

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

1. Hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với \sin của góc lượng giác có số đo radian bằng x được gọi là hàm số \sin , kí hiệu là $y = \sin x$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với \cos của góc lượng giác có số đo radian bằng x được gọi là hàm số \cos , kí hiệu là $y = \cos x$.

Tập xác định của các hàm số $y = \sin x; y = \cos x$ là \mathbb{R} .

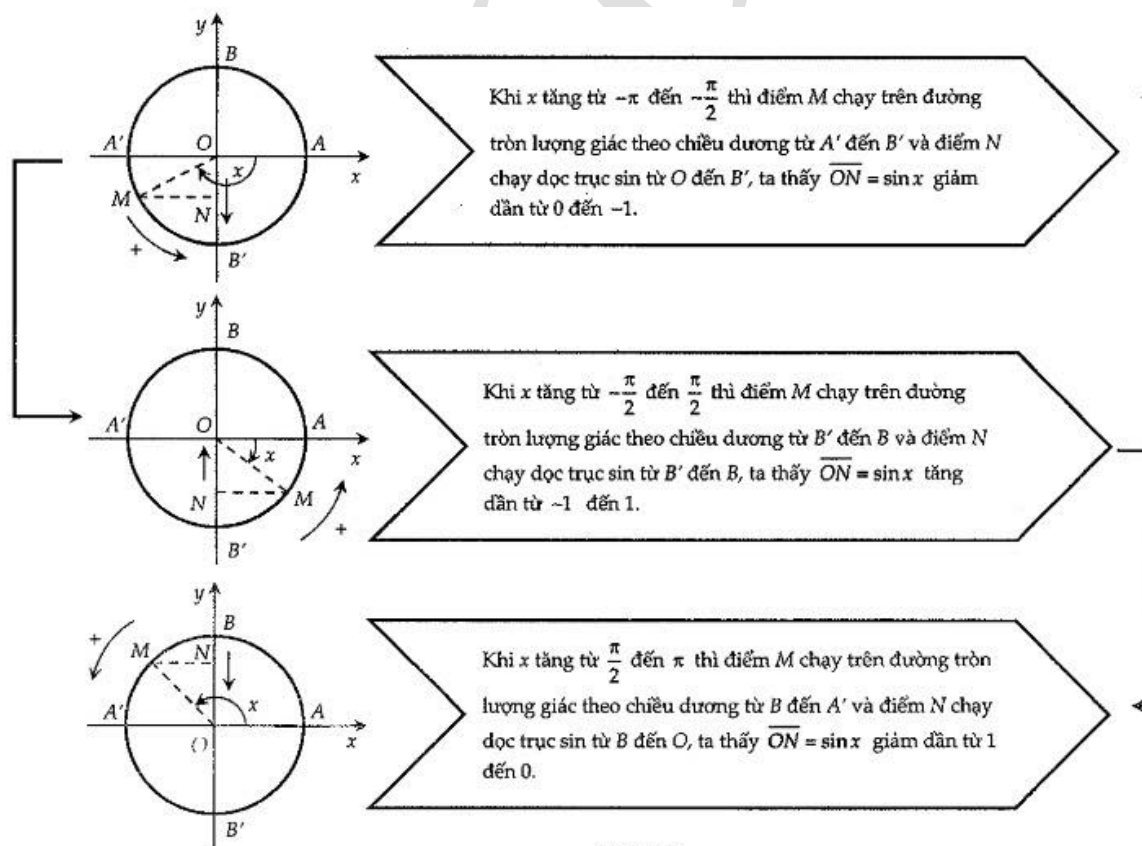
a) Hàm số $y = \sin x$

Nhận xét: Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ do hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ là đối xứng và $-\sin x = \sin(-x)$.

Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π .

Sự biến thiên:

Sự biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ được biểu thị trong sơ đồ (hình 1.4) phía dưới:



Hình 1.4

Bảng biến thiên:

Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ như sau:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \sin x$					

STUDY TIP

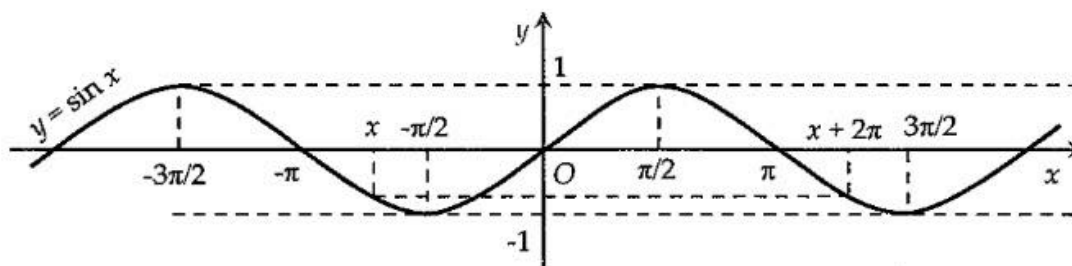
Khái niệm:

Hàm số $f(x)$ xác định trên D gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với

$$\text{mọi } x \text{ thuộc } D \text{ ta có } \begin{cases} x - T \in D; x + T \in D \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}.$$

Số dương T nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn tính chất trên gọi là chu kì của hàm tuần hoàn.

Đồ thị hàm số:



Hình 1.5

Nhận xét: Do hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ trên \mathbb{R} và tuần hoàn với chu kì 2π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên \mathbb{R} ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0; \pi]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O , ta được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành ta được các đoạn có độ dài $2\pi; 4\pi, \dots$

STUDY TIP

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π ,

hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Tương tự ta suy ra được hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

GHI NHỚ

Hàm số $y = \sin x$:

- Có tập xác định là \mathbb{R} .
- Có tập giá trị là $[-1; 1]$.
- Là hàm số lẻ.
- Đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- Có đồ thị là một đường hình sin.
- Tuần hoàn với chu kì 2π .
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

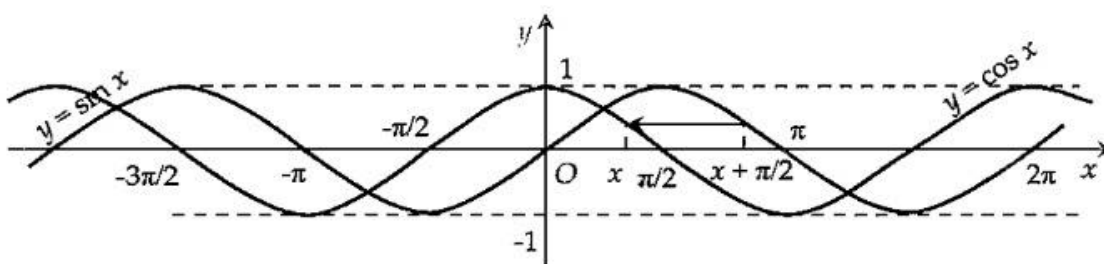
b) Hàm số $y = \cos x$

Ta thấy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên $[-\pi; \pi]$.

x	$-\pi$	0	π
$y = \cos x$	-1	1	-1

Đồ thị hàm số $y = \cos x$:



Hình 1.6

STUDY TIP

Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kỳ 2π , hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
Tương tự ta suy ra được hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

GHI NHỚ

Hàm số $y = \cos x$:

- Có tập xác định là \mathbb{R} .
- Là hàm số chẵn.
- Là một đường hình sin.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Đọc thêm

Hàm số $y = a \cdot \sin(\omega x + b) + c, (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ là một hàm tuần hoàn với chu kỳ cơ sở

$\frac{2\pi}{|\omega|}$ vì:

$$a \cdot \sin(\omega(x+T) + b) + c = a \cdot \sin(\omega x + b) + c, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \sin(\omega x + b + \omega T) = a \cdot \sin(\omega x + b), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \omega T = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow T = k \frac{2\pi}{\omega}, (k \in \mathbb{Z}).$$

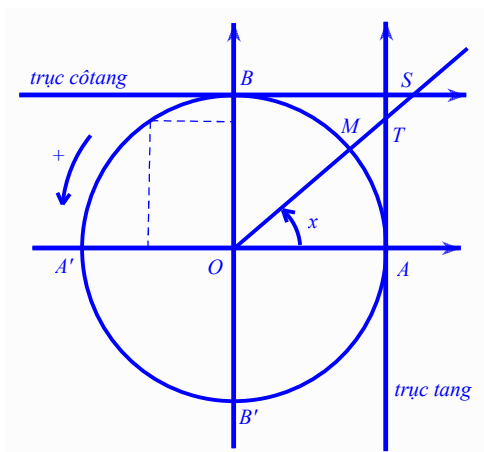
Và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Tương tự hàm số $y = a \cdot \cos(\omega x + b) + c, (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với

chu kỳ cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Ứng dụng thực tiễn: Dao động điều hòa trong môn Vật lý chương trình 12.

2. Hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$



Hình 1.7

Với $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D_1$ với số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

được gọi là hàm số tang, kí hiệu là $y = \tan x$. Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là D_1 .

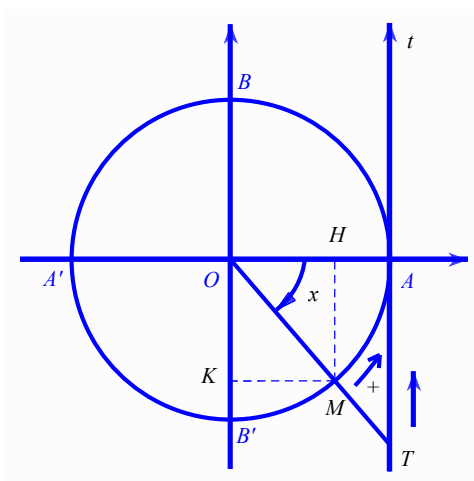
Với $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D_2$ với số thực $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ được

gọi là hàm số côtang, kí hiệu là $y = \cot x$. Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là D_2 .

Nhận xét: - Hai hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$ là hai hàm số lẻ.

- Hai hàm số này là hai hàm số tuần hoàn với chu kì π .

a) Hàm số $y = \tan x$



Hình 1.8

Sự biến thiên: Khi cho $x = (OA, OM)$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B' đến B (không kể B' và B). Khi đó điểm T thuộc trục tang sao cho $\overline{AT} = \tan x$ chạy dọc theo At , nên $\tan x$ tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$ (qua giá trị 0 khi $x = 0$).

Giải thích: $\tan x = \frac{\overline{MH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$

Nhận xét: Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. Đồ thị hàm

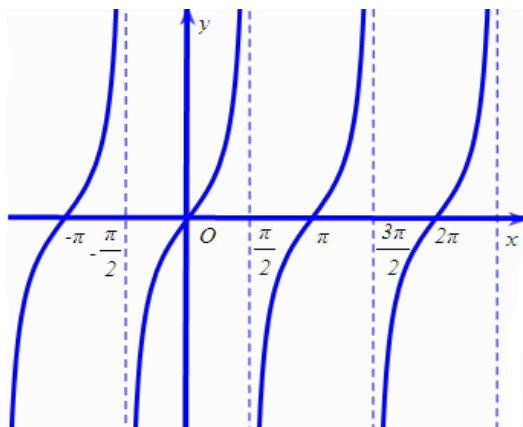
số $y = \tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

Đồ thị hàm số:

Nhận xét: Do hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ và tuần hoàn với chu kì π

nên khi vẽ đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O , ta được đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành.



Hình 1.9

STUDY TIP

Hàm số $y = \tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận

GHI NHỚ

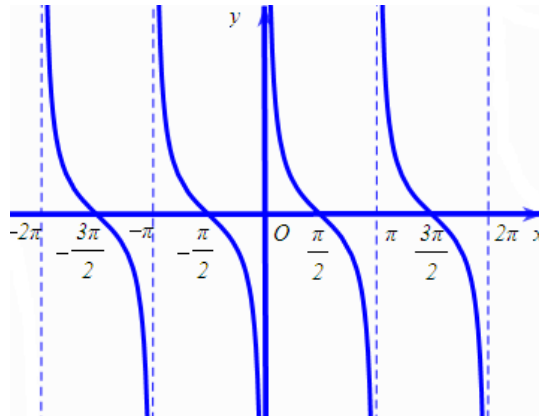
Hàm số $y = \tan x$:

- Có tập xác định $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ - Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π - Có tập giá trị là \mathbb{R}
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận

b) Hàm số $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Tương tự khảo sát như đối với hàm số $y = \tan x$ ở trên thì ta có thể vẽ đồ thị hàm số $y = \cot x$ như sau:



Hình 1.10

GHI NHỚ

Hàm số $y = \cot x$:

- Có tập xác định: $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π
- Có tập giá trị là \mathbb{R}
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.