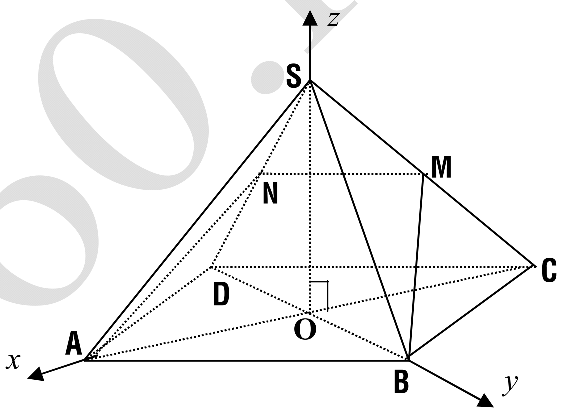
$d(B'D', A'B) = \dfrac{\left\|[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}].\overrightarrow{BB'}\right\|}{\left\|[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}]\right\|}$	

<u>*Bài toán 4*</u>. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi. AC cắt BD tại gốc toạ độ O. Biết $A(2;0;0)$; $B(0;1;0)$; $S(0;0;2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của SC .

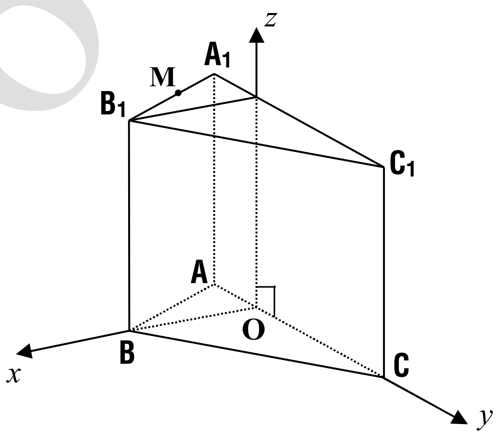
1. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM
2. Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại N.
   Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

(*trích đề thi tuyển sinh ĐH&CĐ khối A năm 2004*)

Hướng dẫn	**Bài giải**
Dựng hình : Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $O(0;0;0)$; $A(2;0;0)$; $B(0;1;0)$; $S(0;0;2\sqrt{2})$ Ta có : $C(-2;0;0)$; $D(0;-1;0)$; $M(-1;0;\sqrt{2})$ $\overrightarrow{SA} = (2;0;-2\sqrt{2})$; $\overrightarrow{BM} = (-1;-1;\sqrt{2})$	
1a.Tính góc giữa SA và BM Gọi α là góc giữa SA và BM Sử dụng công thức tính góc giữa hai đường thẳng.	Ta có : $\cos\alpha = \left\|\cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM})\right\| = \dfrac{\left\|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{SA}\right\|\left\|\overrightarrow{BM}\right\|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \alpha = 30^o$
1b. Tính khoảng cách giữa SA và BM Chứng minh SA và BM chéo nhau Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	$[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}] = (-2\sqrt{2};0;-2)$; $\overrightarrow{AB} = (-2;1;0)$ $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}].\overrightarrow{AB} = 4\sqrt{2} \neq 0$ $d(SA, BM) = \dfrac{\left\|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}].\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}]\right\|} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{8+4}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$
2. Tính thể tích khối chóp S.ABMN. Dễ dàng nhận thấy :	$MN // AB // CD \Rightarrow$ N là trung điểm của SD Toạ độ trung điểm N $\left(0;-\dfrac{1}{2};\sqrt{2}\right)$

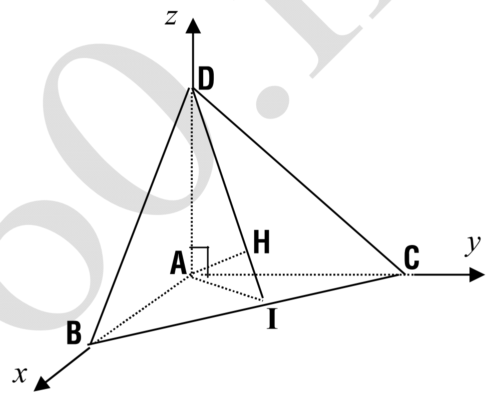
$MN = (ABM) \cap (SCD)$ $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN}$ *Trong đó* : $V_{S.ABM} = \frac{1}{6}\left\|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}].\overrightarrow{SB}\right\|$ $V_{S.AMN} = \frac{1}{6}\left\|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}].\overrightarrow{SN}\right\|$	$\overrightarrow{SA} = (2;0;-2\sqrt{2})$; $\overrightarrow{SM}(-1;0;-\sqrt{2})$ $\overrightarrow{SB} = (0;1;-2\sqrt{2})$; $\overrightarrow{SM}(-1;0;-\sqrt{2})$ $\Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = (0;4\sqrt{2};0)$ $V_{S.ABM} = \frac{1}{6}\left\|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}].\overrightarrow{SB}\right\| = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $V_{S.AMN} = \frac{1}{6}\left\|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}].\overrightarrow{SN}\right\| = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$
Kết luận	Vậy $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \sqrt{2}$ (đvtt)

<u>*Bài toán 5*</u> . Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với $A(0;-3;0)$; $B(4;0;0)$; $C(0;3;0)$; $B_1(4;0;4)$.
Tìm toạ độ các đỉnh $A_1;C_1$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1). Gọi M là trung điểm của A_1B_1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC_1. (*trích đề thi tuyển sinh ĐH&CĐ khối B năm 2005*)

Hướng dẫn	**Bài giải**
Dựng hình : Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $O(0;0;0)$; Với : $A(0;-3;0)$; $B(4;0;0)$; $C(0;3;0)$; $B_1(4;0;4)$ $\Rightarrow \begin{cases} A_1(0;-3;4) \\ C_1(0;3;4) \end{cases}$ Toạ độ trung điểm M của A_1B_1 $M\left(2;-\frac{3}{2};4\right)$	
Toạ độ hai đỉnh $A_1;C_1$.	Ta có : $A_1(0;-3;4) \in mp(Oyz)$ $C_1(0;3;4) \in mp(Oyz)$
Phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1) Viết phương trình mp (BCC_1B_1) Tìm bán kính của mặt cầu (S) $R = d(A,(BCC_1B_1))$	Vectơ pháp tuyến của mp (BCC_1B_1) $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}] = (12;16;0)$ Phương trình tổng quát của mp (BCC_1B_1): $(BCC_1B_1): 3x + 4y - 12 = 0$ Bán kính của mặt cầu (S) : $R = \frac{24}{5}$

Phương trình mặt cầu (S) :	(S) : $x^2+(y+3)^2+z^2=\dfrac{576}{25}$
Phương trình mặt phẳng (P) : Tìm vectơ pháp tuyến của (P) $\begin{cases} AM\subset(P) \\ BC_1 // (P)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC_1}]$ $\overrightarrow{AM}=\left(2;\dfrac{3}{2};4\right)$; $\overrightarrow{BC_1}=(-4;3;4)$	Vectơ pháp tuyến của (P) : $\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC_1}]=(-6;-24;12)$ Phương trình mặt phẳng (P) : $(P): x+4y-2z+12=0$

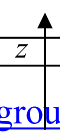
<u>Bài toán 6</u> . Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng(ABC); $AC=AD=4cm$; $AB=3cm$; $BC=5cm$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) (*trích đề thi tuyển sinh ĐH&CĐ khối D năm 2002*)

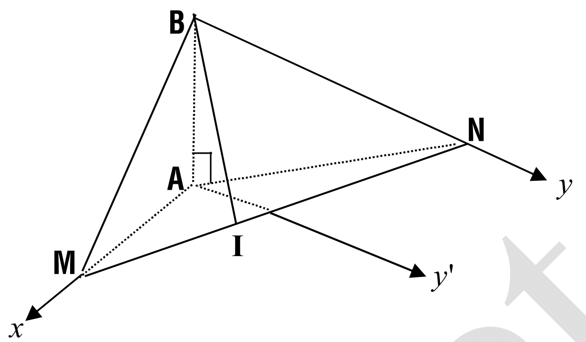
Hướng dẫn	**Bài giải**
Dựng hình : ΔABC có : $AB^2+AC^2=BC^2=25$ nên vuông tại A Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau $O\equiv A(0;0;0)$; $B(3;0;0)$; $C(0;4;0)$ $D(0;0;4)$; Tính : $AH=d\left(A,(BCD)\right)$	

Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (BCD)	Phương trình tổng quát của mặt phẳng (BCD) $(BCD): \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 4x+3y+3z-12=0$
Sử dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	$d\left(A,(BCD)\right)=\dfrac{\lvert -12\rvert}{\sqrt{16+9+9}}=\dfrac{12}{\sqrt{34}}=\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$

<u>Bài toán 7</u> . Cho hai nửa đường thẳng Ax và By vuông góc với nhau và nhận $AB=a$ $(a>0)$ là đoạn vuông góc chung. Lấy điểm M trên Ax và điểm N trên By sao cho $AM=BN=2a$. Xác định tâm I và tính theo a bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BI

Hướng dẫn	**Bài giải**
Dựng hình :	



Dựng $Ay' // By \Rightarrow Ax \perp Ay'$ Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Axy'z$ như sau : $A(0;0;0)$; $B(0;0;a)$; $M(2a;0;0)$ $N(0;2a;a)$ Toạ độ trung điểm I của MN $I\left(a\,;a\,;\dfrac{a}{2}\right)$	
1a. Xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN Chú ý : $\begin{cases} Ax \perp By \\ Ax \perp Ay' \end{cases}$	Hai tam giác AMN và BMN là hai tam giác vuông nhận MN là cạnh huyền nên trung điểm $I\left(a\,;a\,;\dfrac{a}{2}\right)$ của MN là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN
1b.Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN	Ta có : $\overrightarrow{MN} = a(-2\,;2\,;1)$ Bán kính mặt cầu : $R = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{3a}{2}$
2. Tính $d(AM, BI)$ Chứng minh AM và BI chéo nhau Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	Ta có : $\overrightarrow{AM} = (2a;0;0)$; $\overrightarrow{BI} = \left(a;a;-\dfrac{a}{2}\right)$; $\overrightarrow{AB} = (0;0;a)$ $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BI}] = (0;a^2;2a^2)$ $d(AM, BI) = \dfrac{\left\|[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BI}].\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BI}]\right\|} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

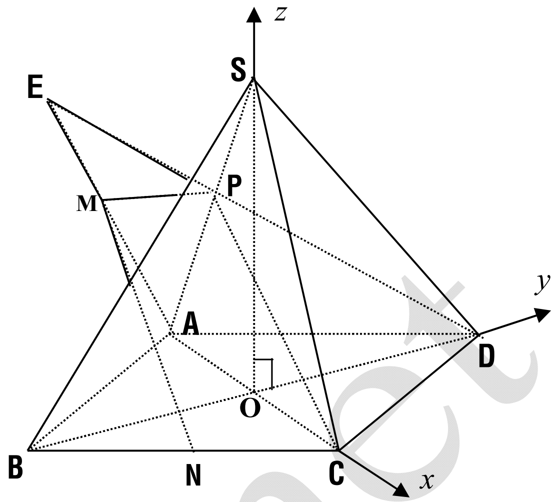
Bài toán 8 . Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC. (*trích đề thi tuyển sinh ĐH&CĐ khối B năm 2007*)

<table>
<tr><th>Hướng dẫn</th><th>Bài giải</th></tr>
<tr><td>

Dựng hình :
Gọi O là tâm của hình vuông ABCD $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau :
$O(0;0;0)$; $S(0;0;h)$;
$A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$; $C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$
$D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$; $B\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Toạ độ trung điểm P của SA
$P\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};\ 0\ ;\frac{h}{2}\right)$; $E\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};h\right)$
$M\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{h}{2}\right)$ $N\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$

</td><td>

$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4};0;-\frac{h}{2}\right)$; $\overrightarrow{BD}=(0;-a\sqrt{2};0)$
Vì : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}=0 \Rightarrow MN \perp BD$

</td></tr>
<tr><td>

Tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Chứng minh MN và AC chéo nhau

Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

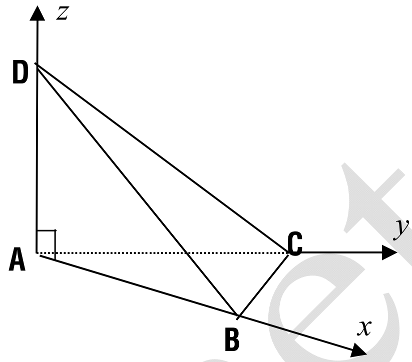
</td><td>

Ta có : $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]=\left(0;-\frac{ah\sqrt{2}}{2};0\right)$
$\overrightarrow{AM}=\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{h}{2}\right)$
Vì : $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AM}=\frac{a^2h}{4}\neq 0$
$\Rightarrow$ MN và AC chéo nhau
$d(MN,AC)=\frac{\left|[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AM}\right|}{\left|[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}]\right|}=\frac{\frac{a^2h}{4}}{\sqrt{\frac{a^2h^2}{2}}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

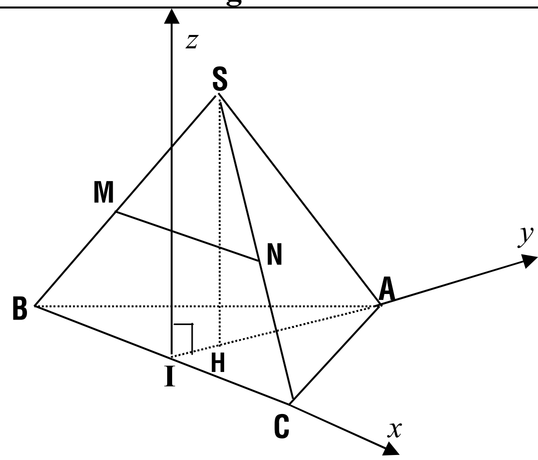
</td></tr>
</table>

<u>*Bài toán 9*</u> . Cho tứ diện ABCD, có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại A; $AD=a, AC=b, AB=c$.

a. Tính diện tích S của tam giác BCD theo a,b,c
b. Chứng minh rằng : $2S \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$

Hướng dẫn	Bài giải
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho A(0;0;0) Khi đó : $B(c;0;0)$; $C(0;b;0)$ $D(0;0;a)$ Ta có : $\overrightarrow{BC}=(-c;b;0)$ $\overrightarrow{BD}=(-c;0;a)$ $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(ac;ac;bc)$ Áp dụng bất đẳng thức Côsi : $a^2b^2+b^2c^2\geq 2ab^2c$ $b^2c^2+c^2a^2\geq 2abc^2$ $c^2a^2+a^2b^2\geq 2a^2bc$	 a. Tính diện tích S của tam giác BCD $S=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$ b. Chứng minh : $2S\geq\sqrt{abc(a+b+c)}$ Ta có : $\sqrt{abc(a+b+c)}=\sqrt{a^2bc+b^2ac+c^2ab}\leq$ $\leq\sqrt{a^2\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)+b^2\left(\frac{a^2+c^2}{2}\right)+c^2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)}$ $=\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=2S_{\Delta BCD}$

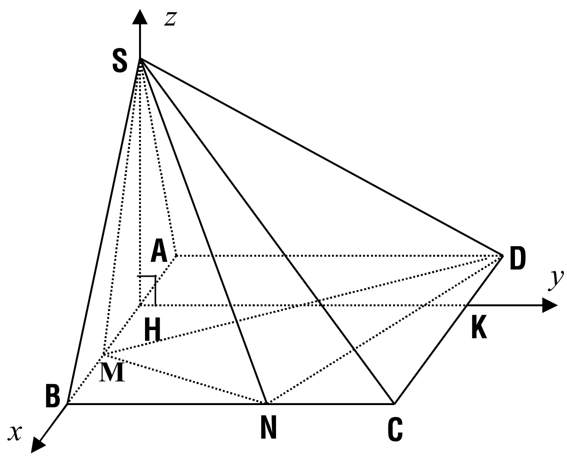
Bài toán 10 . Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S độ dài các cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN. Biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Hướng dẫn	Bài giải
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ Gọi I là trung điểm của BC Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho I(0;0;0) Khi đó : $A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$; $B\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$ $C\left(\frac{a}{2};0;0\right)$; $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h\right)$; $H\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$ $M\left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{12};\frac{h}{2}\right)$; $N\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{12};\frac{h}{2}\right)$	

$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{a}{4};-\frac{5a\sqrt{3}}{12};\frac{h}{2}\right)$ $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{a}{4};-\frac{5a\sqrt{3}}{12};\frac{h}{2}\right)$	+ Pháp vectơ của mp (AMN) : $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=\left(0;\frac{ah}{4};\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right)$

$\overrightarrow{SB}=\left(-\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{6};-h\right)$ $\overrightarrow{SC}=\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6};-h\right)$ $(AMN)\perp(SBC)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ $\Leftrightarrow-\frac{a^2h}{4}+\frac{15a^4}{24.6}=0\Leftrightarrow\frac{a^2h}{16}=\frac{15a^4}{24^2}$	+ Pháp vectơ của mp (SBC) : $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(0;-ah;\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$ Diện tích tam giác AMN : $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2h^2}{16}+\frac{75a^4}{24^2}}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15a^4}{24^2}+\frac{75a^4}{24^2}}=\frac{1}{48}\sqrt{90a^4}=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$ đvdt

<u>*Bài toán 11*</u> . Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$; $SA=a$; $SB=a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN (*trích đề thi tuyển sinh ĐH &CĐ khối B năm 2008*)

Hướng dẫn	**Bài giải**
Dựng hình : Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên AB $\Rightarrow$ SH $\perp$(ABCD) Ta có : $SA^2+SB^2=a^2+3a^2=AB^2$ $\Rightarrow\Delta SAB$ vuông tại S $\Rightarrow SM=a$ Do đó : ΔSAM đều $\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $H(0;0;0)$; S$\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; A$\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$; B$\left(\frac{3a}{2};0;0\right)$; D$\left(-\frac{a}{2};2a;0\right)$;	 + Thể tích khối chóp S.BMDN $V_{S.BMDN}=V_{SMNB}+V_{SMND}$