

Các dạng toán liên quan đến hàm số lượng giác

**DẠNG. Xét tính đơn điệu của hàm số lượng giác**

**Phương pháp chung:**

**Ở phần lý thuyết, với các hàm số lượng giác cơ bản, ta đã biết rằng:**

- Hàm số  $y = \sin x$  :
  - \* Đồng biến trên các khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .
  - \* Nghịch biến trên các khoảng  $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .
- Hàm số  $y = \cos x$  :
  - \* Đồng biến trên các khoảng  $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$ .
  - \* Nghịch biến trên các khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$ .
- Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên các khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .
- Hàm số  $y = \cot x$  nghịch biến trên các khoảng  $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$ .

**Với các hàm số lượng giác phức tạp, để xét tính đơn điệu của nó ta sử dụng định nghĩa.**

**Ví dụ 1.** Xét hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[-\pi; 0]$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Hàm số đồng biến trên các khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$  và  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .
- Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ ; nghịch biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .
- Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ ; đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$  và  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

**Cách 1:** Từ lý thuyết về các hàm số lượng giác cơ bản ở trên ta có hàm số  $y = \sin x$  nghịch biến trên khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$  và đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

**Cách 2:** Sử dụng máy tính cầm tay.

Do ở đề bài, các phương án A, B, C, D chỉ xuất hiện hai khoảng là  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$  và  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  nên ta sẽ dùng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

Ấn



Máy hiện  $f(X)$  thì ta nhập  $\sin X$ . START? Nhập  $-\pi$ ; END? Nhập 0. STEP? Nhập  $\frac{\pi}{10}$ .

	Math	Math	Math
1	X	F(X)	
2	-2.827	-0.054	
3	-2.513	-0.049	
		-3.141592654	
4	X	F(X)	
5	-2.199	-0.038	
6	-1.884	-0.032	
		-1.570796327	
7	X	F(X)	
8	-1.256	-0.021	
9	-0.942	-0.016	
		-0.6283185307	
10	X	F(X)	
11	-0.314	-5.163	
12		0	

Lúc này từ bảng giá trị của hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$  và đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

**Ví dụ 2.** Xét hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\pi; 0)$  và  $(0; \pi)$ .
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\pi; 0)$  và nghịch biến trên khoảng  $(0; \pi)$ .
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\pi; 0)$  và đồng biến trên khoảng  $(0; \pi)$ .
- D. Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng  $(-\pi; 0)$  và  $(0; \pi)$ .

**Lời giải**

**Chọn B.**

Theo lý thuyết ta có hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$  và nghịch biến trên khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$ . Từ đây ta có với  $k = 0$  hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên khoảng  $(-\pi; 0)$  và nghịch biến trên khoảng  $(0; \pi)$ .

Tiếp theo ta đến với hàm số  $y = \tan nx; (n \in \mathbb{Z}), \dots$  Ta có ví dụ 3.

**Ví dụ 3.** Xét sự biến thiên của hàm số  $y = \tan 2x$  trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .
- C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Lời giải**

## Chọn A.

Tập xác định của hàm số đã cho là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Hàm số  $y = \tan 2x$  tuần hoàn với chu kỳ  $\frac{\pi}{2}$ , dựa vào các phương án A; B; C; D thì ta sẽ xét tính đơn điệu của hàm số trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$ .

Dựa theo kết quả khảo sát sự biến thiên của hàm số  $y = \tan x$  ở phần lý thuyết ta có thể suy ra với hàm số  $y = \tan 2x$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  và  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

### STUDY TIP

Ở đây ta không chọn C vì hàm số không liên tục trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , hàm số bị gián đoạn tại  $x = \frac{\pi}{4}$  (tức là hàm số không xác định tại  $x = \frac{\pi}{4}$ ).

**Ví dụ 4.** Xét sự biến thiên của hàm số  $y = 1 - \sin x$  trên một chu kỳ tuần hoàn của nó. Trong các kết luận sau, kết luận nào sai?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ .
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ .

### Lời giải

## Chọn D.

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  và kết hợp với các phương án đề bài thì ta sẽ xét sự biến thiên của hàm số trên  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

Ta có hàm số  $y = \sin x$ :

\* Đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

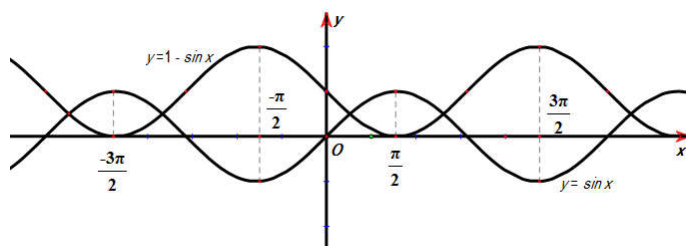
\* Nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ .

Từ đây suy ra hàm số  $y = 1 - \sin x$ :

\* Nghịch biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

\* Đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ . Từ đây ta chọn D.

Dưới đây là đồ thị của hàm số  $y = 1 - \sin x$  và hàm số  $y = \sin x$  trên  $\mathbb{R}$ .



**Ví dụ 5.** Xét sự biến thiên của hàm số  $y = \sin x - \cos x$ . Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ .

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ .

C. Hàm số đã cho có tập giá trị là  $[-1; 1]$ .

D. Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ .

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:**

Ta có  $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

Từ đây ta có thể loại đáp án C, do tập giá trị của hàm số là  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ .

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn

$$\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right].$$

Ta có:

\* Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ .

\* Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ . Từ đây ta chọn A.

**Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay**

Tương tự như ở ví dụ 1, ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

Ấn



Máy hiện  $f(X) =$  thì ta nhập  $\sin X - \cos X$ . Chọn STAR; TEND; STEP

phù hợp ta sẽ có kết quả như hình dưới:

1	4	7																								
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>F(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>-1.013</td> </tr> <tr> <td>0.7853</td> <td>-0.986</td> </tr> <tr> <td colspan="2">-0.7853981634</td> </tr> </tbody> </table>	X	F(X)	0	-1.013	0.7853	-0.986	-0.7853981634		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>F(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1.5707</td> <td>-0.972</td> </tr> <tr> <td>2.3561</td> <td>-0.958</td> </tr> <tr> <td>3.141592654</td> <td>-0.943</td> </tr> </tbody> </table>	X	F(X)	1.5707	-0.972	2.3561	-0.958	3.141592654	-0.943	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>F(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3.9269</td> <td>-0.929</td> </tr> <tr> <td>4.7123</td> <td>-0.914</td> </tr> <tr> <td>5.497787144</td> <td>-0.899</td> </tr> </tbody> </table>	X	F(X)	3.9269	-0.929	4.7123	-0.914	5.497787144	-0.899
X	F(X)																									
0	-1.013																									
0.7853	-0.986																									
-0.7853981634																										
X	F(X)																									
1.5707	-0.972																									
2.3561	-0.958																									
3.141592654	-0.943																									
X	F(X)																									
3.9269	-0.929																									
4.7123	-0.914																									
5.497787144	-0.899																									

Từ bảng giá trị của hàm số  $f(x)$  trên ta thấy khi  $x$  chạy từ  $-\frac{\pi}{4} \approx -0,785$  đến  $\frac{3\pi}{4} \approx 2,3561$  thì giá trị của hàm số tăng dần, tức là hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ .

Phân tích thêm: Khi  $x$  chạy từ  $\frac{3\pi}{4}$  đến  $\frac{7\pi}{4} \approx 5,49778$  thì giá trị của hàm số giảm dần, tức là hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ .

**STUDY TIP**

Ta chú ý ở đây có  $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ ,  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$  nên ta có thể suy ra STEP phù hợp. Trong bài gán

STEP =  $\frac{\pi}{4}$ .

**Ví dụ 6.** Chọn câu đúng?

- A. Hàm số  $y = \tan x$  luôn luôn tăng.
- B. Hàm số  $y = \tan x$  luôn luôn tăng trên từng khoảng xác định.
- C. Hàm số  $y = \tan x$  tăng trong các khoảng  $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$ .
- D. Hàm số  $y = \tan x$  tăng trong các khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$ .

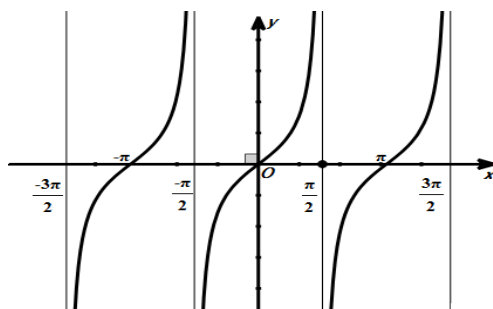
**Lời giải**

**Chọn B.**

Với A ta thấy hàm số  $y = \tan x$  không xác định tại mọi điểm  $x \in \mathbb{R}$  nên tồn tại các điểm làm cho hàm số bị gián đoạn nên hàm số không thể luôn tăng.

Với B ta thấy B đúng vì hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .

Từ đây loại C và D.



**Ví dụ 7.** Xét hai mệnh đề sau:

(I)  $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ : Hàm số  $y = \frac{1}{\sin x}$  giảm.

(II)  $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ : Hàm số  $y = \frac{1}{\cos x}$  giảm.

Mệnh đề đúng trong hai mệnh đề trên là:

- A.** Chỉ (I) đúng .      **B.** Chỉ (II) đúng .      **C.** Cả 2 sai .      **D.** Cả 2 đúng .

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:**

Như bài toán xét xem hàm số tăng hay giảm. Ta lấy  $x_1 < x_2 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

$$\text{Lúc này ta có } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{\sin x_2} - \frac{1}{\sin x_1} = \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2}$$

Ta thấy  $x_1 < x_2 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$  thì  $\sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow \sin x_1 - \sin x_2 > 0$

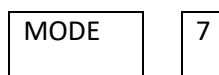
$0 > \sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 \cdot \sin x_2} > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ . Vậy  $y = \frac{1}{\sin x}$  là hàm tăng.

Tương tự ta có  $y = \frac{1}{\cos x}$  là hàm giảm. Vậy I sai, II đúng.

**Cách 2:**

Sử dụng lệnh TABLE để xét xem hàm số tăng hay giảm trên máy tính.

Với hàm  $\frac{1}{\sin x}$  ta nhập MODE 7: TABLE ( )



Nhập hàm  $f(x)$  như hình bên:

