

### Các dạng toán liên quan đến hàm số lượng giác

#### Dạng: Xét Tính Chẵn Lẻ Của Hàm Số Lượng Giác.

##### Định Nghĩa.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $D$ .

a, Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi  $x$  thuộc  $D$ , ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = f(x)$ .

b, Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi  $x$  thuộc  $D$ , ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .

#### STUDY TIP:

Để kết luận hàm số  $y = f(x)$  không chẵn không lẻ thì ta chỉ cần chỉ ra điểm  $x_0 \in D$  sao cho

$$\begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases} \text{ hoặc chỉ ra tập xác định của } f(x) \text{ không phải là tập đối xứng.}$$

#### Phương pháp chung:

**Bước 1:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số, khi đó

\* Nếu  $D$  là tập đối xứng (tức  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ ), thì ta thực hiện tiếp bước 2.

\* Nếu  $D$  không phải tập đối xứng (tức là  $\exists x \in D$  mà  $-x \notin D$ ) thì ta kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

**Bước 2:** Xác định  $f(-x)$ :

\* Nếu  $f(-x) = f(x), \forall x \in D$  thì kết luận hàm số là hàm số chẵn.

\* Nếu  $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$  thì kết luận hàm số là hàm số lẻ.

\* Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

#### Các kiến thức đã học về hàm lượng giác cơ bản:

1, Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số lẻ trên  $D = \mathbb{R}$ .

2, Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn trên  $D = \mathbb{R}$ .

3, Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ trên  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

4, Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số lẻ trên  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Ví dụ 1.** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

**A.**  $y = -2 \cos x$ .

**B.**  $y = -2 \sin x$ .

**C.**  $y = 2 \sin(-x)$ .

**D.**  $y = \sin x - \cos x$ .

#### Lời giải

##### Chọn A.

**Cách 1:** Với các kiến thức về tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác cơ bản ta có thể chọn luôn A.

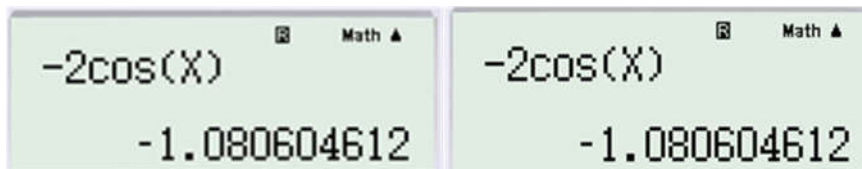
**Xét A:** Do tập xác định  $D = \mathbb{R}$  nên  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ .

Ta có  $f(-x) = -2 \cos(-x) = -2 \cos x = f(x)$ . Vậy hàm số  $y = -2 \cos x$  là hàm số chẵn.

**Cách 2:** Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp  $x$  và  $-x$ .

Với A: Nhập vào màn hình hàm số sử dụng CALC với trường hợp  $x=1$  (hình bên trái) và trường hợp  $x=-1$  (hình bên phải) đều đưa kết quả giống nhau. Vì  $f(x) = -f(x) \Rightarrow$  ta chọn luôn A.



### STUDY TIP:

Khi sử dụng máy tính cầm tay ta nên chú ý cả tập xác định của hàm số xem có phải là tập đối xứng không.

**Ví dụ 2.** Xét tính chẵn lẻ của hàm số  $y = \frac{\sin 2x}{2 \cos x - 3}$  thì  $y = f(x)$  là

A. Hàm số chẵn.

**B. Hàm số lẻ.**

C. Không chẵn không lẻ.

D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

**Chọn B.**

**Cách 1:** Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

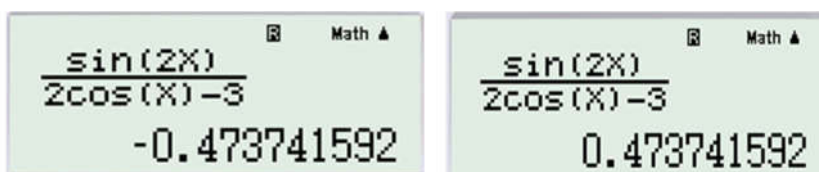
Ta có  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = \frac{\sin(-2x)}{2 \cos(-x) - 3} = \frac{-\sin 2x}{2 \cos x - 3} = -f(x). \text{ Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.}$$

**Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.**

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp  $x$  và  $-x$ .

Với A: Nhập biểu thức của hàm số vào màn hình sử dụng CALC với trường hợp  $x=1$  (hình bên trái) và trường hợp  $x=-1$  (hình bên phải), ta thấy  $f(1) = -f(-1) \Rightarrow$  hàm số đã cho là hàm số lẻ.



### STUDY TIP:

Trong bài toán này, tập xác định  $D = \mathbb{R}$  bởi  $2 \cos x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 3.** Xét tính chẵn lẻ của hàm số  $y = f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ , ta được  $y = f(x)$  là:

A. Hàm số chẵn.

B. Hàm số lẻ.

C. Không chẵn không lẻ.

**D. Vừa chẵn vừa lẻ.**

**Lời giải**

**Chọn D.**

**Cách 1:**

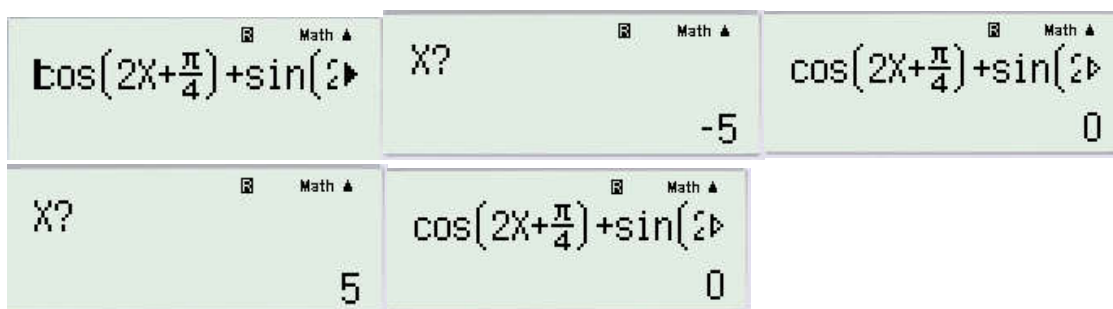
$$\text{Ta có } y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2x - \sin 2x) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 2x - \cos 2x) = 0.$$

Ta có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = 0$  vừa thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn, vừa thỏa mãn tính chất của hàm số lẻ, nên đây là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

**Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.**

Tương tự các bài toán trên ta nhập hàm số và sử dụng CALC để thử thì thấy cả hai trường hợp đều ra kết quả là 0. Mà  $y = 0$  vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ vừa là hàm hằng nên ta chọn **D**.



**STUDY TIP:**

Hàm số  $y = 0$  vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ vừa là hàm hằng.

**Ví dụ 4.** Cho hai hàm số  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 3\sin^2 x$  và  $g(x) = \sin\sqrt{1-x}$ . Kết luận nào sau đây đúng về tính chẵn lẻ của hai hàm số này?

- A.** Hai hàm số  $f(x); g(x)$  là hai hàm số lẻ.
- B.** Hàm số  $f(x)$  là hàm số chẵn; hàm số  $g(x)$  là hàm số lẻ.
- C.** Hàm số  $f(x)$  là hàm số lẻ; hàm số  $g(x)$  là hàm số không chẵn không lẻ.
- D.** Cả hai hàm số  $f(x); g(x)$  đều là hàm số không chẵn không lẻ.

**Lời giải**

**Chọn D.**

a, Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 3\sin^2 x$  có tập xác định là  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

Ta có  $x = -3 \in D$  nhưng  $-x = 3 \notin D$  nên  $D$  không có tính đối xứng. Do đó ta có kết luận hàm số  $f(x)$  không chẵn không lẻ.

b, Xét hàm số  $g(x) = \sin\sqrt{1-x}$  có tập xác định là  $D_2 = [1; +\infty)$ . Dễ thấy  $D_2$  không phải là tập đối xứng nên ta kết luận hàm số  $g(x)$  không chẵn không lẻ.

Vậy chọn **D**.



**Ví dụ 7.** Cho hàm số  $f(x) = |x|\sin x$ . Phát biểu nào sau đây là đúng về hàm số đã cho?

- A. Hàm số đã cho có tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- B. Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có trục xứng.
- D. Hàm số có tập giá trị là  $[-1; 1]$ .

*Lời giải*

**Chọn B.**

Hàm số đã cho xác định trên tập  $D = \mathbb{R}$  nên ta loại A.

Tiếp theo để xét tính đối xứng của đồ thị hàm số ta xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

$f(-x) = |-x|\sin(-x) = -|x|\sin x = -f(x)$ . Vậy đồ thị hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O. Vậy ta chọn đáp án B.

### STUDY TIP

Với bài toán này ta nên xét B và C trước thay vì xét lần lượt A, B, C, D.

**Ví dụ 8.** Xác định tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$  là hàm chẵn.

- A.  $m > 0$ .
- B.  $m < -1$ .
- C.  $m = 0$ .
- D.  $m = 2$ .

*Lời giải*

**Chọn C.**

**Cách 1:**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ . Suy ra  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Ta có  $f(-x) = 3m \sin 4(-x) + \cos 2(-x) = -3m \sin 4x + \cos 2x$ .

Để hàm số đã cho là hàm chẵn thì

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x), \forall x \in D &\Leftrightarrow -3m \sin 4x + \cos 2x = 3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D \\ &\Leftrightarrow 4m \sin 4x = 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m = 0. \end{aligned}$$

**Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.**

Với bài toán này ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để thử các giá trị. Với A và C, ta thử một trường hợp để loại hai đáp án còn lại, tương tự với B và D. Ở đây ta sử dụng CALC để thử tại giá trị  $x$  và  $-x$ .

Ví dụ: Nhập vào màn hình như hình bên.

Ấn CALC để gán các giá trị cho  $m$ . Ta thử với  $m = 0$  thì ấn

Chọn  $x$  bất kì, sau đó làm lại lần nữa và gán  $x$  cho  $-x$  ban đầu và so sánh (ở đây ta thử với  $x = 5$  và tại  $-5$ ).

0

=

```
3Msin(4X)+cos(2X)
0.8390715291
3Msin(4X)+cos(2X)
-0.8390715291
```

Ta thấy  $f(-x) = f(x)$ . Vậy C đúng. Ta chọn luôn C và loại các phương án còn lại.

$$3\sin(4x) + \cos(2x) = -0.8390715291$$

## BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

*Dạng: Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác*

**Câu 1.** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A.  $y = -2\cos x$  .      B.  $y = -2\sin x$  .      C.  $y = 2\sin(-x)$  .      D.  $y = \sin x - \cos x$  .

**Câu 2.** Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

- A.  $y = -2\cos x$  .      B.  $y = -2\sin x$  .      C.  $y = -2\sin^2 x + 2$  .      D.  $y = -2\cos x + 2$  .

**Câu 3.** Hàm số  $y = \sin x \cdot \cos^2 x + \tan x$  là:

- A. Hàm số chẵn.      B. Hàm số lẻ  
C. Vừa chẵn vừa lẻ.      D. Không chẵn không lẻ.

**Câu 4.** Xét tính chẵn lẻ của hàm số  $y = \frac{1 + \sin^2 2x}{1 + \cos 3x}$  ta kết luận hàm số đã cho là:

- A. Hàm số chẵn.      B. Hàm số lẻ .  
C. Vừa chẵn vừa lẻ      D. Không chẵn không lẻ

**Câu 5.** Xét các câu sau:

I. Hàm số  $y = \sin x \sqrt{\sin x}$  là hàm số lẻ.

II. Hàm số  $y = \cos x \sqrt{\cos x}$  là hàm số chẵn.

III. Hàm số  $y = \sin x \sqrt{\cos x}$  là hàm số lẻ.

Trong các câu trên, câu nào đúng?

- A. Chỉ (I).      B. Chỉ (II).      C. Chỉ (III) .      D. Cả 3 câu .

**Câu 6.** Hãy chỉ ra hàm số nào là hàm số lẻ:

- A.  $y = \sqrt{\sin x}$  .      B.  $y = \sin^2 x$  .  
C.  $y = \frac{\cot x}{\cos x}$  .      D.  $y = \frac{\tan x}{\sin x}$  .

**Câu 7.** Hàm số  $y = \frac{\tan 2x}{\sin^3 x}$  có tính chất nào sau đây?

- A. Hàm số chẵn.      B. Hàm số lẻ.  
C. Hàm không chẵn không lẻ.      D. Tập xác định  $D = \mathbb{R}$  .

**Câu 8.** Hãy chỉ ra hàm số không có tính chẵn lẻ