=b=\dfrac{\sqrt{37}-1}{6} \end{cases}$.

Lời giải :

Đặt $a=\dfrac{19-\sqrt{37}}{12},\quad b=\dfrac{\sqrt{37}-1}{6} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a=3b^2 \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\begin{cases} x^2+a^2\ge 2ax \\ y^2+a^2\ge 2ay \\ z^3+b^3+b^3\ge 3b^2z \end{cases} \Rightarrow P+2a^2+2b^2\ge 2a\left(x+y\right)+3b^2z \Leftrightarrow P\ge 2a\left(x+y\right)+3b^2z-\left(2a^2+2b^3\right)$$

$$\Rightarrow P\ge 2a(x+y+z)-\left(2a^2+2b^3\right)=\frac{541-37\sqrt{37}}{108}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=a=\dfrac{19-\sqrt{37}}{12},\ z=b=\dfrac{\sqrt{37}-1}{6}$

Ví dụ 8: Cho $x,y,z>0$ và $4x+3y+4z=22$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x+y+z+\frac{1}{3x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$$

Nhận xét: Bài này cũng là một bài toán khó, việc dự đoán dấu "=" xảy ra khi nào là không thể. Tuy nhiên với ý tưởng như hai bài toán trên, ta giả định rằng dấu "=" xảy ra tại $x=a,y=b,z=c$. Khi đó $4a+3b+4c=22$ và $\dfrac{1}{3x}=\dfrac{1}{3a}=\dfrac{x}{3a^2},\ \dfrac{2}{y}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{2y}{b^2},\ \dfrac{3}{z}=\dfrac{3}{c}=\dfrac{3z}{c^2}$ và ta có đánh giá

$$\frac{1}{3x}+\frac{x}{3a^2}\ge\frac{2}{3a},\quad \frac{2}{y}+\frac{2y}{b^2}\ge\frac{4}{b},\quad \frac{3}{z}+\frac{3z}{c^2}\ge\frac{6}{c}$$

Suy ra $P \geq x+y+z+\left(\frac{2}{3a}-\frac{x}{3a^2}\right)+\left(\frac{4}{b}-\frac{2y}{b^2}\right)+\left(\frac{6}{c}-\frac{3z}{c^2}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{3a^2}\right)x+\left(1-\frac{2}{b^2}\right)y+\left(1-\frac{3}{c^2}\right)z+\left(\frac{2}{3a}+\frac{4}{b}+\frac{6}{c}\right)(*)$$

Vấn đề còn lại là chọn a, b, c thích hợp để sử dụng giả thiết $4x+3y+4z=22$. Vậy thì các hệ số của x,y,z trong $(*)$ phải thỏa $\begin{cases} 4a+3b+4c=22 \\ \dfrac{1-\frac{1}{3a^2}}{4}=\dfrac{1-\frac{2}{b^2}}{3}=\dfrac{1-\frac{3}{c^2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$

<u>Lời giải :</u> (Các bạn tự trình bày lại lời giải.)

<u>Bài tập tương tự</u>

a) Chứng minh rằng nếu x, y là các số dương thỏa mãn $x^2+y^2=5$, thì $x^3+y^6 \geq 9$.

b) Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$

c) Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq xy+yz+zx$

d) Cho $x,y,z>0$ và $4x+3y+4z=22$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y+z+\frac{1}{3x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$

e) Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn xyz=1.Chứng minh rằng $x+y+z \geq \frac{1+x}{1+y}+\frac{1+y}{1+z}+\frac{1+z}{1+x}$

f) Cho ba số không âm x, y, z thỏa $x+y+z=3$.Chứng minh $\frac{x}{y^3+16}+\frac{y}{z^3+16}+\frac{z}{x^3+16} \geq \frac{1}{6}$

g) Cho $x,y,z>0$. Chứng minh $\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{2y+z+x}+\frac{z}{2z+x+y} \leq \frac{3}{4}$

h) Cho $x,y,z>0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng $\frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}+\frac{z}{x^2+y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

II-THAM SỐ HÓA

Dự đoán được dấu "=" xảy ra

Việc dự đoán được dấu "=" xảy ra khi nào là rất quan trọng, khi đó ta sẽ định hướng được cách đánh giá hợp lí và luôn bảo toàn được dấu "=".

Ví dụ 1: Cho $a+b=2$. Chứng minh rằng: B = $a^5+b^5 \geq 2$.

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" xảy ra khi a = b = 1.

Giải:

Đặt: $a=1+x$. Từ giả thiết suy ra: $b=1-x$, ($x \in$ R).

Ta có: B = $a^5+b^5=(1+x)^5+(1-x)^5=10x^4+20x^2+2\geq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x$ = 0, hay a = b = 1. Vậy B $\geq$ 2.

Ví dụ 2: Cho $a+b=3,\ a\leq 1$. Chứng minh rằng: C = $b^3-a^3-6b^2-a^2+9b\geq 0$.

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" xảy ra khi a = 1; b = 2.

Giải:

Đặt $a=1-x$, với $x \geq 0$. Từ giả thiết suy ra $b=2+x$.

Ta có: C = $b^3-a^3-6b^2-a^2+9b$ = $(2+x)^3-(1-x)^3-6(2+x)^2-(1-x)^2+9(2+x)$

= x^3-2x^2+x = $x(x-1)^2\geq 0$ (vì $x \geq 0$).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x$ = 0 hoặc x = 1 tức a = 1, b = 2 hoặc a = 0, b = 3. Vậy C $\geq$ 0.

Ví dụ 3: Cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: A = $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\geq 6$.

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Giải:

Đặt: $a=1+x,\ b=1+y$, ($x, y \in$ R). Từ giả thiết suy ra: $c=1-x-y$.

Ta có: A = $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$