CHUYÊN ĐỀ 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I.Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D, với D là một khoảng, một đoạn hoặc nửa khoảng.

1.Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2.Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

II.Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D

1.Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in D$

2.Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên D thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in D$

III.Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:

1.Định lý 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a,b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

2.Định lý 2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D

1.Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in D$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc D thì hàm số đồng biến trên D

2.Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in D$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc D thì hàm số nghịch biến trên D

3.Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in D$ thì hàm số không đổi trên D

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1*.Xét chiều biến thiên của hàm số $y = f(x)$*

****Phương pháp : Xét chiều biến thiên của hàm số $y = f(x)$***

1.Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$

2.Tính $y' = f'(x)$ và xét dấu y' (Giải phương trình y' = 0)

3.Lập bảng biến thiên

4.Kết luận

Dạng 2. *Tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước*

Chủ đề 2. **CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ**

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I.Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D \subset R$ và $x_0 \in D$

1. x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một (a,b) chứa điểm x_0 sao cho $(a,b) \subset D$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số và $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của hàm số .

2. x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một (a,b) chứa điểm x_0 sao cho $(a,b) \subset D$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số và $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số .

3.Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là cực trị của hàm số

II.Điều kiện cần để hàm số có cực trị : Giả sử hàm số $y = f(x)$ có cực trị tại x_0.Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

III.Điều kiện đủ để hàm số có cực trị :

1.Định lý 1. (Dấu hiệu 1 để tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a,b) chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng (a, x_0) và (x_0, b). Khi đó :

+ Nếu f'(x) đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0

+ Nếu f'(x) đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0

2.Định lý 2. (Dấu hiệu 2 để tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a,b) chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f(x) có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0. Khi đó:

+ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0

+ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. *Tìm cực trị của hàm số*

***Phương pháp1. (Quy tắc 1)Tìm cực trị của hàm số** $y = f(x)$

1.Tìm tập xác định của hàm số

2.Tính $f'(x)$ *và giải phương trình* $f'(x) = 0$ *tìm nghiệm thuộc tập xác định*

3.Lập bảng biến thiên

4.Kết luận

***Phương pháp 2. (Quy tắc 2)Tìm cực trị của hàm số** $y = f(x)$

1.Tìm tập xác định của hàm số

2.Tính $f'(x)$ *và giải phương trình* $f'(x) = 0$ *tìm nghiệm* $x_i (i = 1,2,3...)$ *thuộc tập xác định*

3.Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$

4.Kết luận

+Nếu $f''(x_i) < 0$ *thì hàm số đạt cực đại tại điểm* x_i

+Nếu $f''(x_i) > 0$ *thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm* x_i

Dạng 2*.Tìm điều kiện của tham số để hàm số có cực trị thõa mãn điều kiện cho trước*

Chủ đề 3. **GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ**

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I.Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D \subseteq R$

1.Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \le f(x_0), \forall x \in D$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên D, ký hiệu $M = \underset{x \in D}{Max}\, f(x)$

Như vậy $M = \underset{x \in D}{Max}\, f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D, f(x) \le M \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$

2. Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \ge f(x_0), \forall x \in D$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) trên D, ký hiệu $m = \underset{x \in D}{Min}\, f(x)$

Như vậy $m = \underset{x \in D}{Min}\, f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D, f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$

II.Phương pháp tìm GTLN,GTNN của hàm số : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D \subseteq R$

Bài toán 1.Nếu $D = (a,b)$ thì ta tìm GTLN,GTNN của hàm số như sau:

1.Tìm tập xác định của hàm số

2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm thuộc tập xác định

3.Lập bảng biến thiên

4.Kết luận

Bài toán 2. Nếu $D = [a,b]$ thì ta tìm GTLN,GTNN của hàm số như sau:

1.Tìm tập xác định của hàm số

2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2...$ thuộc tập xác định

3.Tính $f(a), f(x_1), f(x_2)....f(b)$

4.Kết luận: Số lớn nhất là $M = \underset{x \in [a,b]}{Max}\, f(x)$ và số nhỏ nhất là $m = \underset{x \in [a,b]}{Min}\, f(x)$

Bài toán 3.Sử dụng các bất đẳng thức thông dụng như : Cauchy, Bunhiacốpxki, ...

Bài toán 4.Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình, tập giá trị của hàm số

Chủ đề 4. **ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Đường tiệm cận đứng .

Đường thẳng (d): $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ nếu

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

Hoặc $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

2.Đường tiệm cận ngang .

Đường thẳng (d): $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$

Chủ đề 5. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Bài toán 1. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) tại một điểm .

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(x_0, y_0) \in (C)$ có dang : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Trong đó $f'(x_0)$ được gọi là hệ số góc của tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(x_0, y_0)$.

2.Bài toán 2. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) có hệ số góc k cho trước.

1.Gọi $M(x_0, y_0)$là tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $M \in (C) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

2.Vì hệ số góc của tiếp tuyến bằng k nên $f'(x_0) = k$, giải PT $f'(x_0) = k$ tìm được $x_0 \Rightarrow y_0$

3.Kết luận .

Chú ý: Nếu hai đường thẳng song song thì hai hệ số góc bằng nhau. Nếu hai đường thẳng vuông góc thì tích hai hệ số góc bằng -1

Chủ đề 6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Giao điểm của hai đồ thị. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1)và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (C_2)

+ Hai đồ thị (C_1) và (C_2) cắt nhau tại điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow (x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

+Hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+Phương trình (1) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2)

+Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C_1) và (C_2)

2.Sự tiếp xúc của hai đường cong. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) và có đạo hàm tại điểm x_0.

+Hai đồ thị (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau tại một điểm chung $M(x_0, y_0)$ nếu tại điểm đó chúng có chung cùng một tiếp tuyến . Khi đó điểm M được gọi là tiếp điểm.

+Hai đồ thị (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ của tiếp điểm.

Chủ đề 7. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN I. PHƯƠNG PHÁP

Các bước chính khi tiến hành khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y = f(x)$

1. Tìm tập xác định của hàm số
2. Sự biến thiên
   + Tính các giới hạn và tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có)
   + Tính đạo hàm y' và giải phương trình y' = 0 (nếu có)
   + Lập bảng biến thiên
   + Nêu kết luận về tính biến thiên và cực trị của hàm số

3. Đồ thị

+ Tìm các điểm đặc biệt thuộc đồ thị hàm số (như giao với trục tung, trục hoành (nếu có) và lấy thêm một số điểm đặc biệt khác)

+ Vẽ đồ thị hàm số và nhận xét

Lưu ý: Để vẽ tốt đồ thị hàm số ta cần nắm được hình dạng của nó từ bảng biến thiên và các điểm đặc biệt.

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Hàm số $y=-x^3+6x^2-9x$ có các khoảng nghịch biến là:

A. $(-\infty;+\infty)$ B. $(-\infty;-4)$ và $(0;+\infty)$ C. $(1;3)$ D. $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$

Câu 2. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y=-x^3+3x^2-1$ là:

A. $(-\infty;0)\,va\,(2;+\infty)$ B. $(0;2)$ C. $(2;+\infty)$ D. $\mathbb{R}$.

Câu 3. Hàm số $y=-x^3+3x^2-1$ đồng biến trên các khoảng:

A. $(-\infty;1)$ B. $(0;2)$ C. $(2;+\infty)$ D. $\mathbb{R}$.

Câu 4. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^3-3x-1$ là:

A. $(-\infty;-1)$ B. $(1;+\infty)$ C. $(-1;1)$ D. $(0;1)$.

Câu 5. Cho sàm số $y=\dfrac{-2x-3}{x+1}$ (C) Chọn phát biểu đúng :

A. Hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng xác định B. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ D. Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng xác định

Câu 6. Cho sàm số $y=\dfrac{2x+1}{-x+1}$ (C) Chọn phát biểu đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$;

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;\ 1)$ và $(1;\ +\infty)$; D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;\ 1)$ và $(1;\ +\infty)$.

Câu 7. Hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng:

A. $(-\infty;1)$ va $(1;+\infty)$ B. $(1;+\infty)$ C. $(-1;+\infty)$ D. $\mathbb{R}$;

Câu 8. Các khoảng đồng biến của hàm số $y=2x^3-6x$ là:

A. $(-\infty;-1)\ va\ (1;+\infty)$ B. $(-1;1)$ C. $[-1;1]$ D. $(0;1)$

Câu 9. Các khoảng đồng biến của hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ là: