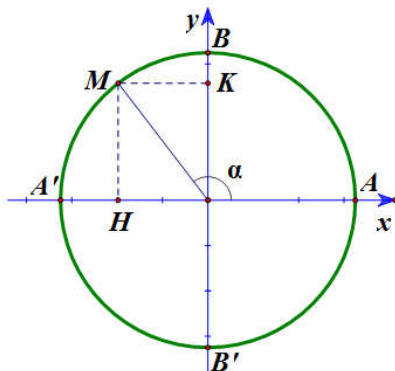


## GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

### A. LÝ THUYẾT

#### 1. Giá trị lượng giác của cung $\alpha$ .

Trên đường tròn lượng giác (hình 1.1) cho cung  $\widehat{AM}$  có số  $\widehat{AM} = \alpha$ :



Hình 1.1

Gọi  $M(x; y)$  với tung độ của  $M$  là  $y = \overline{OK}$ , hoành độ là  $x = \overline{OH}$  thì ta có:

$$\sin \alpha = \overline{OK}$$

$$\cos \alpha = \overline{OH}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; (\sin \alpha \neq 0)$$

Các giá trị  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$  được gọi là các giá trị lượng giác của cung  $\alpha$ .

#### Các hệ quả cần nắm vững

1. Các giá trị  $\sin \alpha$ ;  $\cos \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Và ta có:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$$

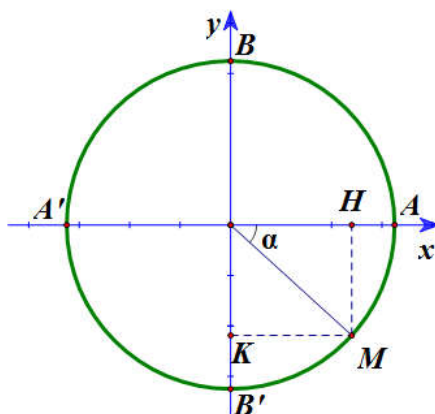
$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2.  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ ;  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

3.  $\tan \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

4.  $\cot \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

Dấu của các giá trị lượng giác của cung  $\alpha$  phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung  $\widehat{AM} = \alpha$  trên đường tròn lượng giác (hình 1.2).



Hình 1.2

Ta có bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau

Góc phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác				
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

Ở hình 1.3 là một cách nhớ khác để xác định dấu của các giá trị lượng giác

II $\sin \alpha : +$ $\cos \alpha : -$ $\tan \alpha : -$ $\cot \alpha : -$	I $\sin \alpha : +$ $\cos \alpha : +$ $\tan \alpha : +$ $\cot \alpha : +$
III $\sin \alpha : -$ $\cos \alpha : -$ $\tan \alpha : +$ $\cot \alpha : +$	IV $\sin \alpha : -$ $\cos \alpha : +$ $\tan \alpha : -$ $\cot \alpha : -$

Hình 1.3

## 2. Công thức lượng giác

### Công thức cơ bản

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

### Cung đối nhau

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

**Công thức cộng**

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

**Công thức đặc biệt**

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

**Góc nhân đôi**

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

**Góc nhân ba**

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

**Cung bù nhau**

$$\sin x = \sin(\pi - x)$$

$$\cos x = -\cos(x - \pi)$$

$$\tan x = \tan(x - \pi)$$

**Góc chia đôi**

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

**Góc chia ba**

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x)$$

**STUDY TIP**

Ở đây từ các công thức góc nhân đôi, góc nhân ba ta có thể suy ra công thức góc chia đôi, chia ba mà không cần nhớ nhiều công thức.

**Biến đổi tích thành tổng**

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

**Biến đổi tổng thành tích**

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

### 3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

$\alpha$ (độ)	0	30°	45°	60°	90°	180°
$\alpha$ (radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định	0

#### STUDY TIP

Từ bảng giá trị lượng giác các cung đặc biệt ở bên ta thấy một quy luật như sau để dễ dàng nhớ các giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

$\alpha$	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Các giá trị ở tử số tăng dần từ  $\sqrt{0}$  đến  $\sqrt{4}$ . Ngược lại đối với giá trị  $\cos$ , tử số giảm dần từ  $\sqrt{4}$  về  $\sqrt{0}$ .