PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

a) $\sin f(x)=\sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x)+k2\pi \\ f(x)=\pi-g(x)+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

b) $\cos f(x)=\cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x)+k2\pi \\ f(x)=-g(x)+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

c) $\tan f(x)=\tan g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

d) $\cot f(x)=\cot g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Không được dùng đồng thời 2 đơn vị độ và radian cho một công thức về nghiệm phương trình lượng giác.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào nhận $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$ làm nghiệm

A. $\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$.

B. $\cos x=\sin 2x$.

C. $\cos 4x=-\cos 6x$.

D. $\tan 2x=-\tan\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

A. $\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\frac{\pi}{4}-2x+k2\pi \\ 3x=\pi-(\frac{\pi}{4}-2x)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{20}+k\frac{2\pi}{5} \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.$

B. $\cos x=\sin 2x \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi \\ x=-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{2}-k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

STUDY TIP

$(-\sin f(x))=\sin(-f(x))$ $\qquad$ $(-\tan f(x))=\tan(-f(x))$

$(-\cos f(x))=\cos(\pi-f(x))$ $\qquad$ $(-\cot f(x))=\cot(-f(x))$

C. $\cos 4x = -\cos 6x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 6x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \pi - 6x + k2\pi \\ 4x = -(\pi - 6x) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{2} - k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

D. $\tan 2x = -\tan\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan(-\dfrac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

So sánh ta được đáp án là B.

LƯU Ý: Bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi dùng máy tính để thử nghiệm và kết luận . Phần này sẽ được trình bày kỹ hơn trong cuốn công phá kỹ thuật giải toán CASIO.

Ví dụ 2. Phương trình $\sin 2x = -\sin\dfrac{\pi}{3}$ có nghiệm dạng $x = \alpha + k\pi$ và $x = \beta + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \left(-\dfrac{\pi}{4} \le \alpha; \beta \le \dfrac{3\pi}{4}\right)$. Khi đó tích $\alpha.\beta$ bằng :

A. $-\dfrac{\pi^2}{9}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{9}$. **C.** $-\dfrac{4\pi^2}{9}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin 2x = -\sin\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-\dfrac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - (-\dfrac{\pi}{3}) + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Rightarrow \alpha.\beta = -\dfrac{\pi^2}{9}.$$

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Dạng $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, $\cot x = m$, ($m \in \mathbb{R}$)

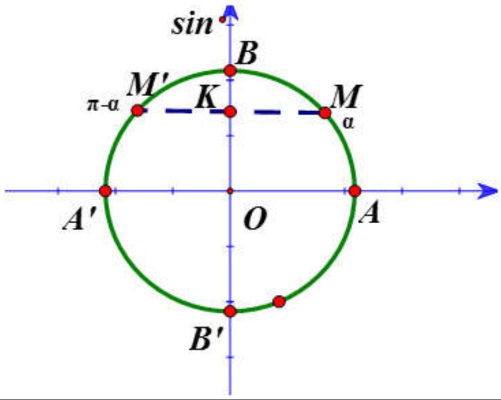
1. Phương trình $\sin x = m$ (1)

- Nếu $|m| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm do $|\sin x| \le 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $|m| \le 1$:

+ Xác định α sao cho $m = \sin\alpha$.

Vậy phương trình $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = m \end{array}\right.$ thì ta viết $\alpha = \arcsin m$ (đọc là ac-sin-m). Khi đó $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.



STUDY TIP

+) $\sin x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow |m \le 1|$

+) arc sin *m* là cung thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ mà có sin bằng *m.*

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau đây,phương trình nào có tập nghiệm là $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$.

A. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ **B.** $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Lời giải

Chọn A

Cách 1

A. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ vô nghiệm do $\frac{2}{\sqrt{2}} > 1$.

B. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ (vì $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\Leftrightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{3})$ (vì $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3})$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

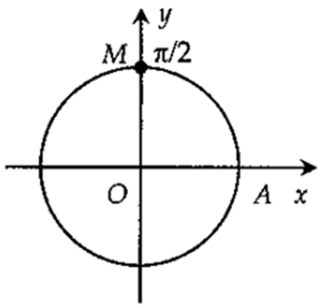
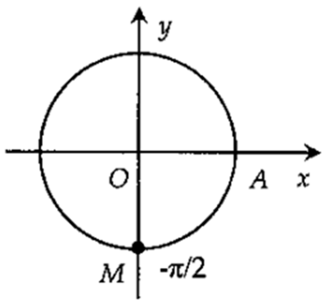
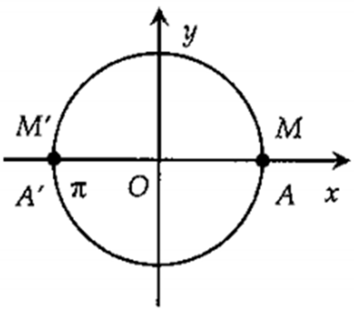
D. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương án đúng là C.

Cách 2 : Sử dụng máy tính cầm tay (MTCT).

Ta có $\sin\left(-\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+k2\pi\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặc biệt

Phương trình	**Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác**
+ $\sin x=1$ $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.	 sđ $\overset{\frown}{AM}=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
+ $\sin x=1$ $\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.	 sđ $\overset{\frown}{AM}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
+ $\sin x=0$ $\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.	sđ $\overset{\frown}{AM}=k2\pi;k\in\mathbb{Z}$ sđ $\overset{\frown}{AM}=(2k+1)\pi;k\in\mathbb{Z}$ Để ý: $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=(2k+1)\pi\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x=k\pi;k\in\mathbb{Z}$ 

2. Phương trình $\cos x=m\ (2)$

- Nếu $|m|>1\Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm (do $|\cos x|\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$).

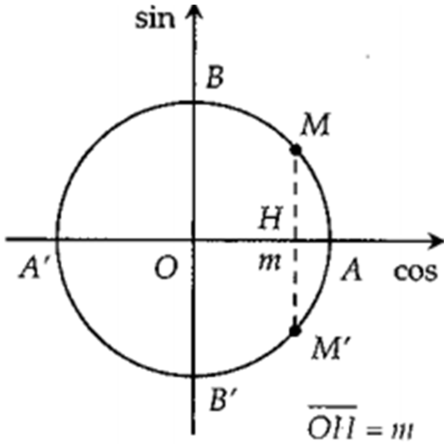
- Nếu $|m|\le 1$:

+ Xác định α sao cho $\cos\alpha=m$.

Vậy phương trình $\cos x=m\Leftrightarrow\cos x=\cos\alpha\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\x=-\alpha+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}0\le\alpha\le\pi\\\cos\alpha=m\end{cases}$ thì ta viết $\alpha=\arccos m$ (đọc là ac-cos- m).

Khi đó $\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.



sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi$; sđ $\overset{\frown}{AM} = -\alpha + k2\pi$

STUDY TIP

+ $\arccos m$ là cung thuộc $\left[0;\pi\right]$ mà có cos bằng m.

+ Phương trình $\cos x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left|m\right| \le 1$.

Ví dụ 1. Phương trình nào trong các phương trình sau có 2 nghiệm thuộc $\left(0°;180°\right)$?

A. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

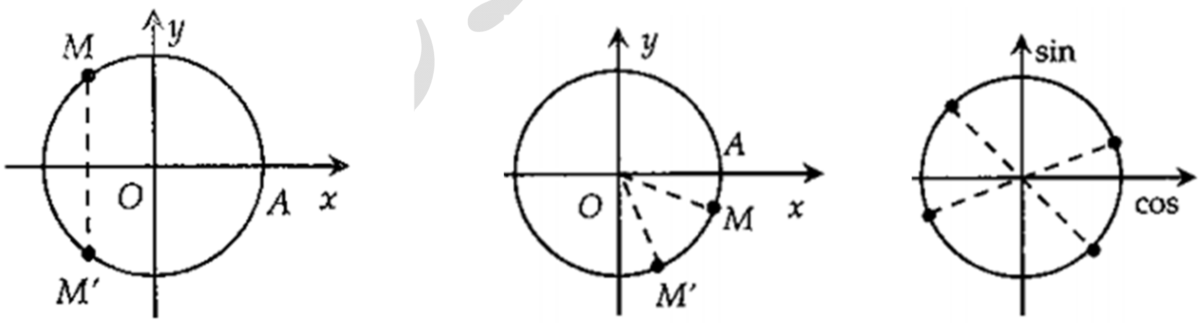
B. $\cos\left(x + 50°\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos\left(x + 30°\right) = \dfrac{1}{2}$.

D. $\cos x = -\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C



A. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos 135° \Leftrightarrow x = \pm 135° + k360°$ chỉ có một nghiệm thuộc $\left(0°;180°\right)$.

B. $\cos\left(x + 50°\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + 50°\right) = \cos 30° \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -20° + k360° \\ x = -80° + k360° \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm nào thuộc $\left(0°;180°\right)$'

C. $\cos\left(x+30^\circ\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x+30^\circ\right)=\cos 60^\circ$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+30^\circ=60^\circ+k360^\circ\\2x+30^\circ=-60^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=15^\circ+k180^\circ\\x=-45^\circ+k180^\circ\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm thuộc $\left(0^\circ;180^\circ\right)$.

D. $\cos x=-\frac{4}{3}$ vô nghiệm do $-\frac{4}{3}<-1$.

Ví dụ 2. Chọn đáp án **sai**: Nghiệm của phương trình $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ là:

A. $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

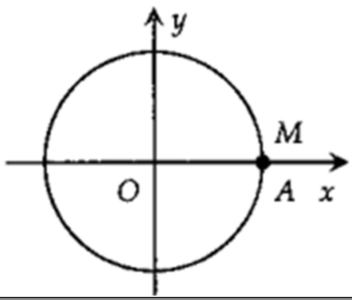
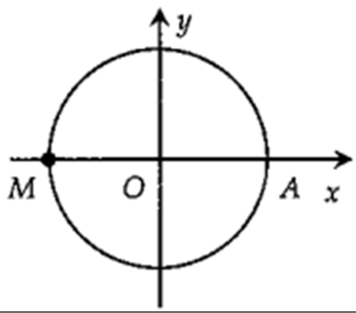
D. $x=\pm150^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}$.

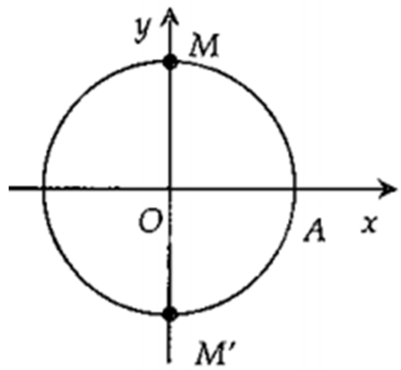
Lời giải

Chọn A

Dễ dàng kiểm tra trên đường tròn lượng giác $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặc biệt

Phương trình	Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác
+ $\cos x=1$ $\Leftrightarrow x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.	$M\equiv A$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AM}=0+k2\pi=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. 
+ $\cos x=-1$ $\Leftrightarrow x=\left(2k+1\right)\pi,k\in\mathbb{Z}$.	sđ $\overset{\frown}{AM}=\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. $=\left(2k+1\right)\pi;k\in\mathbb{Z}$. 

+ $\cos x = 0$ $\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ..	sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ sđ $\overset{\frown}{AM'} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ Để ý: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ 

3. Phương trình $\tan x = m, \cot x = m$

a) Phương trình $\tan x = m$

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

- Ta xác định α sao cho $m = \tan\alpha$.

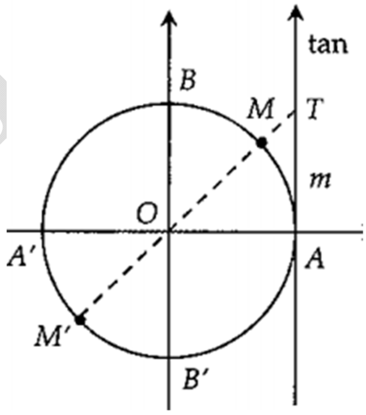
Khi đó phương trình

$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \tan\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết

$\alpha = \arctan m$ (đọc là ac - tan - m).

Khi đó phương trình $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ ..



$\overline{AT} = m$

b) Phương trình $\cot x = m$

Điều kiện: $x \neq k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

- Ta xác định α sao cho $m = \cot\alpha$.

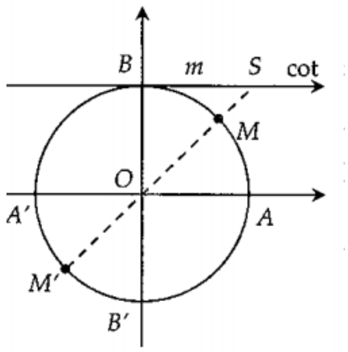
Khi đó phương trình

$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ \cot\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết

$\alpha = \operatorname{arccot} m$ (đọc là ac - cotang - m).

Khi đó phương trình $\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.



$\overline{AS} = m$

STUYDY TIP

Phương trình $\tan x = m, \cot x = m$ luôn có nghiệm với $\forall m \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1. Trong các nghiệm dương bé nhất của các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm dương nhỏ nhất?

A. $\tan 2x = 1$. **B.** $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$. **C.** $\cot x = 0$. **D.** $\cot x = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

A. $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

(Với $k = 0$ nên nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{\pi}{8}$)

B. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

$\Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{7\pi}{12}$.

C. $\cot x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{\pi}{2}$.

D. $\cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Chọn $k = 1 \Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $x = \frac{\pi}{8}$ nên ta chọn đáp án A.

Ví dụ 2. Phương trình $\tan\left(3x - 15°\right) = \sqrt{3}$ có các nghiệm là:

A. $x = 60° + k180°$. **B.** $x = 75° + k180°$. **C.** $x = 75° + k60°$. **D.** $x = 25° + k60°$.

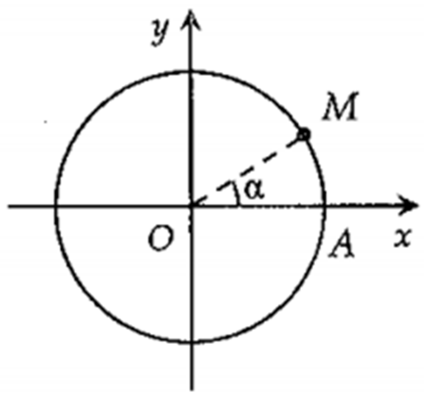
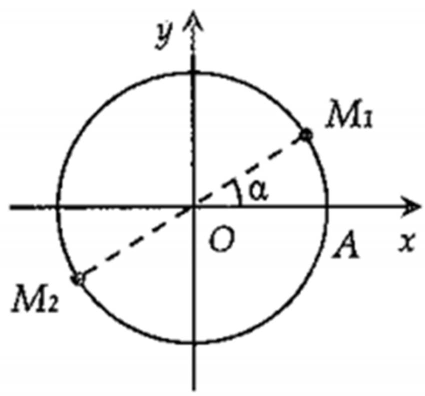
Lời giải

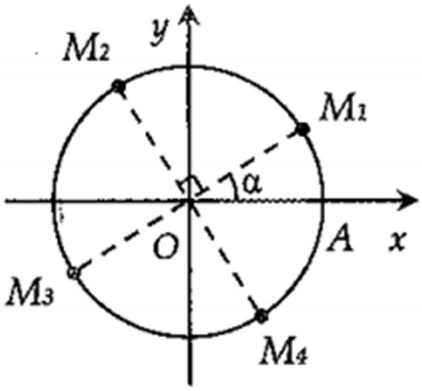
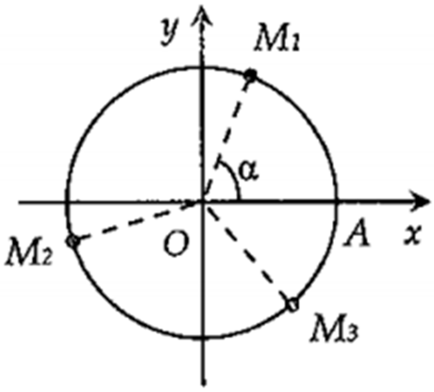
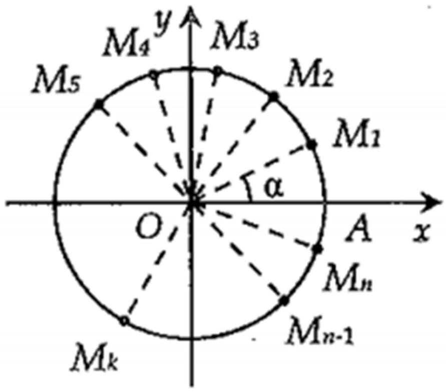
Chọn D

Ta có: $\tan\left(3x - 15°\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(3x - 15°\right) = \tan 60° \Leftrightarrow 3x - 15° = 60° + k180°$

$\Leftrightarrow x = 25° + k60°\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

**** Kĩ năng biểu diễn và tổng hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác***

	
1 điểm trên đường tròn lượng giác	2 điểm đối xứng qua gốc O

$x=\alpha+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$	$x=\alpha+k\pi;k\in\mathbb{Z}$
 4 điểm cách đều: $x=\alpha+k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$	 3 điểm cách đều: $x=\alpha+k\frac{2\pi}{3};k\in\mathbb{Z}$
 n điểm cách đều: $x=\alpha+k\frac{2\pi}{n};k\in\mathbb{Z}$	

III. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP.

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Có dạng $at+b=0$ với $a,b\in\mathbb{R},a\neq 0$, t là một hàm số lượng giác

Phương pháp giải

$at+b=0\Leftrightarrow t=-\frac{b}{a}$ (đây là phương trình lượng giác cơ bản đã học)

STUDY TIP

1. $a\sin f(x)+b=0$. 2. $a\cos f(x)+b=0$ 3. $a\tan f(x)+b=0$. 4. $a\cot f(x)+b=0$.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào có 2 nghiệm thuộc $(0;\pi)$?

A. $\sqrt{3}\sin x-2=0$. **B.** $2\cos x+1=0$.

C. $\sqrt{3}\tan x+1=0$. **D.** $\sqrt{2}\sin x-1=0$.

Lời giải

Chọn D

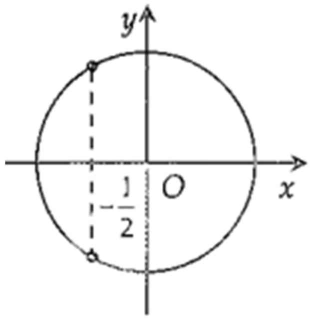
A. $\sqrt{3}\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ vô nghiệm (loại phương án A).

B. $2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow$ Có 1 nghiệm thuộc $\left(0;\pi\right)$.

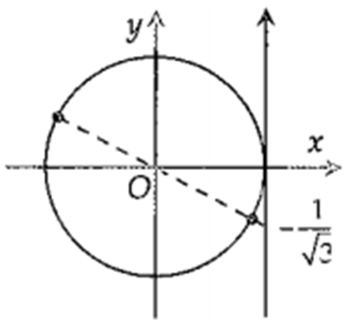
C. $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow$ Có 1 nghiệm thuộc $\left(0;\pi\right)$.

D. $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow$ Có hai nghiệm thuộc $\left(0;\pi\right)$.

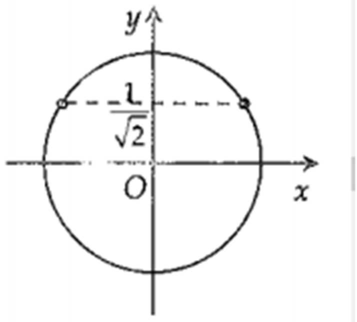
LƯU Ý: Để giải nhanh các bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi so sánh để đưa ra đáp án một cách dễ dàng.



B. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$



C. $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



D. $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

STUDY TIP
Một số phương trình phải qua một vài bước biến đổi đưa về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

Ví dụ 2. Tổng hai nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{7}{16}$ là:

A. $\dfrac{5\pi}{6}$, **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right)$

$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x \ = 1 - \dfrac{3}{4}.\dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{5 + 3\cos 4x}{8}$

$\Rightarrow \dfrac{5 + 3\cos 4x}{8} = \dfrac{7}{16} \Leftrightarrow \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ 4x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm dương nhỏ nhất là $x_1=\frac{\pi}{6}$ và $x_2=\frac{\pi}{3}$

Vậy $x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$

DẠNG 2.PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI (HOẶC PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2) ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Có dạng: $at^2+bt+c=0$ với $a,b,c\in\mathbb{R};a\neq 0,t$ là một hàm số lượng giác.

Phương pháp giải:

- Bước 1: Đặt ẩn phụ, tìm điều kiện của ẩn phụ.
- Bước 2: Giải phương trình ẩn phụ.
- Bước 3: Từ nghiệm tìm được đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

Ví dụ 1. Các điểm A,A',B,B' được biểu diễn trên đường tròn lượng giác thì các nghiệm của phương trình $\sin^2 x+4\sin x+3=0$ là:

A. sđ $\overset{\frown}{AB}$. **B.** sđ $\overset{\frown}{AA'}$. **C.** sđ $\overset{\frown}{AB'}$. **D.** sđ $\overset{\frown}{AB}$ và sđ $\overset{\frown}{AB'}$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $\sin=t\Rightarrow t=\left[-1;1\right]\forall x\in\mathbb{R}$

Phương trình $\sin^2 x+4\sin x+3=0\Leftrightarrow t^2+4t+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-3(l) \end{array}\right.$

Với $t=-1\Rightarrow \mathrm{sinx}=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là sđ $\overset{\frown}{AB'}$

Ví dụ 2. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}=3\cot x+\sqrt{3}$ là:

A. $-\frac{\pi}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi}{6}$. **C.** $-\frac{\pi}{6}$. **D.** $-\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $\mathrm{sinx}\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(1+\cot^2 x\right)=3\cot x+\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{3}\cot^2 x-3\cot x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x=0 \\ \cot x=\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 3. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;2018)$ của phương trình $\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}=1-2\sin x$ là:

A. 207046π . **B.** 206403π . **C.** 205761π . **D.** 204603π .

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}\right)^2-2\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=1-2\sin x$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 x=1-2\sin x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin^2 x-2\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=4(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$0<x<2018 \Leftrightarrow 0<kx<2018 \Leftrightarrow 0<k<\dfrac{2018}{\pi} \Rightarrow k\in\{1,2,3,...,642\}$

Vậy tổng các nghiệm cần tìm là:

$S=\pi+2\pi+3\pi+...+642\pi=\pi(1+2+3+...+642)=\dfrac{642(642+1)}{2}\pi=206403\pi$

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX, COSX:

Có dạng $a\sin x+b\cos x=c(1)$ trong đó $\begin{cases}a,b,c\in\mathbb{R}\\ a^2+b^2\neq 0\end{cases}$

Phương pháp giải:

Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Đặt $\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha\end{cases} \Rightarrow (1)\Rightarrow \sin x.\cos\alpha+\cos x.\sin\alpha=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}(2)$. Đây là phương trình lượng giác cơ bản.

+ Phương trình $\sin(x+\alpha)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ có nghiệm khi:

$$\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1\Leftrightarrow \dfrac{c^2}{a^2+b^2}\le 1\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$$

+ Bạn có thể đặt: $\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha\end{cases}$

$\Rightarrow (1) \Rightarrow \cos x.\cos\alpha + \sin x.\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Việc đặt thế nào thì tùy từng bài để được lời giải hợp lý nhất.

Ví dụ 1. Phương trình $m\sin x - \cos x = 1$ với m là tham số vô nghiệm khi:

A. $m \in (0;+\infty)$. **B.** $m \in \mathbb{R}\setminus(0)$. **C.** $m \in \varnothing$. **D.** $m = 0$.

Lời giải:

Chọn C.

+ Ta đi tìm m để phương trình $m\sin x - \cos x = 1$ có nghiệm rồi lấy phần bù

+ Ta có: Phương trình $m\sin x - \cos x = 1(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + (-1)^2 \ge 1^2 \Leftrightarrow m^2 \ge 0 \forall m \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$ suy ra phương trình $m\sin x - \cos x = 1$ vô nghiệm khi $m \in \varnothing$

Ví dụ 2. Nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \dfrac{1}{2}$ (chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+3} = 2$)

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{3}\sin x + \sin\dfrac{\pi}{3}\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 3. Gọi a,b lần lượt là nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\dfrac{\cos x - \sin 2x}{2\cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$, ta có:

A. $ab = 0$. **B.** $ab = \dfrac{11\pi^2}{6}$. **C.** $ab = -\dfrac{11\pi^2}{6}$. **D.** $ab = -\dfrac{\pi^2}{36}$.

Lời giải:

Chọn C.

+ Điều kiện: $2\cos^2 x - \sin x - 1 \ne 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 \ne 0$