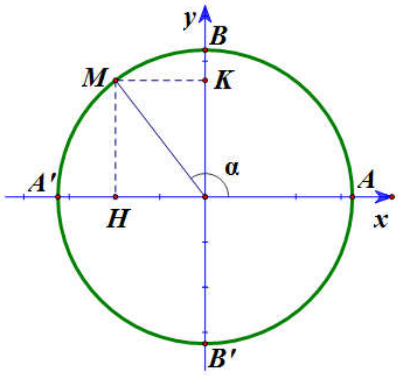
CHỦ ĐỀ 1:
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
BÀI: GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

1. Giá trị lượng giác của cung α.

Trên đường tròn lượng giác (hình 1.1) cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$:



Hình 1.1

Gọi $M(x;y)$ với tung độ của M là $y = \overline{OK}$, hoành độ là $x = \overline{OH}$ thì ta có:

$\sin\alpha = \overline{OK}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \overline{OH}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};(\cos\alpha \neq 0)$ $\qquad$ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};(\sin\alpha \neq 0)$

Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của cung α.

Các hệ quả cần nắm vững

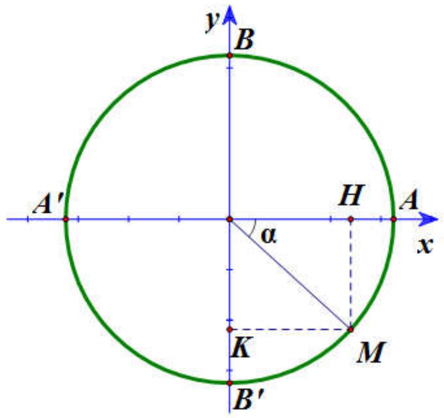
1. Các giá trị $\sin\alpha$; $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Và ta có:
$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$$
$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2. $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

3. $\tan\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

4. $\cot\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Dấu của các giá trị lượng giác của cung α phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác (hình 1.2).

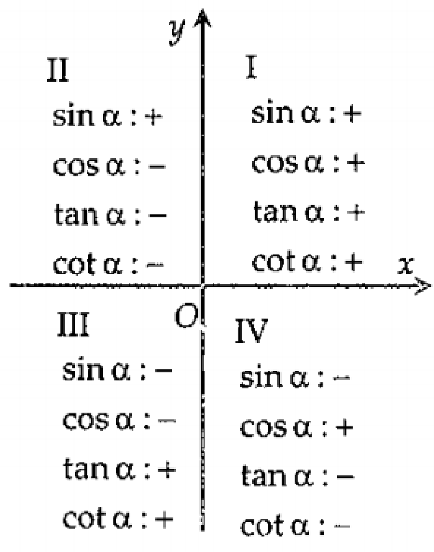


Hình 1.2

Ta có bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau

Góc phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\tan\alpha$	+	-	+	-
$\cot\alpha$	+	-	+	-

Ở hình 1.3 là một cách nhớ khác để xác định dấu của các giá trị lượng giác



Hình 1.3

2. Công thức lượng giác

Công thức cơ bản

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\cot^2 x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

Cung đối nhau

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

Công thức cộng

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

Cung bù nhau

$\sin x = \sin(\pi - x)$

$\cos x = -\cos(x - \pi)$

$\tan x = \tan(x - \pi)$

Công thức đặc biệt

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Góc nhân đôi

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Góc chia đôi

$\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Góc nhân ba

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

Góc chia ba

$\sin^3 x = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

STUDY TIP

Ở đây từ các công thức góc nhân đôi, góc nhân ba ta có thể suy ra công thức góc chia đôi, chia ba mà không cần nhớ nhiều công thức.

Biến đổi tích thành tổng

$\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos(x + y)\right]$

$\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right]$

$\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x - y) + \sin(x + y)\right]$

Biến đổi tổng thành tích

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α (độ)	0	30°	45°	60°	90°	180°
α (radian)	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định	0

STUDY TIP

Từ bảng giá trị lượng giác các cung đặc biệt ở bên ta thấy một quy luật như sau để độc giả có thể nhớ các giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

α	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Các giá trị ở tử số tăng dần từ $\sqrt{0}$ đến $\sqrt{4}$. Ngược lại đối với giá trị $\cos$, tử số giảm dần từ $\sqrt{4}$ về $\sqrt{0}$.

BÀI: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

1. Hàm số $y = sinx$ và hàm số $y = cos\,x$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với sin của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y = sinx$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với $cosin$ (cos) của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là hàm số cos, kí hiệu là $y = cos\,x$.

Tập xác định của các hàm số $y = sinx; y = cos\,x$ là $\mathbb{R}$.

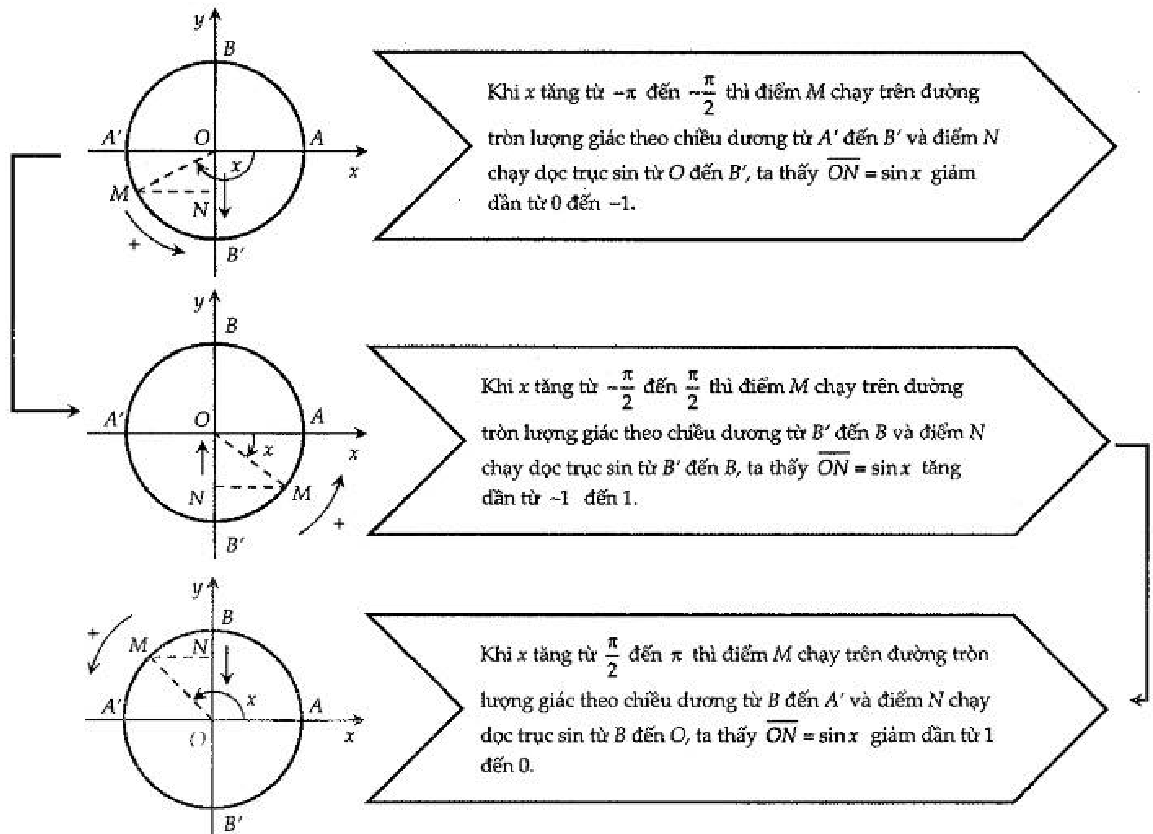
a) Hàm số $y = sinx$

Nhận xét: Hàm số $y = sinx$ là hàm số lẻ do hà số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ là đối xứng và $-sinx = sin(-x)$.

Hàm số $y = sinx$ tuần hoàn với chu kì 2π.

Sự biến thiên:

Sự biến thiên của hàm số $y = sinx$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$ được biểu thị trong sơ đồ (hình 1.4) phía dưới:



Hình 1.4

Bảng biến thiên:

Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $y = sinx$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ như sau:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = sinx$	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

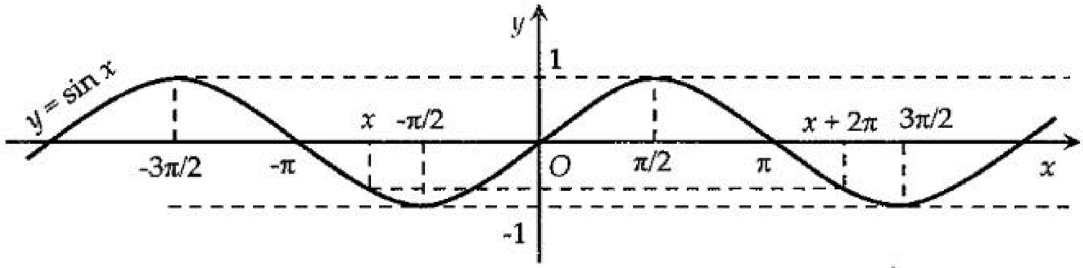
STUTY TIP

Khái niệm:

Hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên D gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi x thuộc D ta có $\begin{cases} x - T \in D; x + T \in D \\ f(x+T) = f\left(x\right) \end{cases}$.

Số dương T nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn tính chất trên gọi là chu kì của hàm tuần hoàn.

Đồ thị hàm số:



Hình 1.5

Nhận xét: Do hàm số $y = sinx$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì 2π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y = sinx$ trên $\mathbb{R}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $\left[0;\pi\right]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa O, ta được đồ thị hàm số $y = sinx$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành ta được các đoạn có độ dài $2\pi;4\pi,...$

STUDY TIP

Hàm số $y = sinx$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y = sinx$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

Tương tự ta suy ra được hàm số $y = sinx$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

GHI NHỚ

Hàm số $y = sinx$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Có tập giá trị là $\left[-1;1\right]$.
- Là hàm số lẻ.
- Đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- Có đồ thị là một đường hình sin.
- Tuần hoàn với chu kì 2π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

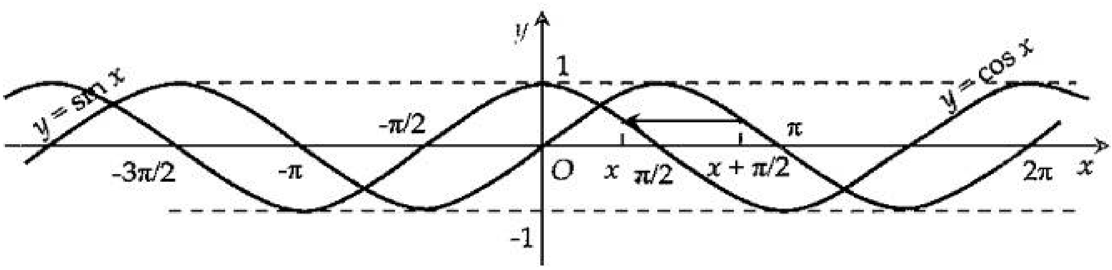
b) Hàm số $y = cos x$

Ta thấy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi;\pi\right]$.

x	$-\pi$	0	π
$y = \cos x$	-1 ↗	1	↘ -1

Đồ thị hàm số $y = \cos x$:



Hình 1.6

STUTY TIP

Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\pi;0\right)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\pi + k2\pi; k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Tương tự ta suy ra được hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k2\pi;\pi + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

GHI NHỚ

Hàm số $y = \cos x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Là hàm số chẵn.
- Là một đường hình sin.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\pi + k2\pi; k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k2\pi;\pi + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Đọc thêm

Hàm số $y = a.\sin\left(\omega x + b\right) + c, \left(a,b,c,\omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0\right)$ là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ vì:

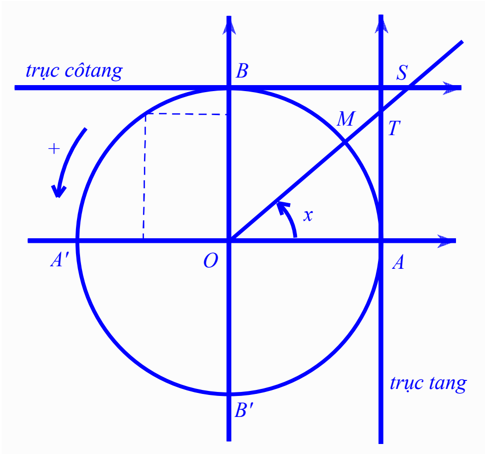
$$a.sin\left(\omega\left(x+T\right)+b\right)+c=a.sin\left(\omega x+b\right)+c,\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow a.sin\left(\omega x+b+\omega T\right)=a.sin\left(\omega x+b\right),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \omega T=k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow T=k\frac{2\pi}{\omega},\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Tương tự hàm số $y=a.cos\left(\omega x+b\right)+c,\left(a,b,c,\omega\in\mathbb{R},a\omega\neq 0\right)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Ứng dụng thực tiễn: Dao động điều hòa trong môn Vật lý chương trình 12.

2. Hàm số $y=\tan x$ và hàm số $y=\cot x$



Hình 1.7

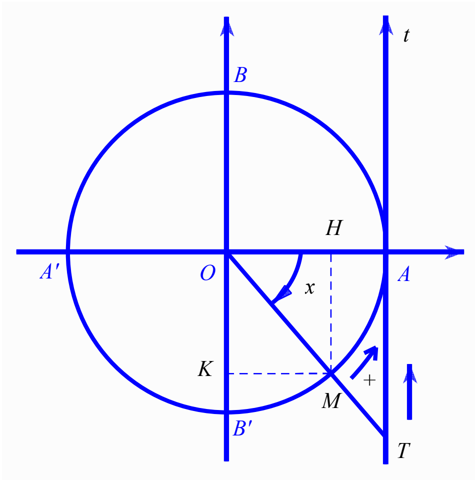
Với $D_1=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x\in D_1$ với số thực $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là hàm số tang, kí hiệu là $y=\tan x$. Hàm số $y=\tan x$ có tập xác định là D_1.

Với $D_2=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x\in D_2$ với số thực $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là hàm số côtang, kí hiệu là $y=\cot x$. Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là D_2.

Nhận xét: - Hai hàm số $y=\tan x$ và hàm số $y=\cot x$ là hai hàm số lẻ.

- Hai hàm số này là hai hàm số tuần hoàn với chu kì π.

a) Hàm số $y=\tan x$



Hình 1.8

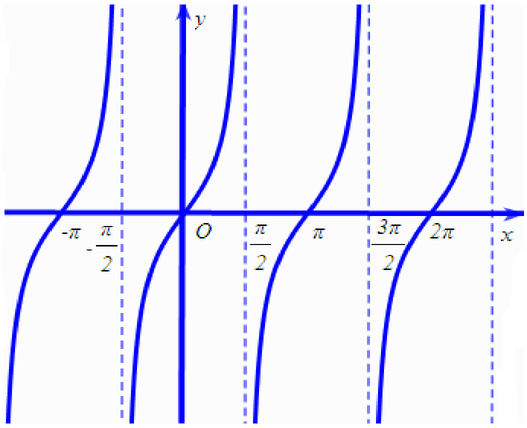
Sự biến thiên: Khi cho $x=(OA,OM)$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B' đến B (không kể B' và B). Khi đó điểm T thuộc trục tang sao cho $\overline{AT}=\tan x$ chạy dọc theo At, nên $\tan x$ tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$ (qua giá trị 0 khi $x=0$).

Giải thích: $\tan x=\overline{AT}$ vì $\tan x=\frac{\overline{MH}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{AT}}{1}=\overline{AT}$

Nhận xét: Hàm số $y=\tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$. Đồ thị hàm số $y=\tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

Đồ thị hàm số:

Nhận xét: Do hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$ và tuần hoàn với chu kì π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O, ta được đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành.



Hình 1.9

STUDY TIP

Hàm số $y=\tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận

GHI NHỚ

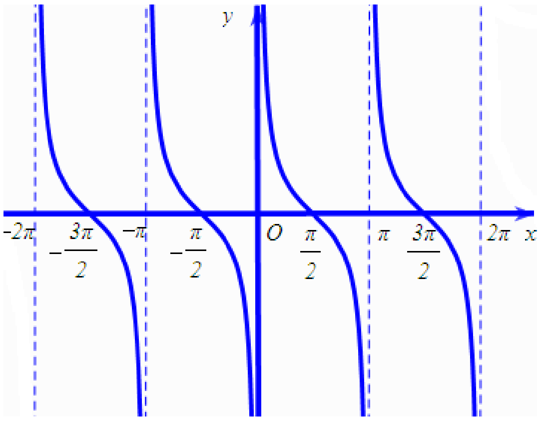
Hàm số $y=\tan x$:

- Có tập xác định $D_1=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$ - Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π - Có tập giá trị là $\mathbb{R}$
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận

b) Hàm số $y=\cot x$

Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định $D_2=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì π.

Tương tự khảo sát như đối với hàm số $y=\tan x$ ở trên thì ta có thể vẽ đồ thị hàm số $y=\cot x$ như sau:



Hình 1.10

GHI NHỚ

Hàm số $y = \cot x$:

- Có tập xác định: $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π
- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

B. Các dạng toán liên quan đến hàm số lượng giác

Dạng 1: **Bài toán tìm tập xác định của hàm số lượng giác**

Cách 1	***Cách 2***
Tìm tập D của x để $f(x)$ có nghĩa, tức là tìm $D = \{x \in \mathbb{R} \| f(x) \in \mathbb{R}\}$.	Tìm tập E của x để $f(x)$ không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus E$.

CHÚ Ý

A. Với hàm số $f(x)$ cho bởi biểu thức đại số thì ta có:

1. $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, điều kiện: * $f_1(x)$ có nghĩa

* $f_2(x)$ có nghĩa và $f_2(x) \neq 0$.

2. $f(x) = \sqrt[2m]{f_1(x)}, (m \in \mathbb{N})$, điều kiện: $f_1(x)$ có nghĩa và $f_1(x) \geq 0$.

3. $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{\sqrt[2m]{f_2(x)}}, (m \in \mathbb{N})$, điều kiện: $f_1(x), f_2(x)$ có nghĩa và $f_2(x) > 0$.

B. Hàm số $y = \sin x; y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$, như vậy

$y = \sin[u(x)]; y = \cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.

* $y = \tan[u(x)]$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

* $y = \cot[u(x)]$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq +k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

STUDY TIP

Ở phần này chúng ta chỉ cần nhớ kĩ điều kiện xác định của các hàm số cơ bản như sau:

1. Hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

2. Hàm số $y=\tan x$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. Hàm số $y=\cot x$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 1. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{2\cos x-1}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{5\pi}{3}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{5\pi}{3}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5\pi}{3}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn A.

Lời giải

Cách 1: Hàm số đã cho xác định khi

$$2\cos x-1\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\neq\cos\frac{\pi}{3}\\ \cos x\neq\cos\frac{5\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x\neq\frac{5\pi}{3}+k2\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z}.$$

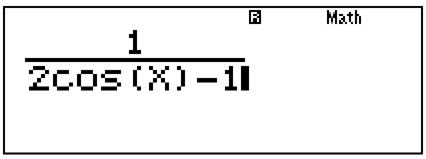
Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay tính giá trị của hàm số $y=\frac{1}{2\cos x-1}$ tại $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\frac{5\pi}{3}$ ta thấy hàm số đều không xác định, từ đây ta chọn **A**.

STUDY TIP

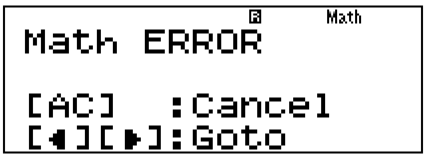
Đối với hàm côsin, trong một chu kỳ tuần hoàn của hàm số $[0;2]$ tồn tại hai góc có số đo là $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{5\pi}{3}$ cùng thỏa mãn $\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$ chính vì thế ta kết luận được điều kiện như vậy.

Cách bấm như sau:

Nhập vào màn hình $\frac{1}{2\cos(X)-1}$:



Ấn r gán $X=\frac{\pi}{3}$ thì máy báo lỗi, tương tự với trường hợp $X=\frac{5\pi}{3}$.



Từ đây suy ra hàm số không xác định tại $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{5\pi}{3}$.

Ví dụ 2. Tập xác định của hàm số $y=\frac{\cot x}{\sin x-1}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn C.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi

+ $\cot x$ xác định $\Leftrightarrow \sin x\neq 0$

+ $\sin x-1\neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq \frac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}\ .$$

STUDY TIP

Trong bài toán này, nhiều độc giả có thể chỉ sử dụng điều kiện để hàm phân thức xác định $(\sin x-1\neq 0)$ chứ không chú ý điều kiện để hàm $\cot x$ xác định, sẽ bị thiếu điều kiện và chọn D là sai.

Ví dụ 3. Tập hợp $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ không phải là tập xác định của hàm số nào?

A. $y=\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

B. $y=\frac{1-\cos x}{2\sin x}$.

C. $y=\frac{1+\cos x}{\sin 2x}$.

D. $y=\frac{1+\cos x}{\sin x}$.

Chọn C.

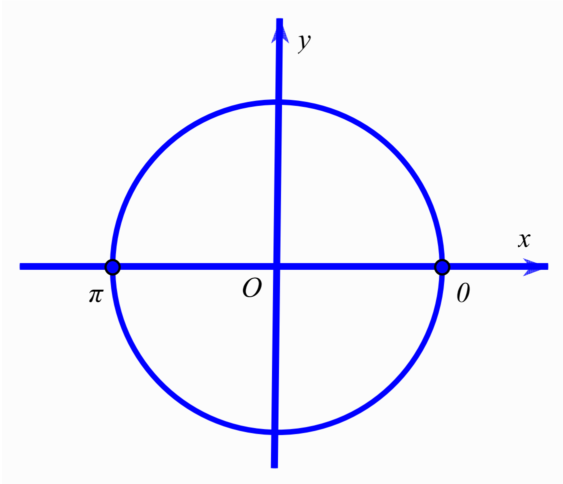
Lời giải

$$\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x\neq \sin 0\\ \sin 2x\neq \sin \pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x\neq k2\pi\\ 2x\neq \pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\neq k\pi\\ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin x\neq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x\neq \sin 0\\ \sin x\neq \sin \pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\neq k2\pi\\ x\neq \pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Phân tích: Với các bài toán dạng này nếu ta để ý một chút thì sẽ thấy hàm $\cos x$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Nên ta chỉ xét mẫu số, ở đây có đến ba phương án có mẫu số có chứa $\sin x$ như nhau là $A;D$ và B. Do đó ta chọn được luôn đáp án C

Trong ví dụ trên ta có thể gộp hai họ nghiệm $k2\pi$ và $\pi+k2\pi$ thành $k\pi$ dựa theo lý thuyết sau:



Hình 1.11

Mỗi cung (hoặc góc) lượng giác được biểu diễn bởi một điểm trên đường tròn lượng giác

$*x=\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ được biểu diễn bởi một điểm trên đường tròn lượng giác.

$*x=\alpha+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua O trên đường tròn lượng giác.

$*x=\alpha+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$ được biểu diễn bởi ba điểm cách đều nhau, tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.

$*x=\alpha+\frac{k2\pi}{n}, k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*$ được biểu diễn bởi n điểm cách đều nhau, tạo thành n đỉnh của một đa giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.

Giải thích cách gộp nghiệm ở ví dụ 3 ta có

Trên hình 1.11 hai chấm tròn đen là điểm biểu diễn hai nghiệm ta tìm được ở ví dụ 3. Từ đây nếu gộp nghiệm lại thì ta sẽ có $x=0+\frac{k2\pi}{2}=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sin\frac{1}{x}+2x$

A. $D=[-2;2]$. **B.** $D=[-1;1]\setminus\{0\}$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số đã cho xác định khi $\sin\frac{1}{x}$ xác định $\Leftrightarrow x\neq 0$

STUDY TIP

Ở đây nhiều độc giả nhầm lẫn, thấy hàm số sin và chọn luôn C là sai. Cần chú ý đến điều kiện để $\frac{1}{x}$ xác định.

Ví dụ 5. Tập xác định của hàm số $y=2016\tan^{2017}2x$ là

A. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}$.

D. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y=2016\tan^{2017}2x=2016.(\tan 2x)^{2017}$

2017 là một số nguyên dương, do vậy hàm số đã cho xác định khi $\tan 2x$ xác định

$\Leftrightarrow 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

STUDY TIP

Trong bài này, ta cần thêm kiến thức về tập xác định của hàm số lũy thừa ở lớp 12: Tập xác định của hàm số $y=x^{\alpha}$ tùy thuộc vào giá trị của α.

* Với α nguyên dương thì tập xác định là $\mathbb{R}$.
* Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
* Với α không nguyên, tập xác định là $(0;+\infty)$.

Ví dụ 6. Tập xác định của hàm số $y=2016\cot^{2017}2x$ là

A. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}$.

D. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn B.

Tương tự như ví dụ 5, ta có hàm số xác định khi $\cot 2x$ xác định

$\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 7. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1-\cos 2017x}$ là

A. $D=\mathbb{R}\backslash\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

B. $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $y=\sqrt{1-\cos 2017x}$ xác định khi $1-\cos 2017x \geq 0$.

Mặt khác ta có $-1 \leq \cos 2017x \leq 1$ nên $1-\cos 2017x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

STUDY TIP
Với các bài toán chứa căn thức ta chú ý các hệ số tự do để áp dụng các bất đẳng thức cơ bản như $-1 \leq \sin x; \cos x \leq 1, \ldots$

Ví dụ 8. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2}{\sqrt{2-\sin 6x}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.
B. $D=\mathbb{R}$.
C. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.
D. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\sin 6x<2 \Leftrightarrow 2-\sin 6x>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Một dạng khác của bài toán liên quan đến tìm tập xác định của hàm lượng giác như sau:

Ví dụ 9. Để tìm tập xác định của hàm số $y=\tan x+\cos x$, một học sinh đã giải theo các bước sau:

Bước 1: Điều kiện để hàm số có nghĩa là $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$.

Bước 2: $\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq k\pi\end{cases};(k\in\mathbb{Z})$.

Bước 3: Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi; k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài giải của bạn đó đúng chưa? Nếu **sai**, thì **sai** bắt đầu ở bước nào?

A. Bài giải đúng.
B. Sai từ bước 1.
C. Sai từ bước 2.
D. Sai từ bước 3.

Lời giải

Chọn B.

Nhận thấy hàm số đã cho xác định khi $\tan x$ xác định (do $\cos x$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$).

Do vậy hàm số xác định khi $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 10. Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x+1}}$ xác định khi và chỉ khi

A. $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.
B. $x\in\mathbb{R}$.
C. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow \sin x+1>0 \Leftrightarrow \sin x>-1 \Leftrightarrow \sin x\neq -1$ (do $\sin x\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Dạng chứa tham số trong bài toán liên quan đến tập xác định của hàm sô lượng giác.

Với $S\subset D_f$ (là tập xác định của hàm số $f(x)$) thì

$*\, f(x)\leq m, \forall x\in S \Leftrightarrow \max_S f(x)\leq m$. $*\, f(x)\geq m, \forall x\in S \Leftrightarrow \min_S f(x)\geq m$.

$*\ \exists x_0\in S, f(x_0)\leq m \Leftrightarrow \min_S f(x)\leq m$ $*\ \exists x_0\in S, f(x_0)\geq m \Leftrightarrow \max_S f(x)\geq m$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $h(x)=\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x-2m\sin x.\cos x}$ .Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số xác định với mọi số thực x (trên toàn trục số) là

A. $-\frac{1}{2}\leq m\leq \frac{1}{2}$. **B.** $0\leq m\leq \frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}\leq m\leq 0$. **D.** $m\leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $g(x)=\left(\sin^2 x\right)^2+\left(\cos^2 x\right)^2-m\sin 2x$

$$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-m\sin 2x$$

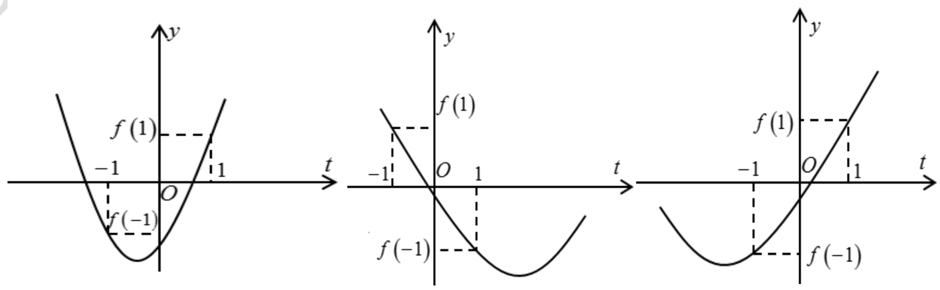
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-m\sin 2x.$$

Đặt $t=\sin 2x \Rightarrow t\in[-1;1]$.

Hàm số $h(x)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow g(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2-mt+1\geq 0, \forall t\in[-1;1]$

$$\Leftrightarrow t^2+2mt-2\leq 0, \forall t\in[-1;1].$$

Đặt $f(t)=t^2+2mt-2$ trên $[-1;1]$.



Đồ thị hàm số có thể là một trong ba đồ thị trên.

Ta thấy $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(1)$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(-1)$

Ycbt $f(t) = t^2 + 2mt - 2 \le 0, \forall t \in [-1;1] \Leftrightarrow \max\limits_{[-1;1]} f(t) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) \le 0 \\ f(-1) \le 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1+2m \le 0 \\ -1-2m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{3x}{\sqrt{2\sin^2 x - m\sin x + 1}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m \in \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$.

B. $m \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

C. $m \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left\{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2\sin^2 x - m\sin x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t \in [-1;1]$

Lúc này ta đi tìm điều kiện của m để $f(t) = 2t^2 - mt + 1 > 0, \forall t \in [-1;1]$

Ta có $\Delta_t = m^2 - 8$

TH 1: $\Delta_t < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$. Khi đó $f(t) > 0, \forall t$ (thỏa mãn).

TH 2: $\Delta_t = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2\sqrt{2} \\ m = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ (thử lại thì cả hai trường hợp đều không thỏa mãn).

TH 3: $\Delta_t > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2\sqrt{2} \\ m > 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ khi đó tam thức $f(t) = 2t^2 - mt + 1$ có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2 \ (t_1 < t_2)$.

Để $f(t) > 0, \forall t \in [-1;1]$ thì $\left[\begin{array}{l} t_1 \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{m - \sqrt{m^2 - 8}}{4} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8} \ge m - 4 \ (VN) \\ t_2 \le -1 \Leftrightarrow \dfrac{m + \sqrt{m^2 - 8}}{4} \le -1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8} \le -m - 4 \ (VN) \end{array}\right.$.

Vậy $m \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Với các bài toán dạng này ta cần chia ba trường hợp để tìm đủ các giá trị của m.
Ở bài toán trên trong **TH3** đã áp dụng qui tắc xét dấu tam thức bậc hai "trong trái ngoài cùng". Tức là trong khoảng hai nghiệm thì cùng dấu với hệ số a, còn khoảng hai nghiệm thì trái dấu với hệ số a.

Dạng 2: Xét Tính Chẵn Lẻ Của Hàm Số Lượng Giác.

Định Nghĩa.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

a, Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc D, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

b, Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc D, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

STUDY TIP:

Để kết luận hàm số $y = f(x)$ không chẵn không lẻ thì ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao cho $\begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$ hoặc chỉ ra tập xác định của $f(x)$ không phải là tập đối xứng.

Phương pháp chung:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó

$*$ Nếu D là tập đối xứng (tức $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), thì ta thực hiện tiếp bước 2.

$*$ Nếu D không phải tập đối xứng(tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$) thì ta kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$:

$*$ Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số chẵn.

$*$ Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số lẻ.

$*$ Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Các kiến thức đã học về hàm lượng giác cơ bản:

1, Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R}$.

2, Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn trên $D = \mathbb{R}$.

3, Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4, Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

Ví dụ 1. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = -2\cos x$. **B.** $y = -2\sin x$. **C.** $y = 2\sin(-x)$. **D.** $y = \sin x - \cos x$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: Với các kiến thức về tính chẵn lẻ của hsố lượng giác cơ bản ta có thể chọn luôn A.

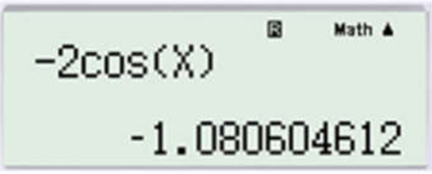
Xét A**:** Do tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = -2\cos(-x) = -2\cos x = f(x)$. Vậy hàm số $y = -2\cos x$ là hàm số chẵn.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp x và $-x$.

Với A**:** Nhập vào màn hình hàm số sử dụng CALC với trường hợp $x=1$ (hình bên trái) và trường hợp $x=-1$ (hình bên phải) đều đưa kết quả giống nhau. Vì $f(x)=-f(x)\Rightarrow$ ta chọn luôn **A.**



STUDY TIP:
Khi sử dụng máy tính cầm tay ta nên chú ý cả tập xác định của hàm số xem có phải là tập đối xứng không.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y=\dfrac{\sin 2x}{2\cos x-3}$ thì $y=f(x)$ là

A. Hàm số chẵn. **B.** Hàm số lẻ.
C. Không chẵn không lẻ. **D.** Vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

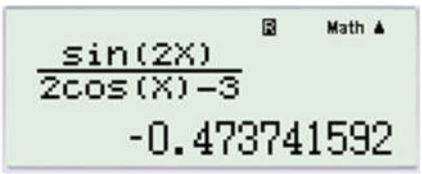
Ta có $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

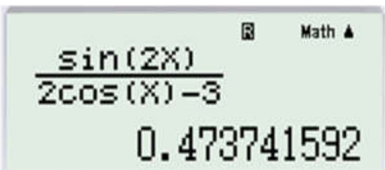
$f(-x)=\dfrac{\sin(-2x)}{2\cos(-x)-3}=\dfrac{-\sin 2x}{2\cos x-3}=-f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp x và $-x$.

Với **A:** Nhập biểu thức của hàm số vào màn hình sử dụng CALC với trường hợp $x=1$ (hình bên trái) và trường hợp $x=-1$ (hình bên phải), ta thấy $f(1)=-f(-1)\Rightarrow$ hàm số đã cho là hàm số lẻ.





STUDY TIP:
Trong bài toán này, tập xác định $D=\mathbb{R}$ bởi $2\cos x-3<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y=f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, ta được $y=f(x)$ là:

A. Hàm số chẵn. **B.** Hàm số lẻ.
C. Không chẵn không lẻ. **D.** Vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1:

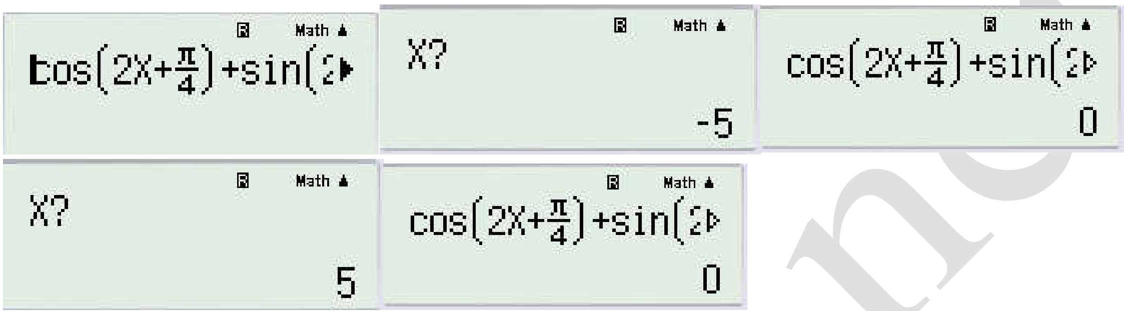
Ta có $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2x-\sin 2x)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 2x-\cos 2x)=0$.

Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Hàm số $y=0$ vừa thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn, vừa thỏa mãn tính chất của hàm số lẻ, nên đây là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Tương tự các bài toán trên ta nhập hàm số và sử dụng CALC để thử thì thấy cả hai trường hợp đều ra kết quả là 0. Mà $y=0$ vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ vừa là hàm hằng nên ta chọn **D.**



STUDY TIP:

Hàm số $y=0$ vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ vừa là hàm hằng.

Ví dụ 4. Cho hai hàm số $f(x)=\frac{1}{x-3}+3\sin^2 x$ và $g(x)=\sin\sqrt{1-x}$. Kết luận nào sau đây đúng về tính chẵn lẻ của hai hàm số này?

A. Hai hàm số $f(x);g(x)$ là hai hàm số lẻ.

B. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn; hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ; hàm số $g(x)$ là hàm số không chẵn không lẻ.

D. Cả hai hàm số $f(x);g(x)$ đều là hàm số không chẵn không lẻ.

Lời giải

Chọn D.

a, Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x-3}+3\sin^2 x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Ta có $x=-3\in D$ nhưng $-x=3\notin D$ nên D không có tính đối xứng. Do đó ta có kết luận hàm số $f(x)$ không chẵn không lẻ.

b, Xét hàm số $g(x)=\sin\sqrt{1-x}$ có tập xác định là $D_2=[1;+\infty)$. Dễ thấy D_2 không phải là tập đối xứng nên ta kết luận hàm số $g(x)$ không chẵn không lẻ.

Vậy chọn **D.**

STUDY TIP:

Khi xét tính chẵn lẻ của hàm số ta cần chú ý xét tập xác định đầu tiên để giải quyết bài toán một cách chính xác.

Ví dụ 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\sin^{2007}x+\cos nx$, với $n\in\mathbb{Z}$. Hàm số $y=f(x)$ là:

A. Hàm số chẵn.
B. Hàm số lẻ.
C. Không chẵn không lẻ.
D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x)=\sin^{2007}(-x)+\cos(-nx)=-\sin^{2007}x+\cos nx\neq\pm f(x)$.

Vậy hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sin^{2004n}x+2004}{\cos x}$, với $n\in\mathbb{Z}$. Xét các biểu thức sau:

1, Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}$.
2, Đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng.
3, Hàm số đã cho là hàm số chẵn.
4, Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.
5, Hàm số đã cho là hàm số lẻ.
6, Hàm số đã cho là hàm số không chẵn không lẻ.

Số phát biểu đúng trong sáu phát biểu trên là

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số đã xác định khi $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ Vậy phát biểu 1 sai.

Ở đây ta cần chú ý : các phát biểu 2; 3; 4; 5; 6 để xác định tính đúng sai ta chỉ cần đi xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

Ta có tập xác định của hàm số trên là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng.

$$f(-x)=\frac{\sin^{2004n}(-x)+2004}{\cos(-x)}=\frac{\sin^{2004n}x+2004}{\cos x}=f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn. Suy ra đồ thị hàm số đối xứng qua trục Oy. Vậy chỉ có phát biểu 2 và 3 là phát biểu đúng. Từ đây ta chọn **B.**

STUDY TIP

Đồ thị hàm số lẻ thì đối xứng qua tâm O.
Đồ thị hàm số chẵn thì đối xứng qua trục Oy.

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x)=|x|\sin x$. Phát biểu nào sau đây là đúng về hàm số đã cho?

A. Hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.

C. Đồ thị hàm số đã cho có trục xứng.

D. Hàm số có tập giá trị là $[-1;1]$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số đã cho xác định trên tập $D=\mathbb{R}$ nên ta loại A.

Tiếp theo để xét tính đối xứng của đồ thị hàm số ta xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

$f(-x)=|-x|\sin(-x)=-|x|\sin x=-f(x)$. Vậy đồ thị hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O.

Vậy ta chọn đáp án **B**.

STUDY TIP

Với bài toán này ta nên xét B và C trước thay vì xét lần lượt A, B, C, D.

Ví dụ 8. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(x)=3m\sin 4x+\cos 2x$ là hàm chẵn.

A. $m>0$. **B.** $m<-1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

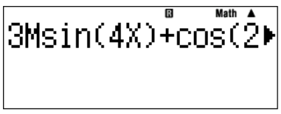
Ta có $f(-x)=3m\sin 4(-x)+\cos 2(-x)=-3m\sin 4x+\cos 2x$.

Để hàm số đã cho là hàm chẵn thì

$$f(-x)=f(x),\forall x\in D\Leftrightarrow -3m\sin 4x+\cos 2x=3m\sin 4x+\cos 2x,\forall x\in D$$
$$\Leftrightarrow 4m\sin 4x=0,\forall x\in D\Leftrightarrow m=0.$$

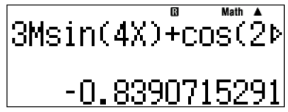
Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Với bài toán này ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để thử các giá trị. Với A và C, ta thử một trường hợp để loại hai đáp án còn lại, tương tự với B và D. Ở đây ta sử dụng CALC để thử tại giá trị x và $-x$.



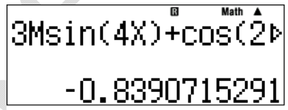
Ví dụ: Nhập vào màn hình như hình bên.

Ấn CALC để gán các giá trị cho m. Ta thử với $m=0$ thì ấn $\boxed{0}$ $\boxed{=}$



Chọn x bất kì, sau đó làm lại lần nữa và gán x cho $-x$ ban đầu và so sánh (ở đây ta thử với $x=5$ và tại -5).

Ta thấy $f(-x)=f(x)$. Vậy C đúng. Ta chọn luôn C và loại các phương án còn lại.



***DẠNG 3.* Xét tính đơn điệu của hàm số lượng giác**

Phương pháp chung:

Ở phần lý thuyết, với các hàm số lượng giác cơ bản, ta đã biết rằng:

1. Hàm số $y=\sin x$:

* Đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

* Nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

2. Hàm số $y=\cos x$:

* Đồng biến trên các khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi),k\in\mathbb{Z}$.

* Nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi),k\in\mathbb{Z}$.

3. Hàm số $y=\tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

4. Hàm số $y=\cot x$ nghịch biến trên các khoảng $(k\pi;\pi+k\pi),k\in\mathbb{Z}$.

Với các hàm số lượng giác phức tạp, để xét tính đơn điệu của nó ta sử dụng định nghĩa.

Ví dụ 1. Xét hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi;0]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

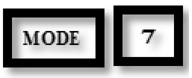
Lời giải

Chọn A.

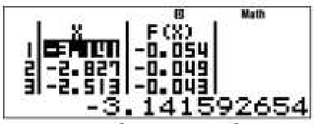
Cách 1: Từ lý thuyết về các hàm số lượng giác cơ bản ở trên ta có hàm số $y=\sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

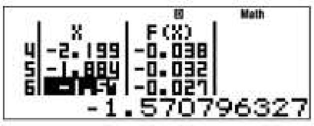
Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

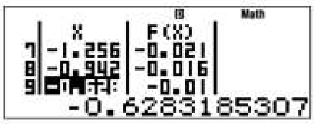
Do ở đề bài, các phương án A, B, C, D chỉ xuất hiện hai khoảng là $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ nên ta sẽ dùng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

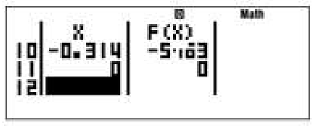
Ấn 

Máy hiện $f(X)=$ thì ta nhập $\sin X$. START? Nhập $-\pi$; END? Nhập 0. STEP? Nhập $\frac{\pi}{10}$.









Lúc này từ bảng giá trị của hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

Ví dụ 2. Xét hàm số $y=\cos x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi;0)$ và $(0;\pi)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;\pi)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\pi;0)$ và $(0;\pi)$.

Lời giải

Chọn B.

Theo lý thuyết ta có hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi),k\in\mathbb{Z}$ và nghịch biến trên khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi),k\in\mathbb{Z}$. Từ đây ta có với $k=0$ hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Tiếp theo ta đến với hàm số $y=\tan nx;(n\in\mathbb{Z}),...$ Ta có ví dụ 3.

Ví dụ 3. Xét sự biến thiên của hàm số $y=\tan 2x$ trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Hàm số $y=\tan 2x$ tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{2}$, dựa vào các phương án A; B; C; D thì ta sẽ xét tính đơn điệu của hàm số trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

Dựa theo kết quả khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=\tan x$ ở phần lý thuyết ta có thể suy ra với hàm số $y=\tan 2x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

STUDY TIP

Ở đây ta không chọn C vì hàm số không liên tục trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, hàm số bị gián đoạn tại $x=\frac{\pi}{4}$ (tức là hàm số không xác định tại $x=\frac{\pi}{4}$).

Ví dụ 4. Xét sự biến thiên của hàm số $y=1-\sin x$ trên một chu kì tuần hoàn của nó. Trong các kết luận sau, kết luận nào sai?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ 2π và kết hợp với các phương án đề bài thì ta sẽ xét sự biến thiên của hàm số trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ta có hàm số $y=\sin x$:

* Đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

* Nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Từ đây suy ra hàm số $y=1-\sin x$:

* Nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

* Đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$. Từ đây ta chọn D.

Dưới đây là đồ thị của hàm số $y=1-\sin x$ và hàm số $y=\sin x$ trên $\mathbb{R}$.