XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. LÝ THUYẾT

I. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

1. Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

2. Không gian mẫu

Tập hợp các kết quả có thể xẩy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử đó và ký hiệu là Ω.

Ví dụ: Khi ta tung một đồng xu có 2 mặt, ta hoàn toàn không biết trước được kết quả của nó, tuy nhiên ta lại biết chắc chắn rằng đồng xu rơi xuống sẽ ở một trong 2 trạng thái: sấp (S) hoặc ngửa (N).

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{S;N\}$

II. BIẾN CỐ

1. Một biến cố A (còn gọi là sự kiện A) liên quan tới phép thử T là biến cố mà việc xẩy ra hay không xẩy ra của nó còn tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho biến cố A xảy ra được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

2. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu bởi Ω_A. Để đơn giản, ta có thể dùng chính chữ A để kí hiệu tập hợp các kết quả thuận lợi cho A.

Khi đó ta cũng nói biến cố A được mô tả bởi tập A.

3. Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xẩy ra khi thực hiện hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được ký hiệu là Ω.

4. Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xẩy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\varnothing$.

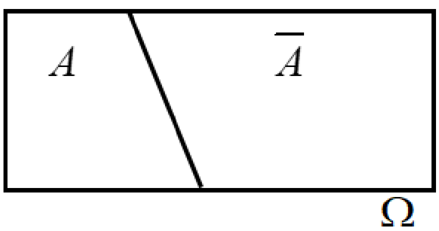
Các phép toán trên biến cố

* Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$. Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có:

* Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của các biến cố A và B.

* Tập $A \cap B$ được gọi là giao của các biến cố A và B.

* Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B xung khắc.



Bảng đọc ngôn ngữ biến cố.

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố

$A \in \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố "A hoặc B"
$C = A \cap B$	C là biến cố "A và B"
$A \cap B = \varnothing$	A và B xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B đối nhau

III. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Định nghĩa cổ điển của xác suất:

Giả sử phép thử T có một số hữu hạn kết quả có thể đồng khả năng. Khi đó xác suất của một biến cố A liên quan tới T là tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho A và số kết quả có thể

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Trong cuộc sống khi nói về biến cố, ta thường nói biến cố này có nhiều khả năng xảy ra, biến có kia có ít khả năng xảy ra, biến cố này có nhiều khả năng xảy ra hơn biến cố kia. Toán học đã định lượng hóa các khả năng này bằng cách gán cho mỗi biến cố một số không âm, nhỏ hơn hoặc bằng 1 gọi là xác suất của biến cố.

Từ định nghĩa cổ điển về xác suất ta có các bước để tính xác suất của một biến cố như sau:

Bước 1: Xác định không gian mẫu Ω rồi tính số phần tử của Ω, tức là đếm số kết quả có thể của phép thử T.

Bước 2: Xác định tập con A mô tả biến cố A rồi tính số phần tử của A, tứ là đếm số kết quả thuận loại cho A.

Bước 3: Lấy kết quả của bước 2 chia cho bước 1.

Nhận xét: Việc tính số kết quả có thể (bước 1) thường dễ dàng hơn hiều so với việc tính số kết quả thuận lợi cho A (bước 1). Để giải quyết tốt các bài toán xác suất ta cần nắm chắc phần tổ hợp trước.

STUDY TIP

Từ định nghĩa cổ điển về xác suất ta suy ra: $0 \le P(A) \le 1; P(\Omega) = 1; P(\varnothing) = 0$

<u>Chú ý:</u> Các kí hiệu $n(\Omega); n(A)$ được hiểu tương đương với $|\Omega|; |\Omega_A|$ là số phần tử của không gian mẫu và của tập hợp thuận lợi cho biến cố A.

4. Quy tắc cộng xác suất

a) Quy tắc cộng xác suất

* Nếu hai biến cố A, B xung khắc nhau thì

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

* Nếu các biến cố $A_1,A_2,A_3,...,A_k$ xung khắc nhau thì

$$P(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k)$$

STUDY TIP

Vì $A\cup\overline{A}=\Omega$ và $A\cap\overline{A}=\varnothing$ nên theo công thức cộng xác suất thì

$$1=P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})$$

b) Công thức tính xác suất biến cố đối

Xác suất của biến cố $\overline{A}$ của biến cố A là

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Dưới đây là một ví dụ để ta hiểu rõ hơn về quy tắc cộng.

Ví dụ 1. Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên biên. Xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu là

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Đáp án A.

Gọi A là biến cố : "Chọn được hai viên bi xanh".

B là biến cố : "Chọn được hai viên bi đỏ".

C là biến cố : "Chọn được hai viên bi vàng".

Khi đó biến cố: "Chọn được hai viên bi cùng màu" là biến cố $A\cup B\cup C$. Do A,B,C đôi một xung khắc với nhau nên theo quy tắc cộng ta có

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

Ta có $P(A)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{6}{36}$; $P(B)=\frac{C_3^2}{C_9^2}=\frac{3}{36}$; $P(C)=\frac{C_2^2}{C_9^2}=\frac{1}{36}$.

Vậy $P(A\cup B\cup C)=\frac{6}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{18}$

5) Quy tắc nhân xác suất

Biến cố giao	Biến cố độc lập
Cho biến cố A và B. Biến cố " cả A và B đều xảy ra" kí hiệu là AB gọi là giao của hai biến cố A và B.	Hai biến cố gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra biến cố kia.
Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1,A_2,A_3,...,A_k$. Biến cố: "Tất cả k biến cố $A_1,A_2,A_3,...,A_k$ đều xảy ra",	Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1,A_2,A_3,...,A_k$. Chúng được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra

kí hiệu là $A_1A_2A_3...A_k$ được gọi là giao của k biến cố đó.	hay không xảy ra của một nhóm bất kì trong các biến cố trên không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

Quy tắc nhân xác suất

Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P(AB)=P(A).P(B)$$

Một cách tổng quát, nếu k biến cố $A_1, A_2, A_3,..., A_k$ là độc lập thì

$$P(A_1, A_2, A_3,..., A_k)=P(A_1).P(A_2)...P(A_k)$$

Chú ý:

* Nếu A và B độc lập thì A và $\overline{B}$ độc lập, B và $\overline{A}$ độc lập, $\overline{B}$ và $\overline{A}$ độc lập. Do đó Nếu A và B độc lập thì ta còn có các đẳng thức

$$P(A\overline{B})=P(A).P(\overline{B})$$

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A}).P(B)$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}).P(\overline{B})$$

* Nếu một trong các đẳng thức trên bị vi phạm thì hai biến cố A và B không độc lập với nhau

Ví dụ 2. Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập. Ta có biến cố A: "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm". Lúc này giá trị của $P(A)$ là

A. $\frac{25}{36}$. **B.** $\frac{11}{36}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{15}{36}$.

Lời giải

Đáp án B.

Gọi $A_i\ (i=1;2)$ là biến cố : "Con súc sắc thứ i ra mặt 6 chấm"

$\Rightarrow A_1$ và A_2 là hai biến cố độc lập và ta có $\begin{cases} P(A_1)=\frac{1}{6} \\ P(A_2)=\frac{1}{6} \end{cases}$

Thay vì tính $P(A)$ ta đi tính $P(\overline{A})$. Ta có $\overline{A}=\overline{A_1}.\overline{A_2}$.

$$P(\overline{A})=P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2})=(1-P(A_1)).(1-P(A_2))=\frac{5}{6}.\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

Vậy $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ XÁC SUẤT

DẠNG 1. SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN VỀ XÁC XUẤT - QUY VỀ BÀI TOÁN ĐẾM.

Bài toán 1. Bài toán tính xác suất sử dụng định nghĩa cổ điển bằng cách tính trực tiếp số phần tử thuận lợi cho biến cố.

Phương pháp chung:

Trong bài toán này, việc xác định số phần tử thuận lợi cho biến cố cần tìm dễ dàng xác định (có thể liệt kê các phương án, có thể tính được các cách chọn ngắn gọn).

Bước 1: Tìm số phần tử của không gian mẫu.

Bước 2: Đếm số phần tử thuận lợi của không gian mẫu.

Bước 3: Tính xác suất $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

STUDY TIP

Phần lớn các bài toán xác suất đều có thể quy về 2 bài toán đếm:

* Đếm số phần tử của tập thuận lợi với biến cố.

* Đếm số phần tử của không gian mẫu Ω.

Các bước làm bài đã được trình bày rõ ở lý thuyết trước.

Ví dụ 1. Gieo ngẫu nhiên hai con xúc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố " Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm" là

A. $\dfrac{11}{36}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{25}{36}$. **D.** $\dfrac{15}{36}$.

Lời giải

Đáp án A.

Gọi A là biến cố: "Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm".

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Do mỗi xúc sắc có thể xảy ra 6 trường hợp nên số kết quả có thể xảy ra là $|\Omega|=6.6=36$.

Bước 2: Tìm số kết quả thuận lợi cho A.

Ta có các trường hợp sau:

$$\{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);(2;1);(3;1);(4;1);(5;1);(6;1)\}\Rightarrow|\Omega_A|=11$$

Bước 3: Xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{11}{36}$.

Ví dụ 2. Một tổ gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành 3 nhóm đều nhau. Tính xác xuất để mỗi nhóm có một nữ.

A. $\dfrac{3}{56}$. **B.** $\dfrac{27}{84}$. **C.** $\dfrac{53}{56}$. **D.** $\dfrac{19}{28}$.

Lời giải

Đáp án B.

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 9 em đưa vào nhóm thứ nhất có số khả năng xảy ra là C_9^3

Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 6 em đưa vào nhóm thứ hai có số khả năng xảy ra là C_6^3.