

I – ÔN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm bất đẳng thức

Các mệnh đề dạng " $a < b$ " hoặc " $a > b$ " được gọi là bất đẳng thức.

2. Bất đẳng thức hệ quả và bất đẳng thức tương đương

Nếu mệnh đề " $a < b \Rightarrow c < d$ " đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức $a < b$ và cũng viết là $a < b \Rightarrow c < d$.

Nếu bất đẳng thức $a < b$ là hệ quả của bất đẳng thức $c < d$ và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết là $a < b \Leftrightarrow c < d$.

3. Tính chất của bất đẳng thức

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức $a < b$ ta chỉ cần chứng minh $a - b < 0$. Tổng quát hơn, khi so sánh hai số, hai biểu thức hoặc chứng minh một bất đẳng thức, ta có thể sử dụng các tính chất của bất đẳng thức được tóm tắt trong bảng sau

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

Chú ý

Ta còn gặp các mệnh đề dạng $a \leq b$ hoặc $a \geq b$. Các mệnh đề dạng này cũng được gọi là bất đẳng thức. Để phân biệt, ta gọi chúng là các **bất đẳng thức không ngặt** và gọi các bất đẳng thức dạng $a < b$ hoặc $a > b$ là các **bất đẳng thức ngặt**. Các tính chất nêu trong bảng trên cũng đúng cho bất đẳng thức không ngặt.

II – BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN (BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI)

1. Bất đẳng thức Cô-si

Định lí

Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \forall a, b \geq 0. \quad (1)$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

2. Các hệ quả

Hệ quả 1

Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad \forall a > 0.$$

Hệ quả 2

Nếu x, y cùng dương và có tổng không đổi thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$.

Hệ quả 3

Nếu x, y cùng dương và có tích không đổi thì tổng $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$.

III – BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Điều kiện	Nội dung
	$ x \geq 0, x \geq x, x \geq -x$
$a > 0$	$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$ x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ hoặc } x \geq a$
	$ a - b \leq a + b \leq a + b $

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d.$ B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d.$
- C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - d > b - c.$ D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d.$

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a > \frac{b+c}{2}.$ B. $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a - c > b - a.$
- C. $a > b \Rightarrow a - c > b - c.$ D. $a > b \Rightarrow c - a > c - b.$

Câu 3. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$ B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$
- C. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$ D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow -ac > -bd.$

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < b \Rightarrow ac < bc.$ B. $a < b \Rightarrow ac > bc.$
- C. $c < a < b \Rightarrow ac < bc.$ D. $\begin{cases} a < b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow ac < bc.$

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$ B. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$
- C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$ D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{d}{c}.$

Câu 6. Nếu $a + 2c > b + 2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $-3a > -3b$. B. $a^2 > b^2$. C. $2a > 2b$. D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Câu 7. Nếu $a + b < a$ và $b - a > b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $ab > 0$. B. $b < a$. C. $a < b < 0$. D. $a > 0$ và $b < 0$.

Câu 8. Nếu $0 < a < 1$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\frac{1}{a} > \sqrt{a}$. B. $a > \frac{1}{a}$. C. $a > \sqrt{a}$. D. $a^3 > a^2$.

Câu 9. Cho hai số thực dương a, b . Bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\frac{a^2}{a^4 + 1} \geq \frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{ab}}{ab + 1} \geq \frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$. D. Tất cả đều đúng.

Câu 10. Cho $a, b > 0$ và $x = \frac{1+a}{1+a+a^2}$, $y = \frac{1+b}{1+b+b^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x > y$. B. $x < y$.
C. $x = y$. D. Không so sánh được.

Câu 11. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$.

- A. $m = 1 - 2\sqrt{2}$. B. $m = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $m = 1 - \sqrt{2}$. D. $m = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{5}{2}$. D. Không tồn tại m .

Câu 13. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ với $x > -1$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = \sqrt{2}$.

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{(x+2)(x+8)}{x}$ với $x > 0$.

- A. $m = 4$. B. $m = 18$. C. $m = 16$. D. $m = 6$.

Câu 15. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{1-x}$ với $1 > x > 0$.

- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 6$. D. $m = 8$.

Câu 16. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ với $0 < x < 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 8$. D. $m = 16$.

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 32}{4(x-2)}$ với $x > 2$.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{7}{2}$. C. $m = 4$. D. $m = 8$.

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{2x^3 + 4}{x}$ với $x > 0$.

- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 6$. D. $m = 10$.

Câu 19. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$ với $x > 0$.

- A. $m = 4$. B. $m = 6$. C. $m = \frac{13}{2}$. D. $m = \frac{19}{2}$.

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = (6x + 3)(5 - 2x)$ với $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

- A. $M = 0$. B. $M = 24$. C. $M = 27$. D. $M = 30$.

Câu 21. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ với $x \geq 1$.

- A. $M = 0$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ với $x > 0$.

- A. $M = \frac{1}{4}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ với $x > 0$.

- A. $M = 0$. B. $M = \frac{1}{4}$. C. $M = \frac{1}{2}$. D. $M = 1$.

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$.

- A. $m = \sqrt{2}, M = 3$. B. $m = 3, M = 3\sqrt{2}$.
C. $m = \sqrt{2}, M = 3\sqrt{2}$. D. $m = \sqrt{3}, M = 3$.

Câu 25. Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x) = 2\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x}$.

- A. $m = 0; M = 4\sqrt{5}$. B. $m = 2; M = 4$.
C. $m = 2; M = 2\sqrt{5}$. D. $m = 0; M = 2 + 2\sqrt{2}$.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \sqrt{7-2x} + \sqrt{3x+4}$.

- A. $m = 3$. B. $m = \sqrt{10}$. C. $m = 2\sqrt{3}$. D. $m = \frac{\sqrt{87}}{3}$.

Câu 27. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x + \sqrt{8-x^2}$.

- A. $M = 1$. B. $M = 2$. C. $M = 2\sqrt{2}$. D. $M = 4$.

Câu 28. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $[0; 3]$. B. $[0; 2]$. C. $[-2; 2]$. D. $\{-2; 2\}$.

Câu 29. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$. Tập giá trị của biểu thức $P = xy$ là:

- A. $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. B. $[-1; 1]$. C. $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$. D. $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

Câu 30. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $\sqrt[3]{2}$. B. 1. C. 8. D. $-\sqrt[3]{2}$.

Câu 31. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = x + y + xy$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $[0; +\infty)$. B. $[-\infty; 0]$. C. $[4; +\infty)$. D. $[0; 4]$.

Câu 32. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 3(x+y) + 4 = 0$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $\{2; 4\}$. B. $[0; 4]$. C. $[0; 2]$. D. $[2; 4]$.

Câu 33. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ là:

- A. 4. B. 5. C. 9. D. 2.

Câu 34. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 35. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x^4 + y^4 + \frac{1}{xy} = xy + 2$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy$ lần lượt là:

- A. $\frac{1}{2}$ và 1. B. 0 và 1. C. $\frac{1}{4}$ và 1. D. 1 và 2.

Câu 36. Cho hai số thực a, b thuộc khoảng $(0;1)$ và thỏa mãn $(a^3 + b^3)(a + b) - ab(a - 1)(b - 1) = 0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab$ bằng:

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 1.

Câu 37. Cho hai số thực x, y thuộc đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $x + y = 4xy$. Tập giá trị của biểu thức $P = xy$ là:

- A. $[0;1]$. B. $\left[0; \frac{1}{4}\right]$. C. $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. D. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

Câu 38. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + 2y - xy = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $S = x + 2y$ là

- A. 2. B. 4. C. 8. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 39. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y + xy \geq 7$. Giá trị nhỏ nhất của $S = x + 2y$ là:

- A. 8. B. 5. C. 7. D. -11.

Câu 40. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x + 3y \leq 7$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + xy$ là:

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 2.

Câu 41. Cho hai số thực x, y không âm và thỏa mãn $x^2 + 2y = 12$. Giá trị lớn nhất của $P = xy$ là:

- A. $\frac{13}{4}$. B. 4. C. 8. D. 13.

Câu 42. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x > y$ và $xy = 1000$. Biết biểu thức $F = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ đạt giá trị nhỏ

nhất khi $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$. Tính $P = \frac{a^2 + b^2}{1000}$.

- A. $P = 2$. B. $P = 3$. C. $P = 4$. D. $P = 5$.

Câu 43. Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất F_{\min} của biểu thức

$$F = x + y + \frac{1}{2x} + \frac{2}{y}.$$

- A. $F_{\min} = 4\frac{1}{2}$. B. $F_{\min} = 3\sqrt{2}$. C. $F_{\min} = 4\frac{1}{3}$. D. $F_{\min} = 4\frac{2}{3}$.

Câu 44. Cho $x > 8y > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + \frac{1}{y(x - 8y)}$ là

- A. 3. B. 6. C. 8. D. 9.

Câu 45. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x - 2} + \sqrt{y + 3})$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

- A. $[-1;7]$. B. $[3;7]$. C. $[3;7] \cup \{-1\}$. D. $[-7;7]$.

Câu 46. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a > 0, b > 0$ và $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất F_{\min} của biểu thức $F = \frac{4a+c}{b}$.

- A. $F_{\min} = 1$. B. $F_{\min} = 2$. C. $F_{\min} = 3$. D. $F_{\min} = 5$.

Câu 47. Cho ba số thực a, b, c không âm và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$ lần lượt là:

- A. 1 và 3. B. 2 và 4. C. 2 và 3. D. 3 và 4.

Câu 48. Cho ba số thực dương x, y, z . Biểu thức $P = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

- A. $\frac{11}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. 9.

Câu 49. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z})$ bằng:

- A. 12. B. 3. C. 5. D. $\frac{11}{2}$.

Câu 50. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}$ bằng:

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 1.

**BÀI
2.**

**BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ
HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**

I – KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1. Bất phương trình một ẩn

Bất phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) < g(x) \quad (f(x) \leq g(x)) \quad (1)$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x .

Ta gọi $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là vế trái của bất phương trình (1). Số thực x_0 sao cho $f(x_0) < g(x_0)$ ($f(x_0) \leq g(x_0)$) là mệnh đề đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình (1).

Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó, khi tập nghiệm rỗng thì ta nói bất phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Bất phương trình (1) cũng có thể viết lại dưới dạng sau: $g(x) > f(x)$ ($g(x) \geq f(x)$).

2. Điều kiện của một bất phương trình

Tương tự đối với phương trình, ta gọi các điều kiện của ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa là điều kiện xác định (hay gọi tắt là điều kiện) của bất phương trình (1).

3. Bất phương trình chứa tham số

Trong một bất phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là tham số. Giải và biện luận bất phương trình chứa tham số là xét xem với các giá trị nào của tham số bất phương trình vô nghiệm, bất phương trình có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

II – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng. Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

III – MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Bất phương trình tương đương

Ta đã biết hai bất phương trình có cùng tập nghiệm (có thể rỗng) là hai bất phương trình tương đương và dùng kí hiệu " \Leftrightarrow " để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.

Tương tự, khi hai hệ bất phương trình có cùng một tập nghiệm ta cũng nói chúng tương đương với nhau và dùng kí hiệu " \Leftrightarrow " để chỉ sự tương đương đó.

2. Phép biến đổi tương đương

Để giải một bất phương trình (hệ bất phương trình) ta liên tiếp biến đổi nó thành những bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương cho đến khi được bất phương trình (hệ bất phương trình) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay tập nghiệm. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.

3. Cộng (trừ)

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$$

4. Nhân (chia)

Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị dương (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) ta được một bất phương trình tương đương. Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị âm (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) và đổi chiều bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\begin{aligned} P(x) < Q(x) &\Leftrightarrow P(x) \cdot f(x) < Q(x) \cdot f(x), \quad f(x) > 0, \forall x \\ P(x) < Q(x) &\Leftrightarrow P(x) \cdot f(x) > Q(x) \cdot f(x), \quad f(x) < 0, \forall x \end{aligned}$$

5. Bình phương

Bình phương hai vế của một bất phương trình có hai vế không âm mà không làm thay đổi điều kiện của nó ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x), \quad P(x) \geq 0, Q(x) \geq 0, \forall x$$

6. Chú ý

Trong quá trình biến đổi một bất phương trình thành bất phương trình tương đương cần chú ý những điều sau

1) Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình thì điều kiện của bất phương trình có thể bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của một bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.

2) Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình $P(x) < Q(x)$ với biểu thức $f(x)$ ta cần lưu ý đến điều kiện về dấu của $f(x)$. Nếu $f(x)$ nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm thì ta phải lần lượt xét từng trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến hệ bất phương trình.

3) Khi giải bất phương trình $P(x) < Q(x)$ mà phải bình phương hai vế thì ta lần lượt xét hai trường hợp

- a) $P(x), Q(x)$ cùng có giá trị không âm, ta bình phương hai vế bất phương trình.
b) $P(x), Q(x)$ cùng có giá trị âm ta viết

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow -Q(x) < -P(x)$$

rồi bình phương hai vế bất phương trình mới.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{2-x} + x < 2 + \sqrt{1-2x}$.

- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \in (-\infty; 2]$. C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. D. $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 2. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $x + \frac{x-1}{\sqrt{x+5}} > 2 - \sqrt{4-x}$.

- A. $x \in [-5; 4]$. B. $x \in (-5; 4]$. C. $x \in [4; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; -5)$.

Câu 3. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{\frac{x+1}{(x-2)^2}} < x+1$.

- A. $x \in [-1; +\infty)$. B. $x \in (-1; +\infty)$. C. $x \in [-1; +\infty) \setminus \{2\}$. D. $x \in (-1; +\infty) \setminus \{2\}$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x-m} - \sqrt{6-2x}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

- A. $m = 3$. B. $m < 3$. C. $m > 3$. D. $m < \frac{1}{3}$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{m-2x} - \sqrt{x+1}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

- A. $m < -2$. B. $m > 2$. C. $m > -\frac{1}{2}$. D. $m > -2$.

Vấn đề 2. CẶP BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Câu 6. Bất phương trình $2x + \frac{3}{2x-4} < 3 + \frac{3}{2x-4}$ tương đương với

- A. $2x < 3$. B. $x < \frac{3}{2}$ và $x \neq 2$. C. $x < \frac{3}{2}$. D. Tất cả đều đúng.

Câu 7. Bất phương trình $2x + \frac{3}{2x-4} < 5 + \frac{3}{2x-4}$ tương đương với:

- A. $2x < 5$. B. $x < \frac{5}{2}$ và $x \neq 2$. C. $x < \frac{5}{2}$. D. Tất cả đều đúng.

Câu 8. Bất phương trình $2x-1 \geq 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

- A. $2x-1 + \frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x-3}$. B. $2x-1 - \frac{1}{x+3} \geq -\frac{1}{x+3}$.

- C. $(2x-1)\sqrt{x-2018} \geq \sqrt{x-2018}$. D. $\frac{2x-1}{\sqrt{x-2018}} \geq \frac{1}{\sqrt{x-2018}}$.

Câu 9. Cặp bất phương trình nào sau đây là tương đương?

- A. $x-2 \leq 0$ và $x^2(x-2) \leq 0$. B. $x-2 < 0$ và $x^2(x-2) > 0$.
C. $x-2 < 0$ và $x^2(x-2) < 0$. D. $x-2 \geq 0$ và $x^2(x-2) \geq 0$.

Câu 10. Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x+5 > 0$?

- A. $(x-1)^2(x+5) > 0$. B. $x^2(x+5) > 0$.
C. $\sqrt{x+5}(x+5) > 0$. D. $\sqrt{x+5}(x-5) > 0$.

Câu 11. Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x} \leq 0$ tương đương với

- A. $\sqrt{x(x+1)^2} \leq 0$. B. $(x+1)\sqrt{x} < 0$. C. $(x+1)^2\sqrt{x} \leq 0$. D. $(x+1)^2\sqrt{x} < 0$.

Câu 12. Bất phương trình $\sqrt{x-1} \geq x$ tương đương với

- A. $(1-2x)\sqrt{x-1} \geq x(1-2x)$. B. $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1)$.
C. $(1-x^2)\sqrt{x-1} \geq x(1-x^2)$. D. $x\sqrt{x-1} \leq x^2$.

Câu 13. Với giá trị nào của a thì hai bất phương trình $(a+1)x-a+2 > 0$ và $(a-1)x-a+3 > 0$ tương đương:

- A. $a=1$. B. $a=5$. C. $a=-1$. D. $a=2$.

Câu 14. Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $(m+2)x \leq m+1$ và $3m(x-1) \leq -x-1$ tương đương:

- A. $m=-3$. B. $m=-2$. C. $m=-1$. D. $m=3$.

Câu 15. Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $(m+3)x \geq 3m-6$ và $(2m-1)x \leq m+2$ tương đương:

- A. $m=1$. B. $m=0$. C. $m=4$. D. $m=0$ hoặc $m=4$.

Vấn đề 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Câu 16. Bất phương trình $ax+b > 0$ vô nghiệm khi:

- A. $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Câu 17. Bất phương trình $ax+b > 0$ có tập nghiệm là \mathbb{R} khi:

- A. $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Câu 18. Bất phương trình $ax+b \leq 0$ vô nghiệm khi:

- A. $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Câu 19. Tập nghiệm S của bất phương trình $5x-1 \geq \frac{2x}{5}+3$ là:

- A. $S = \mathbb{R}$. B. $S = (-\infty; 2)$. C. $S = \left[-\frac{5}{2}; +\infty\right)$. D. $S = \left[\frac{20}{23}; +\infty\right)$.

Câu 20. Bất phương trình $\frac{3x+5}{2}-1 \leq \frac{x+2}{3}+x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên lớn hơn -10 ?

- A. 4. B. 5. C. 9. D. 10.

Câu 21. Tập nghiệm S của bất phương trình $(1-\sqrt{2})x < 3-2\sqrt{2}$ là:

- A. $S = (-\infty; 1-\sqrt{2})$. B. $S = (1-\sqrt{2}; +\infty)$.
C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = \emptyset$.

Câu 22. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $x(2-x) \geq x(7-x)-6(x-1)$ trên đoạn $[-10; 10]$ bằng:

- A. 5. B. 6. C. 21. D. 40.

Câu 23. Bất phương trình $(2x-1)(x+3)-3x+1 \leq (x-1)(x+3)+x^2-5$ có tập nghiệm

- A. $S = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$. B. $S = \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = \emptyset$.

Câu 24. Tập nghiệm S của bất phương trình $5(x+1)-x(7-x) > -2x$ là:

- A. $S = \mathbb{R}$. B. $S = \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$. C. $S = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$. D. $S = \emptyset$.

Câu 25. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x+\sqrt{3})^2 \geq (x-\sqrt{3})^2 + 2$ là:

- A. $S = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}; +\infty\right)$. B. $S = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}; +\infty\right)$. C. $S = \left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{6}\right]$. D. $S = \left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

Câu 26. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-1)^2 + (x-3)^2 + 15 < x^2 + (x-4)^2$ là:

- A. $S = (-\infty; 0)$. B. $S = (0; +\infty)$. C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = \emptyset$.

Câu 27. Tập nghiệm S của bất phương trình $x + \sqrt{x} < (2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)$ là:

- A. $S = (-\infty; 3)$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = [3; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 3]$.

Câu 28. Tập nghiệm S của bất phương trình $x + \sqrt{x-2} \leq 2 + \sqrt{x-2}$ là:

- A. $S = \emptyset$. B. $S = (-\infty; 2]$. C. $S = \{2\}$. D. $S = [2; +\infty)$.

Câu 29. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{x-2}{\sqrt{x-4}} \leq \frac{4}{\sqrt{x-4}}$ bằng:

- A. 15. B. 11. C. 26. D. 0.

Câu 30. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-3)\sqrt{x-2} \geq 0$ là:

- A. $S = [3; +\infty)$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = \{2\} \cup [3; +\infty)$. D. $S = \{2\} \cup (3; +\infty)$.

Câu 31. Bất phương trình $(m-1)x > 3$ vô nghiệm khi

- A. $m \neq 1$. B. $m < 1$. C. $m = 1$. D. $m > 1$.

Câu 32. Bất phương trình $(m^2 - 3m)x + m < 2 - 2x$ vô nghiệm khi

- A. $m \neq 1$. B. $m \neq 2$. C. $m = 1, m = 2$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - m)x < m$ vô nghiệm.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 34. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - m)x + m < 6x - 2$ vô nghiệm. Tổng các phần tử trong S bằng:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx - 2 \leq x - m$ vô nghiệm.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 36. Bất phương trình $(m^2 + 9)x + 3 \geq m(1 - 6x)$ nghiệm đúng với mọi x khi

- A. $m \neq 3$. B. $m = 3$. C. $m \neq -3$. D. $m = -3$.

Câu 37. Bất phương trình $4m^2(2x-1) \geq (4m^2 + 5m + 9)x - 12m$ nghiệm đúng với mọi x khi

- A. $m = -1$. B. $m = \frac{9}{4}$. C. $m = 1$. D. $m = -\frac{9}{4}$.

Câu 38. Bất phương trình $m^2(x-1) \geq 9x + 3m$ nghiệm đúng với mọi x khi

- A. $m = 1$. B. $m = -3$. C. $m = \emptyset$. D. $m = -1$.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(x+m)m+x > 3x+4$ có tập nghiệm là $(-m-2; +\infty)$.

- A. $m = 2$. B. $m \neq 2$. C. $m > 2$. D. $m < 2$.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(x-m) \geq x-1$ có tập nghiệm là $(-\infty; m+1]$.

- A. $m = 1$. B. $m > 1$. C. $m < 1$. D. $m \geq 1$.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m(x-1) < 2x-3$ có nghiệm.

- A. $m \neq 2$. B. $m > 2$. C. $m = 2$. D. $m < 2$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m(x-1) < 3-x$ có nghiệm.

- A. $m \neq 1$. B. $m = 1$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \neq 3$.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(m^2+m-6)x \geq m+1$ có nghiệm.

- A. $m \neq 2$. B. $m \neq 2$ và $m \neq 3$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \neq 3$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x-1 < mx+m$ có nghiệm.

- A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = 0; m = 1$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 45. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $mx+6 < 2x+3m$ với $m < 2$. Hỏi tập hợp nào sau đây là phần bù của tập S ?

- A. $(3; +\infty)$. B. $[3; +\infty)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(-\infty; 3]$.

Câu 46. Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(2x-1) \geq 2x+1$ có tập nghiệm là $[1; +\infty)$.

- A. $m = 3$ B. $m = 1$ C. $m = -1$ D. $m = -2$.

Câu 47. Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2x-m < 3(x-1)$ có tập nghiệm là $(4; +\infty)$.

- A. $m \neq 1$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m > 1$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx+4 > 0$ nghiệm đúng với mọi $|x| < 8$.

- A. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.
C. $m \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m^2(x-2)-mx+x+5 < 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2018; 2]$.

- A. $m < \frac{7}{2}$. B. $m = \frac{7}{2}$. C. $m > \frac{7}{2}$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m^2(x-2)+m+x \geq 0$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$.

- A. $m \geq -2$. B. $m = -2$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -2$.

Vấn đề 4. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Câu 51. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+1 < x-2 \end{cases}$ là:

- A. $S = (-\infty; -3)$. B. $S = (-\infty; 2)$. C. $S = (-3; 2)$. D. $S = (-3; +\infty)$.

Câu 52. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} < -x+1 \\ \frac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases}$ là:

- A. $S = \left(-2; \frac{4}{5}\right)$. B. $S = \left(\frac{4}{5}; +\infty\right)$. C. $S = (-\infty; -2)$. D. $S = (-2; +\infty)$.

Câu 53. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < -x+1 \\ 3+x > \frac{5-2x}{2} \end{cases}$ là:

- A. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = \left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. D. $S = \emptyset$.

Câu 54. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1 < -x+2017 \\ 3+x > \frac{2018-2x}{2} \end{cases}$ là:

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \left(\frac{2012}{8}; \frac{2018}{3}\right)$. C. $S = \left(-\infty; \frac{2012}{8}\right)$. D. $S = \left(\frac{2018}{3}; +\infty\right)$.

Câu 55. Tập $S = \left[-1; \frac{3}{2}\right)$ là tập nghiệm của hệ bất phương trình sau đây ?

- A. $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$.

Câu 56. Tập nghiệm S của bất phương trình $\begin{cases} 2(x-1) < x+3 \\ 2x \leq 3(x+1) \end{cases}$ là:

- A. $S = (-3; 5)$. B. $S = (-3; 5]$. C. $S = [-3; 5)$. D. $S = [-3; 5]$.

Câu 57. Biết rằng bất phương trình $\begin{cases} x-1 < 2x-3 \\ \frac{5-3x}{2} \leq x-3 \\ 3x \leq x+5 \end{cases}$ có tập nghiệm là một đoạn $[a; b]$. Hỏi $a+b$ bằng:

- A. $\frac{11}{2}$. B. 8. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{47}{10}$.

Câu 58. Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+25 \end{cases}$ là:

- A. Vô số. B. 4. C. 8. D. 0.

Câu 59. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\begin{cases} 5x-2 < 4x+5 \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases}$ bằng:

- A. 21. B. 27. C. 28. D. 29.

Câu 60. Cho bất phương trình $\begin{cases} (1-x)^2 \leq 8-4x+x^2 \\ (x+2)^3 < x^3+6x^2+13x+9 \end{cases}$. Tổng nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm

nguyên nhỏ nhất của bất phương trình bằng:

- A. 2. B. 3. C. 6. D. 7.

Câu 61. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-m < 2 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m < -\frac{3}{2}$. B. $m \leq -\frac{3}{2}$. C. $m > -\frac{3}{2}$. D. $m \geq -\frac{3}{2}$.

Câu 62. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x-6) < -3 \\ \frac{5x+m}{2} > 7 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > -11$. B. $m \geq -11$. C. $m < -11$. D. $m \leq -11$.

Câu 63. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-1 \leq 0 \\ x-m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > 1$. B. $m = 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.

Câu 64. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ (m^2+1)x < 4 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > 1$. B. $m < 1$. C. $m < -1$. D. $-1 < m < 1$.

Câu 65. Hệ bất phương trình $\begin{cases} m(mx-1) < 2 \\ m(mx-2) \geq 2m+1 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m < \frac{1}{3}$. B. $0 \neq m < \frac{1}{3}$. C. $m \neq 0$. D. $m < 0$.

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1 \geq 3 \\ x-m \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m > 2$. B. $m = 2$. C. $m \leq 2$. D. $m \geq 2$.

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} m^2x \geq 6-x \\ 3x-1 \leq x+5 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = \pm 1$. D. $m \geq 1$.

Câu 68. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2+7x+1 \\ 2m \leq 8+5x \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m = \frac{72}{13}$. B. $m > \frac{72}{13}$. C. $m < \frac{72}{13}$. D. $m \geq \frac{72}{13}$.

Câu 69. Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} mx \leq m-3 \\ (m+3)x \geq m-9 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m = 1$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = -1$.

Câu 70. Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2m(x+1) \geq x+3 \\ 4mx+3 \geq 4x \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m = \frac{5}{2}$. B. $m = \frac{3}{4}$. C. $m = \frac{3}{4}; m = \frac{5}{2}$. D. $m = -1$.

Câu 71. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+4 > x+9 \\ 1-2x \leq m-3x+1 \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > \frac{5}{2}$. B. $m \geq \frac{5}{2}$. C. $m < \frac{5}{2}$. D. $m \leq \frac{5}{2}$.

Câu 72. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+7 \geq 8x+1 \\ m+5 < 2x \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > -3$. B. $m \geq -3$. C. $m < -3$. D. $m \leq -3$.

Câu 73. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2+7x+1 \\ 2m \leq 8+5x \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > \frac{72}{13}$. B. $m \geq \frac{72}{13}$. C. $m < \frac{72}{13}$. D. $m \leq \frac{72}{13}$.

Câu 74. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+5 \geq x-1 \\ (x+2)^2 \leq (x-1)^2+9 \\ mx+1 > (m-2)x+m \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > 3$. B. $m \geq 3$. C. $m < 3$. D. $m \leq 3$.

Câu 75. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2(x-3) < 5(x-4) \\ mx+1 \leq x-1 \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m > 1$. B. $m \geq 1$. C. $m < 1$. D. $m \leq 1$.

**BÀI
3.**

DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I – ĐỊNH LÝ VỀ DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

1. Nhị thức bậc nhất

Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.

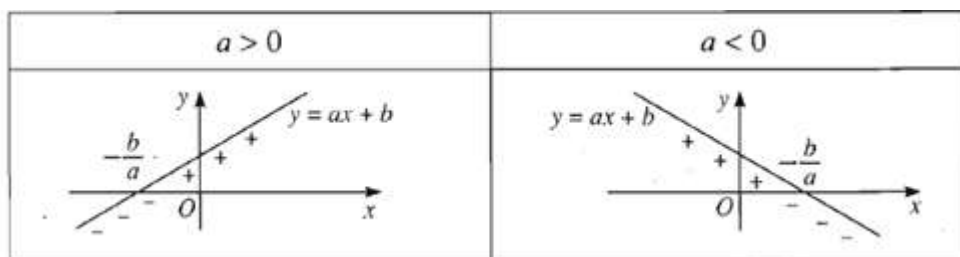
2. Dấu của nhị thức bậc nhất

Định lý

Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy giá trị trong khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

x	$-\infty \quad -\frac{b}{a} \quad +\infty$
$f(x) = ax + b$	trái dấu với a 0 cùng dấu với a

Minh họa bằng đồ thị



II – XÉT DẤU TÍCH, THƯƠNG CÁC NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Giả sử $f(x)$ là một tích của những nhị thức bậc nhất. Áp dụng định lý về dấu của nhị thức bậc nhất có thể xét dấu từng nhân tử. Lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức bậc nhất có mặt trong $f(x)$ ta suy ra được dấu của $f(x)$. Trường hợp $f(x)$ là một thương cũng được xét tương tự.

III – ÁP DỤNG VÀO GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Giải bất phương trình $f(x) > 0$ thực chất là xét xem biểu thức $f(x)$ nhận giá trị dương với những giá trị nào của x (do đó cũng biết $f(x)$ nhận giá trị âm với những giá trị nào của x), làm như vậy ta nói đã xét dấu biểu thức $f(x)$.

1. Bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ. Giải bất phương trình $\frac{1}{1-x} \geq 1$.

Giải.

Ta biến đổi tương đương bất phương trình đã cho

$$\frac{1}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 0$$

Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x}{1-x}$

Ta suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là $0 \leq x < 1$.

2. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ. Giải bất phương trình $|-2x+1| + x - 3 < 5$.

Giải.

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có

$$|-2x+1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{neu } -2x+1 \geq 0 \\ -(-2x+1) & \text{neu } -2x+1 < 0. \end{cases}$$

Do đó, ta xét phương trình trong hai khoảng

a) Với $x \leq \frac{1}{2}$ ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ (-2x+1) + x - 3 < 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ -x < 7 \end{cases}$.

Hệ này có nghiệm là $-7 < x \leq \frac{1}{2}$.

b) Với $x > \frac{1}{2}$ ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ (2x-1) + x - 3 < 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 3 \end{cases}$.

Hệ này có nghiệm là $\frac{1}{2} < x < 3$.

Tổng hợp lại tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp của hai khoảng $\left[-7; \frac{1}{2}\right]$ và $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

Kết luận. Bất phương trình đã cho có nghiệm là $-7 < x < 3$.

Bằng cách áp dụng tính chất của giá trị tuyệt đối ta có thể dễ dàng giải các bất phương trình dạng $|f(x)| \leq a$ và $|f(x)| \geq a$ với $a > 0$ đã cho.

Ta có

$$|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a$$
$$|f(x)| \geq a \Leftrightarrow f(x) \leq -a \text{ hoặc } f(x) \geq a \quad (a > 0)$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. XÉT DẤU NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Câu 1. Cho biểu thức $f(x) = 2x - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x) \geq 0$ là

- A. $x \in [2; +\infty)$. B. $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $x \in (-\infty; 2]$. D. $x \in (2; +\infty)$.

Câu 2. Cho biểu thức $f(x) = (x+5)(3-x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \leq 0$ là

- A. $x \in (-\infty; 5) \cup (3; +\infty)$. B. $x \in (3; +\infty)$.
C. $x \in (-5; 3)$. D. $x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.

Câu 3. Cho biểu thức $f(x) = x(x-2)(3-x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) < 0$ là

- A. $x \in (0; 2) \cup (3; +\infty)$. B. $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.
C. $x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3)$.

Câu 4. Cho biểu thức $f(x) = 9x^2 - 1$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x) < 0$ là

- A. $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$. B. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
C. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 5. Cho biểu thức $f(x) = (2x-1)(x^3-1)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

- A. $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. B. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.
C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$. D. $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 6. Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{3x-6}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x) \leq 0$ là

- A. $x \in (-\infty; 2]$. B. $x \in (-\infty; 2)$. C. $x \in (2; +\infty)$. D. $x \in [2; +\infty)$.

Câu 7. Cho biểu thức $f(x) = \frac{(x+3)(2-x)}{x-1}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) > 0$ là

- A. $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. B. $x \in (-3; 1) \cup (2; +\infty)$.
C. $x \in (-3; 1) \cup (1; 2)$. D. $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 2)$.

Câu 8. Cho biểu thức $f(x) = \frac{(4x-8)(2+x)}{4-x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình

$f(x) \geq 0$ là

- A. $x \in (-\infty; -2] \cup [2; 4)$. B. $x \in (3; +\infty)$.
C. $x \in (-2; 4)$. D. $x \in (-2; 2) \cup (4; +\infty)$.

Câu 9. Cho biểu thức $f(x) = \frac{x(x-3)}{(x-5)(1-x)}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình

$f(x) \geq 0$ là

- A. $x \in (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$. B. $x \in (-\infty; 0] \cup (1; 5)$.
C. $x \in [0; 1) \cup [3; 5)$. D. $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 5)$.

Câu 10. Cho biểu thức $f(x) = \frac{4x-12}{x^2-4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \leq 0$ là

- A. $x \in (0; 3] \cup (4; +\infty)$. B. $x \in (-\infty; 0] \cup [3; 4)$.
C. $x \in (-\infty; 0) \cup [3; 4)$. D. $x \in (-\infty; 0) \cup (3; 4)$.

Câu 11. Cho biểu thức $f(x) = \frac{2-x}{x+1} + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình

$f(x) < 0$ là

- A. $x \in (-\infty; -1)$. B. $x \in (-1; +\infty)$.
C. $x \in (-4; -1)$. D. $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$.

Câu 12. Cho biểu thức $f(x) = 1 - \frac{2-x}{3x-2}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình

$f(x) \leq 0$ là

- A. $x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$. B. $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.
C. $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right)$. D. $x \in (-\infty; 1) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Câu 13. Cho biểu thức $f(x) = \frac{-4}{3x+1} - \frac{3}{2-x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình

$f(x) > 0$ là

- A. $x \in \left(-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup [2; +\infty)$. B. $x \in \left(-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.
C. $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right]$. D. $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}; 2\right)$.

Câu 14. Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} - \frac{3}{x+3}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình

$f(x) < 0$ là

- A. $x \in (-12; -4) \cup (-3; 0)$. B. $x \in \left(-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.
C. $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right]$. D. $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}; 2\right)$.

Câu 15. Cho biểu thức $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên âm của x thỏa mãn bất

phương trình $f(x) < 1$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Vấn đề 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $(2x+8)(1-x) > 0$ có dạng $(a;b)$. Khi đó $b-a$ bằng

- A. 3. B. 5. C. 9. D. không giới hạn.

Câu 17. Tập nghiệm $S = (-4;5)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A. $(x+4)(x+5) < 0$. B. $(x+4)(5x-25) < 0$.
C. $(x+4)(5x-25) \geq 0$. D. $(x-4)(x-5) < 0$.

Câu 18. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $(x+3)(x-1) \leq 0$ là

- A. 1. B. -4. C. -5. D. 4.

Câu 19. Tập nghiệm $S = [0;5]$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây ?

- A. $x(x-5) < 0$. B. $x(x-5) \leq 0$. C. $x(x-5) \geq 0$. D. $x(x-5) > 0$.

Câu 20. Nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $x(x-2)(x+1) > 0$ là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 21. Tập nghiệm $S = (-\infty;3) \cup (5;7)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây ?

- A. $(x+3)(x-5)(14-2x) \leq 0$. B. $(x-3)(x-5)(14-2x) > 0$.
C. $(x-3)(x-5)(14-2x) < 0$. D. $(x+3)(x-5)(14-2x) < 0$.

Câu 22. Hỏi bất phương trình $(2-x)(x+1)(3-x) \leq 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên dương ?

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 23. Tích của nghiệm nguyên âm lớn nhất và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình $(3x-6)(x-2)(x+2)(x-1) > 0$ là

- A. -9. B. -6. C. -4. D. 8.

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $2x(4-x)(3-x)(3+x) > 0$ là

- A. Một khoảng B. Hợp của hai khoảng.
C. Hợp của ba khoảng. D. Toàn trục số.

Câu 25. Nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $(x-1)\sqrt{x(x+2)} \geq 0$ là

- A. $x = -2$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Vấn đề 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Câu 26. Bất phương trình $\frac{2-x}{2x+1} \geq 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$. B. $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right)$. C. $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right]$. D. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(3-x)(x-2)}{x+1} \leq 0$ là

- A. $S = (-1; 2] \cup [3; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1) \cup [2; 3]$.
C. $S = [-1; 2] \cup [3; +\infty)$. D. $S = (-1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 28. Bất phương trình $\frac{3}{2-x} < 1$ có tập nghiệm là

- A. $S = (-1; 2)$. B. $S = [-1; 2)$.
C. $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. D. $S = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Câu 29. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 4} \geq 1$ là

- A. $S = (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$. B. $S = (-2; 1] \cup (2; +\infty)$.
C. $S = [-2; 1) \cup (2; +\infty)$ D. $S = (-2; 1] \cup [2; +\infty)$.

Câu 30. Bất phương trình $\frac{4}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. B. $S = (-\infty; -3) \cup (-1; 1)$.
C. $S = (-3; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $S = (-3; 1) \cup (-1; +\infty)$.

Câu 31. Bất phương trình $\frac{3}{1-x} \geq \frac{5}{2x+1}$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right)$. B. $S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{11}\right) \cup (1; +\infty)$.
C. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right)$. D. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{11}; 1\right)$.

Câu 32. Bất phương trình $\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x-1} \leq 2$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left(-1; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$. B. $S = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.
C. $S = \left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. D. $S = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 33. Bất phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} < \frac{3}{x+3}$ có tập nghiệm là

- A. $S = (-\infty; -12) \cup (-4; 3) \cup (0; +\infty)$. B. $S = [-12; -4) \cup (-3; 0)$.
C. $S = (-\infty; -12) \cup [-4; 3] \cup (0; +\infty)$. D. $S = (-12; -4) \cup (-3; 0)$.

Câu 34. Bất phương trình $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{(x-1)^2}$ có tập nghiệm S là

- A. $T = (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup [1; 3]$. B. $T = [-1; 0) \cup (-3; +\infty)$.
C. $T = (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$. D. $T = (-1; 0] \cup (-3; +\infty)$.

Câu 35. Bất phương trình $\frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} < \frac{4x}{3x-x^2}$ có nghiệm nguyên lớn nhất là

- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = -2$. D. $x = -1$.

Vấn đề 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Câu 36. Tất cả các giá trị của x thoả mãn $|x-1| < 1$ là

- A. $-2 < x < 2$. B. $0 < x < 1$. C. $x < 2$. D. $0 < x < 2$.

Câu 37. Nghiệm của bất phương trình $|2x-3| \leq 1$ là

- A. $1 \leq x \leq 3$. B. $-1 \leq x \leq 1$. C. $1 \leq x \leq 2$. D. $-1 \leq x \leq 2$.

Câu 38. Bất phương trình $|3x-4| \leq 2$ có nghiệm là

- A. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$. B. $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$.
C. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$. D. $[2; +\infty)$.

Câu 39. Bất phương trình $|1-3x| > 2$ có nghiệm là

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$.
C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 40. Tập nghiệm của bất phương trình $|x-3| > -1$ là

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-3; 3)$. D. \mathbb{R} .

Câu 41. Tập nghiệm của bất phương trình $|5x-4| \geq 6$ có dạng $S = (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính tổng $P = 5a + b$.

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 42. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên x thoả mãn bất phương trình $\left|\frac{2-x}{x+1}\right| \geq 2$?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 43. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $1 \leq |x-2| \leq 4$ là

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Câu 44. Bất phương trình: $|3x-3| \leq |2x+1|$ có nghiệm là

- A. $[4; +\infty)$. B. $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$. C. $\left[\frac{2}{5}; 4\right]$. D. $(-\infty; 4]$.

Câu 45. Bất phương trình $|x-3| > |2x+4|$ có nghiệm là

- A. $\left(-7; \frac{1}{3}\right)$. B. $\left(7; -\frac{1}{3}\right)$.
C. $\left(-7; -\frac{1}{3}\right)$. D. $(-\infty; -7) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Câu 46. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên x trong $[-2017; 2017]$ thoả mãn bất phương trình $|2x+1| < 3x$?

- A. 2016. B. 2017. C. 4032. D. 4034.

Câu 47. Số nghiệm nguyên thoả mãn bất phương trình $x+12 \geq |2x-4|$ là

- A. 5. B. 8. C. 11. D. 16.

Câu 48. Bất phương trình $|3x-4| \geq x-3$ có nghiệm là

- A. $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$. B. $\left[\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right]$. C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. \mathbb{R} .