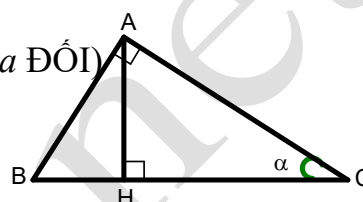


**PHẦN 1: LÝ THUYẾT**

**I. TỈ SỐ GÓC NHỎ TRONG TAM GIÁC VUÔNG**

1.  $\sin \alpha = \frac{AB}{BC}$  (ĐỐI chia HUYỀN)    2.  $\cos \alpha = \frac{AC}{BC}$  (KÈ chia HUYỀN)  
3.  $\tan \alpha = \frac{AB}{AC}$  (ĐỐI chia KÈ)    4.  $\cot \alpha = \frac{AC}{AB}$  (KÈ chia ĐỐI)



**II. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG**

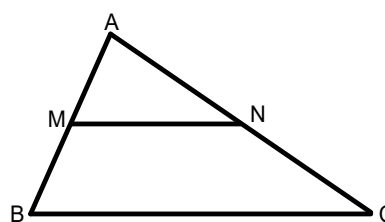
1.  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  (Định lý Pitago)  
2.  $AB^2 = BH \cdot BC$     3.  $AC^2 = CH \cdot BC$   
4.  $AH^2 = BH \cdot CH$     5.  $AB \cdot AC = BC \cdot AH$     6.  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

**III. ĐỊNH LÝ CÔSIN**

1.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$     2.  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$     3.  $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$

**IV. ĐỊNH LÝ SIN**

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$



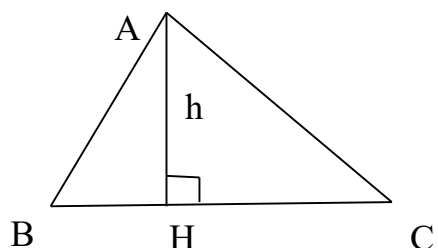
**V. ĐỊNH LÝ TALET**

$MN \parallel BC$

a)  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ ;    b)  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

**VI. DIỆN TÍCH TRONG HÌNH PHẪNG**

**1. Tam giác thường:**



$$* S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = pr.$$

\* p là nửa chu vi, R bán kính đường tròn ngoại tiếp ,

r là bán kính đường tròn nội tiếp.

### 2. Tam giác đều cạnh a:

a) Đường cao:  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;      b)  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c) Đường cao cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

### 3. Tam giác vuông:

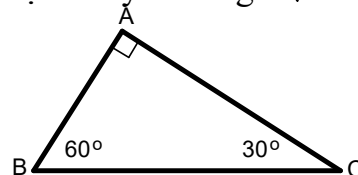
a)  $S = \frac{1}{2} ab$  (a, b là 2 cạnh góc vuông)

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của **cạnh huyền**

### 4. Tam giác vuông cân (nửa hình vuông):

a)  $S = \frac{1}{2} a^2$  (2 cạnh góc vuông bằng nhau)

b) Cạnh huyền bằng  $a\sqrt{2}$



### 5. Nửa tam giác đều:

a) Là tam giác vuông có một góc bằng 30° hoặc 60°

b)  $BC = 2AB$       c)  $AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$       d)  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

6. Tam giác cân: a)  $S = \frac{1}{2} ah$  (h: đường cao; a: cạnh đáy)

b) Đường cao hạ từ đỉnh cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

7. Hình chữ nhật:  $S = ab$  (a, b là các kích thước)

8. Hình thoi:  $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$  ( $d_1, d_2$  là 2 đường chéo)

9. Hình vuông: a)  $S = a^2$  b) Đường chéo bằng  $a\sqrt{2}$

10. Hình bình hành:  $S = ah$  (h: đường cao; a: cạnh đáy)

11. Hình Thang:  $S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (\text{đáy lớn} + \text{đáy bé})$

12. Đường tròn: a)  $C = 2\pi R$  (R: bán kính đường tròn)

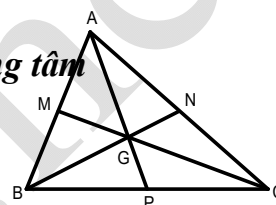
b)  $S = \pi R^2$  (R: bán kính đường tròn)

### VII. CÁC ĐƯỜNG TRONG TAM GIÁC

1. Đường trung tuyến: G: là trọng tâm của tam giác

a) Giao điểm của 3 đường trung tuyến của tam giác gọi là **trọng tâm**

b) \*  $BG = \frac{2}{3}BN$ ; \*  $BG = 2GN$ ; \*  $GN = \frac{1}{3}BN$



2. Đường cao:

Giao điểm của của 3 đường cao của tam giác gọi là **trực tâm**

3. Đường trung trực:

Giao điểm của 3 đường trung trực của tam giác là **tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác**

4. Đường phân giác:

Giao điểm của 3 đường phân giác của tam giác là **tâm đường tròn nội tiếp tam giác**

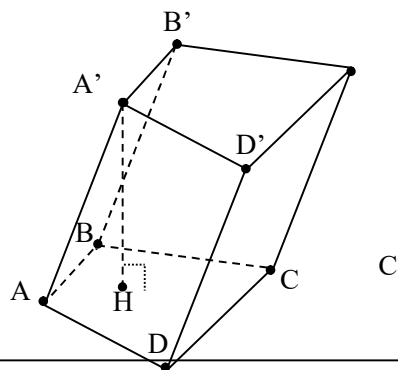
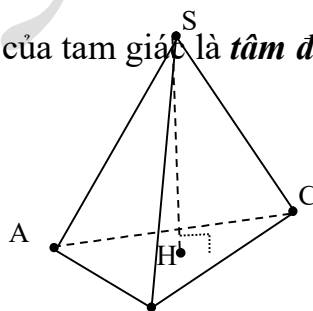
### VIII. Công thức thể tích:

1. Thể tích khối chóp:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

B: Diện tích đa giác đáy.

h: Độ dài đường cao.



## 2. Thể tích khối lăng trụ:

$$V=B.h$$

B: Diện tích đa giác đáy.

h: Độ dài đồng cao.

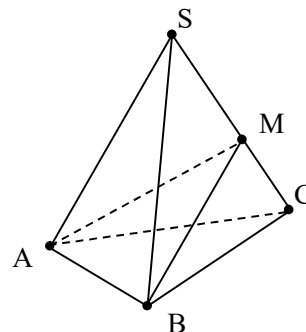
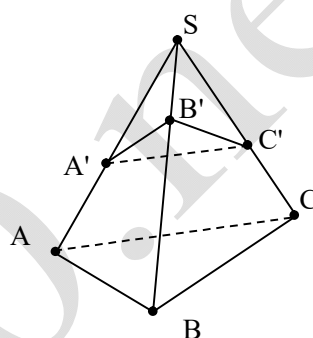
## 3. Tỷ số thể tích:

Cho khối chóp S.ABC.

$A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA.SB.SC}{SA'.SB'.SC'}$$

\*  $M \in SC$ , ta có:  $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA.SB.SM}{SA.SB.SC} = \frac{SM}{SC}$



## IX: Đường cao Đa giác lồi

### A/ Đường cao hình chóp.

1/ Chóp có cạnh bên vuông góc đường cao chính là cạnh bên.

2/ Chóp có hai mặt bên vuông góc đáy đường cao là giao tuyến của hai mặt bên vuông góc đáy.

3/ Chóp có mặt bên vuông góc đáy đường cao nằm trong mặt bên vuông góc đáy.

4/ Chóp đều đường cao từ đỉnh đến tâm đa giác đáy.

5/ Chóp có hình chiếu vuông góc của một đỉnh lên xuống mặt đáy thuộc cạnh mặt đáy đường cao là từ đỉnh tới hình chiếu.

*\*GV tự vẽ hình cho học sinh khi dạy.*

### **B/ Đường cao của lăng trụ.**

1/ Lăng trụ đứng đường cao là cách bên.

2/ Lăng trụ xiên đường cao từ một đỉnh tới hình chiếu của nó thuộc cách nằm trong mặt đáy.

*\*GV tự vẽ hình cho học sinh khi dạy.*

### **X: Góc**

1/ Góc giữa hai đường thẳng đưa về góc hai đường thẳng cắt nhau.

*\*GV tự vẽ hình cho học sinh khi dạy.*

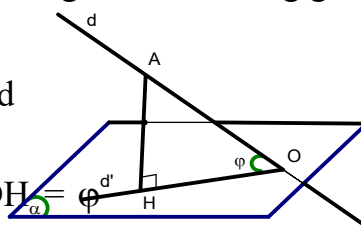
2/ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng ban đầu và hình chiếu của nó lên mặt phẳng.

3/ Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

\* **Góc  $\varphi$  giữa đt  $d$  và mp( $\alpha$ ):**  $d$  cắt  $(\alpha)$  tại  $O$  và  $A \in d$

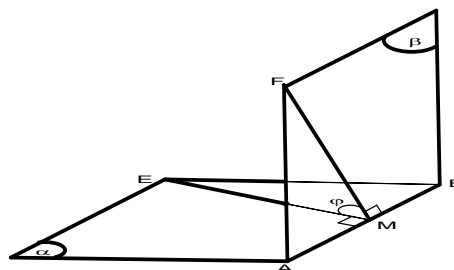
Nếu  $\begin{cases} AH \perp (\alpha) \\ H \in (\alpha) \end{cases}$

thì góc giữa  $d$  và  $(\alpha)$  là  $\varphi$  hay  $\widehat{AOH} = \varphi$



\* **Góc giữa 2 mp( $\alpha$ ) và mp( $\beta$ ):**

Nếu  $\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = AB \\ FM \perp AB; EM \perp AB \\ EM \subset (\alpha), FM \subset (\beta) \end{cases}$



**XI:Khoảng cách:**

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

$$d(M, a) = MH$$

$$d(M, (P)) = MH \quad \text{trong đó H là hình chiếu của M trên a hoặc (P).}$$

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

$$d(a, (P)) = d(M, (P)) \text{ trong đó M là điểm bất kì nằm trên a.}$$

$$d((P), (Q)) = d(M, (Q)) \quad \text{trong đó M là điểm bất kì nằm trên (P).}$$

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Đường thẳng  $\Delta$  cắt cả a, b và cùng vuông góc với a, b được gọi là đường vuông góc chung của a, b.

- Nếu  $\Delta$  cắt a, b tại I, J thì IJ được gọi là đoạn vuông góc chung của a, b.

- Độ dài đoạn IJ được gọi là khoảng cách giữa a, b.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng chứa đường thẳng kia và song song với nó.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

*\*GV tự vẽ hình cho học sinh khi dạy.*

thì góc giữa  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  là  $\varphi$  hay  $\widehat{EMF} = \varphi$

**Phần 2: Dạng toán và Phương pháp giải toán và bài tập vận dụng**

**Dạng 1: Tính thể tích của đa diện lồi:**

**1/ Phương pháp:**

- + Xác định đường cao và tính độ dài đường cao.
- + Xác định mặt đáy và tích diện tích mặt đáy.
- + Thay vào công thức thể tích của khối đa diện lồi.

**Chú ý:** +  $V = V_1 \pm V_2$  ;  $V = kV'$  ;  $V = \frac{V_1}{V_2}$

**I: BÀI TẬP TỰ LUẬN:**

**Bài 1: Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh a**

**HD:** \* Đáy là  $\Delta BCD$  đều cạnh a. H là trọng tâm của đáy

\* Tất cả các cạnh đều đều bằng a

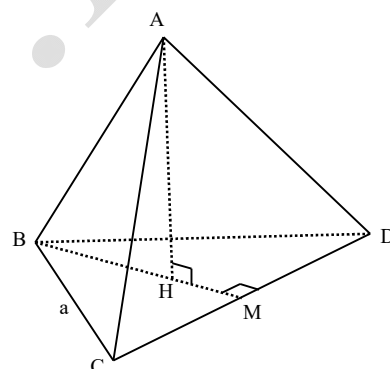
\* Tính:  $V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AH$  \* Tính:  $S_{BCD} =$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (}\Delta BCD \text{ đều cạnh a)}$$

\* Tính AH: Trong  $\Delta_v ABH$  tại H :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 \text{ (biết } AB = a; BH = \frac{2}{3} BM \text{ với } BM = \frac{a\sqrt{3}}{2})$$

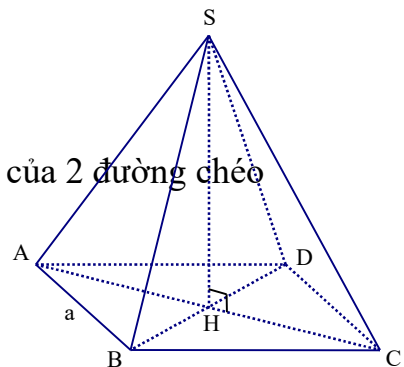
$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



**Bài 2: Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều cạnh a**

**HD:** \* Đáy ABCD là hình vuông cạnh a. H là giao điểm của 2 đường chéo

\* Tất cả các cạnh đều đều bằng a



\* Tính:  $V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH$  \* Tính:  $S_{ABCD} = a^2$

\* Tính AH: Trong  $\Delta_{\sqrt{}}SAH$  tại H:

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 \text{ (biết } SA = a; AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}\text{)}$$

ĐS:  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ . Suy ra thể tích của khối bát diện đều cạnh a. ĐS:  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

**Bài 3:** Cho hình lăng trụ đứng tam giác  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh đều bằng a

a) Tính thể tích của khối lăng trụ

b) Tính thể tích khối tứ diện  $A'BB'C$

**HD:** a) \* Đáy  $A'B'C'$  là  $\Delta$  đều cạnh a.  $AA'$  là đường cao

\* Tất cả các cạnh đều bằng a

\*  $V_{ABC.A'B'C'} = Bh = S_{A'B'C'} \cdot AA'$

\* Tính:  $S_{A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  ( $A'B'C'$  là  $\Delta$  đều cạnh a) và  $AA' = a$

ĐS:  $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$       b)  $V_{A'BB'C} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$       ĐS:  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

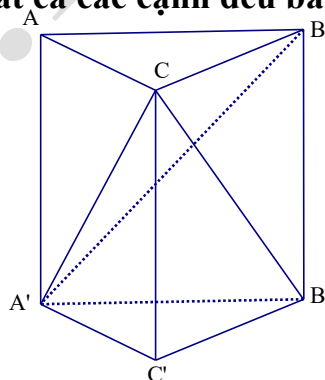
( khối lăng trụ đứng có tất cả các cạnh bằng nhau được chia thành 3 tứ diện bằng nhau)

**Bài 4:** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$ , đáy ABC là tam giác vuông tại A,  $AC = a$ ,  $\hat{C} = 60^\circ$ , đường chéo  $BC'$

của mặt bên ( $BCC'B'$ ) hợp với mặt bên ( $ACC'A'$ ) một góc  $30^\circ$ .

a) Tính độ dài cạnh  $AC'$

b) Tính thể tích lăng trụ





**HD:** a) \* Xác định  $\varphi$  là góc giữa cạnh  $BC'$  và mp( $ACC'A'$ )

+ CM:  $BA \perp (ACC'A')$

- $BA \perp AC$  (vì  $\Delta ABC$  vuông tại A)
- $BA \perp AA'$  ( $ABC.A'B'C'$  lăng trụ đứng)

+  $\varphi = \widehat{BC'A} = 30^\circ$

\* Tính  $AC'$ : Trong  $\Delta_{\nu}BAC'$  tại A (vì  $BA \perp AC'$ )

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AC'} \Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = AB\sqrt{3}$$

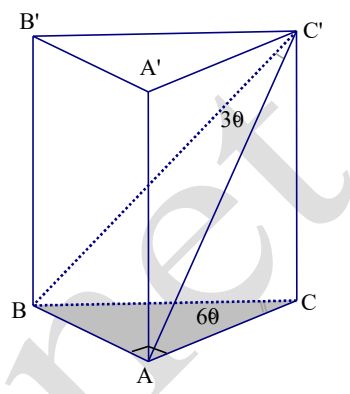
\* Tính AB: Trong  $\Delta_{\nu}ABC$  tại A, ta có:  $\tan 60^\circ = \frac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow AB = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \quad (\text{vì } AC = a). \quad \text{ĐS: } AC' = 3a$$

b)  $V_{ABC.A'B'C'} = Bh = S_{ABC} \cdot CC'$  \* Tính:  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

\* Tính  $CC'$ : Trong  $\Delta_{\nu}ACC'$  tại C, ta có:  $CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = 8a^2 \Rightarrow CC' = 2a\sqrt{2}$

ĐS:  $V_{ABC.A'B'C'} = a^3\sqrt{6}$



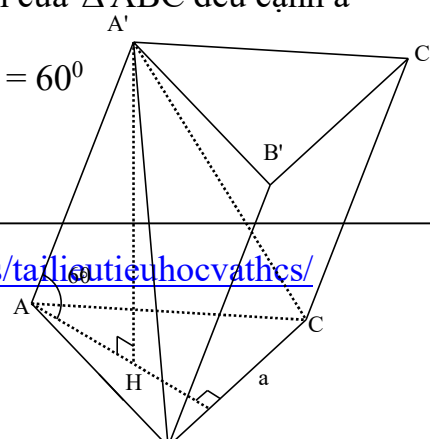
**Bài 5:** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là một tam giác đều cạnh  $a$  và điểm  $A'$  cách đều các

điểm  $A, B, C$ . Cạnh bên  $AA'$  tạo với mp đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích của lăng trụ.

**HD:** \* Kẻ  $A'H \perp (ABC)$

\*  $A'$  cách đều các điểm  $A, B, C$  nên  $H$  là trọng tâm của  $\Delta ABC$  đều cạnh  $a$

\* Góc giữa cạnh  $AA'$  và mp( $ABC$ ) là  $\varphi = \widehat{A'AH} = 60^\circ$



\* Tính:  $V_{ABC.A'B'C'} = Bh = S_{ABC} \cdot A'H$

\* Tính:  $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  (Vì  $\Delta ABC$  đều cạnh  $a$ )

\* Tính  $A'H$ : Trong  $\Delta_v AA'H$  tại  $H$ , ta có:

$$\tan 60^\circ = \frac{A'H}{AH} \Rightarrow A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{2}{3} AN \cdot \sqrt{3} = a$$

ĐS:  $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

**Bài 6:** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$ , đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AC = a$ ,  $BC = 2a$  và  $AA' = 3a$ .

**Tính thể tích của lăng trụ**

**HD:** \* Đường cao lăng trụ là  $AA' = 3a$

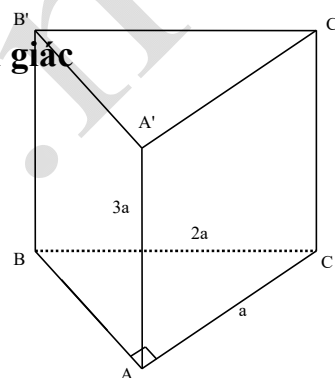
\* Tính:  $V_{ABC.A'B'C'} = Bh = S_{ABC} \cdot AA'$

\* Tính:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$  (biết  $AC = a$ )

\* Tính  $AB$ : Trong  $\Delta_v ABC$  tại  $A$ , ta có:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

ĐS:  $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

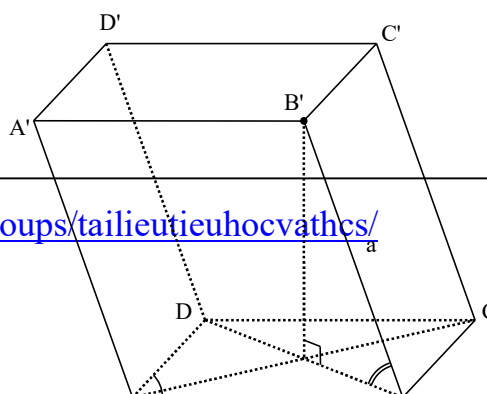


**Bài 7:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ , góc  $\hat{A} = 60^\circ$ . Chân đường vuông góc hạ từ

$B'$  xuống đáy  $ABCD$  trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy. Cho  $BB' = a$ .

a) Tính góc giữa cạnh bên và đáy

b) Tính thể tích hình hộp



**HD:** a) Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD

\*  $B'O \perp (ABCD)$  (gt)

\* Góc giữa cạnh bên  $BB'$  và đáy (ABCD) là  $\varphi = \widehat{B'BO}$

\* Tính  $\varphi = \widehat{B'BO}$ : Trong  $\Delta_{\nu} BB'O$  tại O, ta có:

$$\cos \varphi = \frac{OB}{BB'} = \frac{OB}{a}$$

+  $\Delta ABD$  đều cạnh a (vì  $\widehat{A} = 60^\circ$  và  $AB = a$ )  $\Rightarrow DB = a$

$$\Rightarrow OB = \frac{1}{2}DB = \frac{a}{2}. \text{ Suy ra: } \cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

b) \* Đáy ABCD là tổng của 2  $\Delta$  đều ABD và BDC  $\Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$$* V_{ABCD.A'B'C'D'} = Bh = S_{ABCD} \cdot B'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot B'O$$

$$* \text{ Tính } B'O: B'O = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (vì } \Delta B'BO \text{ là nửa tam giác đều) } \quad \text{ĐS: } \frac{3a^3}{4}$$

**Bài 8:** Cho tứ diện đều S.ABC có cạnh a. Dựng đường cao SH

a) Chứng minh:  $SA \perp BC$

b) Tính thể tích của hình chóp

**HD:** a) Gọi M là trung điểm của BC

\* CM:  $BC \perp SH$  ( $SH \perp mp(ABC)$ )

$$BC \perp AM$$

$\Rightarrow BC \perp mp(SAM)$ . Suy ra:  $SA \perp BC$  (đpcm)

b) \* Tất cả các cạnh đều bằng a

