NHỊ THỨC NEWTON

A. LÝ THUYẾT

1. Công thức nhị thức Newton

Khai triển $(a+b)$ được cho bởi công thức sau:

Định lý 1

Với a, b là các số thực và n là số nguyên dương, ta có

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n.(1)$$

Quy ước $a^0=b^0=1$

Công thức trên được gọi là công thức nhị thức Newton (viết tắt là Nhị thức Newton).

STUDY TIP

Trong biểu thức ở VP của công thức (1)

a) Số các hạng tử là $n+1$.

b) Số các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đén 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

Hệ quả

Với $a=b=1$, thì ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n$.

Với $a=1;\ b=-1$, ta có $0=C_n^0-C_n^1+...+(-1)^kC_n^k+...+(-1)^nC_n^n$

Các dạng khai triển cơ bản nhị thức Newton

$$(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^kx^{n-k}+...+C_n^{n-1}x+C_n^n$$

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^kx^k+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$$

$$(x-1)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-...+(-1)^kC_n^kx^k+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nC_n^nx^n$$

$$C_n^k=C_n^{n-k}$$

$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},\ (n\ge 1)$$

$$k.C_n^k=\frac{\text{k}.n!}{(n-k)!\text{k}!}=\frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=nC_{n-1}^{k-1}$$

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{k.n!}{(k+1)(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

2. Tam giác Pascal.

n = 0			1		
n = 1		1		1	
n = 2	1		2		1

n = 3 1 3 3 1
n = 4 1 4 6 4 1
n = 5 1 5 10 10 5 1

Tam giác Pascal được thiết lập theo quy luật sau

- Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.
- Nếu biết hàng thứ n $(n \ge 1)$ thì hàng thứ n+1tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Nhận xét: Xét hàng thứ nhất, ta có:

$1 = C_1^0,\ 1 = C_1^1.$

Ở hàng thứ 2, ta có

$1 = C_3^0,\ 2 = C_2^1,\ 1 = C_2^2.$

Ở hàng thứ 3, ta có

$1 = C_3^0,\ 3 = C_3^1, 3 = C_3^2,\ 1 = C_3^3.$

STUDY TIP

Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pascal là dãy gồm $(n+1)$ số $C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2, ..., C_n^{n-1},\ C_n^n.$

B. Các dạng toán sử dụng công thức tổ hợp và nhị thức Newton

DẠNG 1. Xác định điều kiện của số hạng thỏa mãn yêu cầu cho trước

Phương pháp chung:

- Xác định số hạng tổng quát của khai triển $T^{k+1} C_n^k a^{n-k} b^k$ (số hạng thứ $k+1$).
- Từ T^{k+1} kết hợp với yêu cầu bài toán ta thiết lập một phương trình (thông thường theo biến k).
- Giải phương trình để tìm kết quả.

Ví dụ 1. Trong khai triển $\left(a^2 - \frac{1}{b}\right)$, số hạng thứ 5 là

A. $-35a^6b^{-4}$. **B.** $35a^6b^{-4}$. **C.** $-24a^4b^{-5}$. **D.** $24a^4b^{-5}$

Lời giải

Đáp án B.

Theo công thức tổng quát ở lý thuyết thì ta có số hạng thứ 5 là

$C_7^4\left(a^2\right)^3\left(-\frac{1}{b}\right)^4 = 35a^6b^{-4}$.

Ví dụ 2. Trong khai triển $\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right), (x > 0)$ số hạng không chứa x sau khi khai triển là

A. 4354560. **B.** 13440. **C.** 60466176. **D.** 20736.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có $\left(2\sqrt[3]{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10}=\left(2.x^{\frac{1}{3}}-3.x^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

Từ lý thuyết ở trên ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là

$C_{10}^{k}.2^{10-k}.3^{k}.x^{\frac{10-k}{3}}.x^{-\frac{k}{2}}=C_{10}^{k}.2^{10-k}.3^{k}.x^{\frac{20-5k}{6}}$. Theo yêu cầu đề bài ta có $20-5k=0\Leftrightarrow k=4$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{10}^{4}.2^{6}.3^{4}=210.256.81=435460$.

STUDY TIP

Trong các bài toán tìm số hạng trong khi khai triển các nhị thức, ta chú ý các công thức sau

$$\left(x^{m}\right)^{n}=x^{m.n},\ x^{m}.x^{n}=x^{m+n}$$

$$\frac{x^{m}}{x^{n}}=x^{m-n},\ \sqrt[n]{x^{m}}=x^{\frac{m}{n}}$$

Cho bài toán:

Cho nhị thức $P=\left[a(x)+b(x)\right]^{n}$ tìm số hạng chứa x^{α} (không chứa x khi $\alpha=0$) trong khai triển đa thức P.

- Giải phương trình tổ hợp hoặc sử dụng công thức tính tổng để tìm n (nếu giả thuyết chưa cho n).
- Số hạng tổng quát trong khai triển $T_{k+1}=g(n,k).x^{f(n,k)}$.
- Theo đề thì $f(n,k)=\alpha\Rightarrow k=k_0$. Thay $k=k_0$ vào $g(n,k)$ thì ta có số hạng cần tìm.

Ví dụ 3. Cho n là số dương thỏa mãn $5C_{n}^{n-1}=C_{n}^{3}$. Số hạng chứa x^{5} trong khai triển nhị thức Newton $P=\left(\dfrac{nx^{2}}{14}-\dfrac{1}{x}\right)^{n}$ với $x\neq 0$ là

A. $-\dfrac{35}{16}$. **B.** $-\dfrac{16}{35}$. **C.** $-\dfrac{35}{16}x^{5}$. **D.** $-\dfrac{16}{35}x^{5}$.

Lời giải

Đáp án C.

Điều kiện $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$.

Ta có $5C_{n}^{n-1}=C_{n}^{3}\Leftrightarrow\dfrac{5.n!}{1!.(n-1)!}=\dfrac{n!}{3!.(n-3)!}\Leftrightarrow\dfrac{5}{(n-3)!(n-2)(n-1)}=\dfrac{1}{6.(n-3)!}$

$$\Leftrightarrow n^{2}-3n-28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=7\,(TM)\\ n=-4\,(L)\end{array}\right.$$

Với $n=7$ ta có $P=\left(\dfrac{x^{2}}{2}-\dfrac{1}{x}\right)^{7}$

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1}=\dfrac{(-1)^{k}}{2^{7-k}}.C_{7}^{k}.x^{14-3k}$

Suy ra $14-3k=5 \Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng chứa x^5 trong khai triển là $T_4=-\dfrac{35}{16}x^5$.

STUDY TIP

Chú ý phân biệt giữa hệ số và số hạng.

Với $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{g(k)}$; Số hạng chứa x^α tương ứng với $g(k)=\alpha$; giải phương trình ta tìm được k.

* Nếu $k \in \mathbb{N}$; $k \le n$ thì hệ số phải tìm là a_k.

* Nếu $k \notin \mathbb{N}$ hoặc $k>n$ thì trong khai triển không có số hạng chứa x^α, hệ số phải tìm bằng 0.

Ví dụ 4. Trong khai triển biểu thức $F=\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là

A. 8. **B.** 4536. **C.** 4528. **D.** 4520.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^{9-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^k$

Ta thấy bậc hai của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố, do đó để T_{k+1} là một số nguyên thì

$$\begin{cases} k\in\mathbb{N} \\ 0\le k\le 9 \\ (9-k)\,\vdots\, 2 \\ k\,\vdots\, 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=3\Rightarrow T_4=C_9^3\left(\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=4536 \\ k=9\Rightarrow T_{10}=C_9^9\left(\sqrt{3}\right)^0\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=8 \end{array}\right.$$

Vậy trong khai triển có hai số hạng nguyên là $T_4=4536$ và $T_{10}=8$.

Ví dụ 5. Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức $P(x)=(2x+1)^{13}=a_0x^{13}+a_1x^{12}+...+a^{13}$.

A. 8. **B.** 4536. **C.** 4528. **D.** 4520.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có số hạng tổng quát sau khi khai triển nhị thức $(2x+1)^{13}$ là $a_n=C_{13}^n.2^{13-n}$.

$\Rightarrow a_{n-1}=C_{13}^{n-1}.2^{14-n}$, $(n=1,2,3,...,13)$

Xét bất phương trình với ẩn số n ta có $a_{n-1}\le a_n \Leftrightarrow C_{13}^{n-1}.2^{14-n}\le C_n^{13}.2^{13-n}$

$$\Leftrightarrow \frac{2.13!}{(n-1)!(14-n)!}\le\frac{13!}{n!(13-n)!}\Leftrightarrow\frac{2}{14-n}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow n\le\frac{14}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Do đó bất đẳng thức $a_{n-1}\le a_n$ đúng với $n\in\{1,2,3,4\}$ và dấu đẳng thức không không xảy ra.

Ta được $a_0<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ và $a_4>a_5>a_6>...>a_{13}$

Từ đây ta có hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển nhị thức là

$a_4 = C_{13}^4.2^9 = 366080.$

Phương pháp giải

Giả sử sau khi khai triển ta được đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

Xét các khả năng sau:

1. Nếu $a_k > 0 \forall k$ (trường hợp $a_k < 0 \forall k$ tương tự)

Ta xét bất phương trình $a_k \le a_{k+1}$, thông thường giải ra được nghiệm $k \le k_0 \in \mathbb{N}$. Do k nguyên nên $k = 0,1,...,k_0$. Từ đó suy ra bất phương trình $a_k > a_{k+1}$ có nghiệm $k > k_0$.

Chú ý rằng trong các bài toán về nhị thứ Newton thì phương trình $a_k = a_{k+1}$ là bậc nhất theo k nên có nhiều nhất một nghiệm và nếu có thì phương trình đó là $k = k_0$. Như vậy có hai khả năng xảy:

Nếu $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = k_0$ thì ta có: $a_0 < a_1 < ... < a_{k_0-1} < a_{k_0} = a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > ... > a_n$

Khi đó ta tìm được hai hệ số lớn nhất là $a_{k_0} = a_{k_0+1}$

Nếu phương trình $a_k = a_{k+1}$ vô nghiệm thì ta có:

$a_0 < a_1 < ... < a_{k_0-1} < a_{k_0} > a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > ... > a_n$.

Khi đó ta có a_{k_0} là hệ số lớn nhất trong khai triển của nhị thức.

2. Nếu $a_{2k} > 0 \forall k$ và $a_{2k+1} < 0 \forall k$ (trường hợp $a_{2k} < 0 \forall k$ và $a_{2k+1} > 0 \forall k$ tương tự) thì khi đó bài toán trở thành tìm số lớn nhất trong các số a_{2k}. Ta cũng xét bất phương trình $a_{2k} \le a_{2k+2}$ rồi làm tương tự như phần 1.

STUDY TIP

Phương pháp tìm hệ số lớn nhất trong khai triển

+ Áp dụng khai triển $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

+ Xác định số hạng tổng quát $C_n^k a^{n-k} b^k$ suy ra hệ số tổng quát là một dãy số theo a_k.

+ Xét tính tăng giảm của a_k từ đó tìm được k tương ứng. Suy ra hệ số lớn nhất trong khai triển.

✷Đọc thêm

Một thuật toán khai triển nhanh tam thức Newton

Bài toán: khai triển tam thức Newton sau $(a+b+c)^n$

Lời giải tổng quát

Bước 1: Viết tam giác Pascal đến dòng thứ n, để có được hệ số của nhị thức Newton $(b+c)^n$.

Bước 2: Ở các đầu dòng ta viết các đơn thức là khai triển nhị thức Newton $(a+1)^n$.

Bước 3: Nhân lần lượt các đơn thức ở đầu dòng mỗi cột với các đơn thức còn lại trên mỗi dòng đó rồi cộng các kết quả lại, ta thu được kết quả khai triển.

Cụ thể ta có ở dưới đây

$$\begin{array}{lccccccc}
1.a^n & & & & 1 & & & \\
C_n^1.a^{n-1} & & & 1b & & 1c & & \\
C_n^2.a^{n-2} & & 1b^2 & & 2bc & & 1c^2 & \\
C_n^1.a^{n-3} & 1b^2 & & 3b^2c & & 3bc^2 & & 1c^2 \\
 & & & & \ldots & & & \\
1.a^o & 1.b^n & C_n^1.b^{n-1}.c & & \ldots & & C_n^{n-1}.b.c^{n-1} & 1.c^n
\end{array}$$

Sau khi cộng lại ta được:

$$\left(a+b+c\right)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p.a^{n-p}.(\sum_{q=0}^{n}C_p^q.b^{n-q}.c^q)=\sum_{0\le q\le p\le n}C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$$

STUDY TIP

Sau khi khai triển $\left(a+b+c\right)^n$ với $0\le q\le p\le n$ số hạng thứ $p+1$ trong khai triển là $T_p=C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$.

Ví dụ 6. Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

A. 1695. **B.** 1485. **C.** 405. **D.** 360.

Đáp án A.

Lời giải

Với $0\le q\le p\le 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

$$T_p=C_{10}^p.C_p^q.(3x^2)^{10-p}.(x)^{p-q}.1^q=C_{10}^p.C_p^q.3^{10-p}.(x)^{p-q+20-2p}$$

Theo đề bài thì $p-q+20-2p=4\Leftrightarrow p+q=16$

Do $0\le q\le p\le 10$ nên $(p;q)\in\left\{(8;8);(9;7);(10;6)\right\}$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

$$C_{10}^8.C_8^8.3^{10-8}+C_{10}^9.C_9^7.3^{10-9}+C_{10}^{10}.C_{10}^6.3^{10-10}=1695.$$

STUDY TIP

Chú ý khi ra nhiều trường hợp của (p,q) thì ta công hệ số các trường hợp với nhau để có kết quả.

Ví dụ 7. Tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển thành các đa thức của $\left(x+x^2+x^3\right)^{10}$ là:

A. 135. **B.** 45. **C.** $135x^{13}$. **D.** $45x^{13}$.

Đáp án C.

Lời giải

Với $0 \le q \le p \le 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $\left(x+x^2+x^3\right)^{10}$ là:

$$T_p = C_{10}^p.C_p^q.(x)^{10-p}.(x^2)^{p-q}.(x^3)^q = C_{10}^p.C_p^q.3^{10-p}.(x)^{10+p+q}$$

Theo đề bài thì $10+p+q=13 \Leftrightarrow p+q=3$

Do $0 \le q \le p \le 10$ nên $(p;q) \in \{(2;1);(3;0)\}$.

Vậy hệ số của x^{13} trong khai triển là: $C_{10}^2.C_2^1 + C_{10}^3.C_3^0 = 210$.

Dạng 2: Các bài toán về công thức tổ hợp và nhị thức Newton

Các bài toán về công thức tổ hợp và nhị thức Newton

Một số công thức thường dùng trong các bài tập dạng này như sau:

$C_n^k = C_n^{n-k}$ $\qquad$ $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1},\ (n>1)$

$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \quad (*)$ $\qquad$ $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ $\qquad$ $2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \dots + C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$

$2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \dots + C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$

STUDY TIP

Ngoài ra từ công thức $(*)$ ta mở rộng được công thức:

$C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$

$C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$

Ví dụ 1. Cho $n;k \in \mathbb{N}^*, k \le n$ trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai?**

A. $C_n^k = \dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$.. $\qquad$ **B.** $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$..

C. $C_n^k = C_n^{n-k}$.. $\qquad$ **D.** $nC_n^k = kC_{n-1}^{k-1}$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: **Giải theo phương pháp tự luận**

Với A: Ta có $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n}{k}\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$

Từ A ta suy ra $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, từ đây ta có luôn D sai. Ta chọn D.

Đọc thêm: Chứng minh B; C.

Với B: $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{n!}{(k+1)(n-k)!k!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!} = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

Với C: Ta có $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\text{k}!} = C_n^{n-k}$

Cách 2: **Sử dụng máy tính để thử**

Với các bài toán xét đẳng thức đúng thi ta có thể sử dụng máy tính để thử. Ta thử với từng trường hợp, thử với cặp số cụ thể.

Ví dụ với A ta thử ngay với $k=3; n=4$ ta thấy đẳng thức này đúng, suy ra A đúng, từ đây suy ra D sai.

Math ◢

$4C3 - \dfrac{4}{3} \times 3C2$

STUDY TIP

Đẳng thức ở phương án A là một đẳng thức quan trọng trong các bài toán về công thức tổ hợp Ta có hai hệ quả quan trọng như sau:

Với mọi $n; k \in \mathbb{N}^*, 2 \le k \le n$

- **Hệ quả 1:** Ta có
$(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2}$
- **Hệ quả 2:** Ta có
$k^2 C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$

Ví dụ 2. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3$, Số các số n thỏa mãn là:.

A. 10 số. **B.** 9 số. **C.** 8 số. **D.** 7 số.

Đáp án A.

Lời giải

Điều kiện $n \ge 3$. Ta có $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3 \Leftrightarrow 6n - 6 \ge C_n^2 \left(do\, C_{n+1}^3 = C_n^3 + C_n^{32} \right)$

$\Leftrightarrow 6n - 6 \ge \dfrac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow n^2 - 13n + 12 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le n \le 12.$

Ví dụ 3. Cho $S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}$. Tính S.

A. $S = 2^{15}$. **B.** $S = 2^{14}$. **C.** $S = 2^{13}$. **D.** $S = 2^{12}$.

Đáp án B

Lời giải

Cách 1: Sử dụng đẳng thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta được:

$S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15} = C_{15}^7 + C_{15}^6 + C_{15}^5 + ... + C_{15}^0.$

$$\Rightarrow 2S=(C_{15}^{8}+C_{15}^{9}+C_{15}^{10}+...+C_{15}^{15})+(C_{15}^{7}+C_{15}^{6}+C_{15}^{5}+...+C_{15}^{0})=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{k}=2^{15}$$

$$\Rightarrow S=2^{14}$$

Vậy $S=(C_{15}^{8}+C_{15}^{9}+C_{15}^{10}+...+C_{15}^{15})=2^{14}$

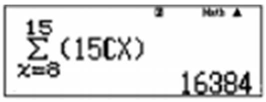
Cách 2: Sử dụng máy tính Casio

Do bài toán này, tổng bé và số các số hạng trong tổng ít nên ta có sử dụng lệnh tổng trong máy tính Caiso bằng cách bấm máy: $SHIFT\ LOG_{\square}\square(\sum_{\square}^{\square}\square)$.

Ta nhập $SHIFT\ LOG_{\square}15\ SHIFT \div alpha\,)\nabla 8\Delta 15=$

STUDY TIP

Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.



Với các bài toán tính tổng ở trên ta cần chú ý kỹ thuật sử dụng các đẳng thức cơ bản sau:

$C_n^k=C_n^{n-k}, C_n^k=\dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$ và các hệ quả: $\begin{cases} k(k-1)C_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \\ k^2C_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1} \end{cases}$

Đẳng thức Pascal: $C_m^k=C_{m-1}^k+C_{m-1}^{k-1}$

$$\begin{cases} C_m^0-C_m^1+C_m^2-...+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}+(-1)^mC_m^m=(-1+1)^m=0 \\ C_m^0+C_m^1+C_m^2+...+C_m^{m-1}+C_m^m=(1+1)^m=2^m \end{cases}$$

Xét $m=2n$: $\begin{cases} C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-...+(-1)^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+(-1)^{2n}C_{2n}^{2n}=(-1+1)^m=0 \\ C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=(1+1)^{2n}=2^{2n} \end{cases}$

Cộng vế theo vế, trừ vế theo vế, ta được kết quả sau:

$$C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+...+C_{2n}^{2n-2}+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+...+C_{2n}^{2n-3}+C_{2n}^{2n-1}=2^{n-1}$$

Xét *m* = *2n* + *1*, hoàn toàn tương tự, ta được:

$$C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^2+C_{2n+!}^4+...+C_{2n+1}^{2n}=C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+...+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n}$$

Ví dụ 4. Trong các đẳng thức sau đẳng thức nào sai?

A. $S_1=1C_n^1+2C_n^2+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=n2^{n-1}$.

B. $S_2=1.2.C_n^1+2.3.C_n^2+...+(n-1).n.C_n^n=(n-1).n.C_{n-2}^{k-2}$.

C. $S_3=1^2C_n^1+2^2C_n^2+...+(n-1)^2C_n^{n-1}+n^2C_n^n=n(n+1)2^{n-2}$.

D. $S_4=\dfrac{C_n^0}{1}+\dfrac{C_n^1}{2}+\dfrac{C_n^2}{3}+...+\dfrac{C_n^{n-1}}{n}+\dfrac{C_n^n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(2^n-1)$.

Đáp án D.

Lời giải