CHỦ ĐỀ: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

Phương pháp quy nạp toán học

A. LÝ THUYẾT

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số nguyên dương n là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì có thể làm như sau:

- Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n=1$.

- Bước 2: Giả thiết rằng mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ $n=k\ge 1$ (gọi là giả thiết quy nạp). Bằng kiến thức đã biết và giả thiết quy nạp, chứng minh rằng mệnh đề đó cũng đúng với $n=k+1$.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S=1^2+2^2+...+n^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **B.** $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$.

C. $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **D.** $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Chúng ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học rằng mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có đẳng thức $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Bước 1: Với $n=1$ thì vế trái bằng $1^2=1$, vế phải bằng $\dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=1$.

-Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\ge 1$, tức là chứng minh $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$.

Mà $\dfrac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Suy ra $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Do đó đẳng thức đúng với $n=k+1$. Suy ra có điều phải chứng minh.

Vậy phương án đúng là C.

Cách 2: Kiểm tra tính đúng-sai của từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua một số giá trị cụ thể của n.

+ Với $n=1$ thì $S=1^2=1$ (loại được các phương án B và D);

+ Với $n=2$ thì $S=1^2+2^2=5$ (loại được phương án A).

Vậy phương án đúng là **C**.

STUDY TIP

Ngoài kết quả nêu trong ví dụ 1, chúng ta có thể đề cập đến các kết quả tương tự như sau:

1) $1+2+..+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3) $1^4+2^4+...+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

4) $1^5+2^5+...+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

5) $1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Nhận xét: *Từ ví dụ 1 và các bài tập ở phần nhận xét, ta thấy bậc ở vế trái nhỏ hơn bậc ở vế phải là 1 đơn vị. Lưu ý điều này có thể tính được tổng dạng luỹ thừa dựa vào phương pháp hệ số bất định. Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta hoàn toàn có thể đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

Ví dụ 1. Với mỗi số nguyên n, đặt $S=1^2+2^2+...+n^2$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai?**

A. $S=\dfrac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right)$.
B. $S=\dfrac{1}{6}\left[(n+1)^3-(n+1)\right]+\dfrac{1}{6}\left(n^3-n\right)$.

C. $S=\dfrac{1}{6}\left[2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)\right]$.
D. $S=\dfrac{n\left(n^2+1\right)(2n+1)}{6}$.

Ví dụ 2. Với mỗi số nguyên dương n, ta có $1^2+2^2+...+n^2=an^3+bn^2+cn$, trong đó a, b, c là các hằng số. Tính giá trị của biểu thức $M=ab^2+bc^2+ca^2$.

A. $M=25$. **B.** $M=\dfrac{25}{216}$. **C.** $M=\dfrac{25}{6}$. **D.** $M=23$.

Ví dụ 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n, để $1^2+2^2+...+n^2>2017$.

A. $n\ge 18$. **B.** $n\ge 20$. **C.** $n\ge 17$. **D.** $n\ge 19$.

Ví dụ 4. Tính tổng S của tất cả các số nguyên dương n, thoả mãn $1^2+2^2+...+n^2<2018$.

A. $S=153$. **B.** $S=171$. **C.** $S=136$. **D.** $S=190$.

Ví dụ 2. Đặt $T_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn). Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $T_n=\sqrt{3}$. **B.** $T_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. **C.** $T_n=\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. **D.** $T_n=\sqrt{5}$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta chứng minh $T_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

Bước 1: Với $n=1$ thì vế trái bằng $\sqrt{2}$, còn vế phải bằng $2\cos\frac{\pi}{2^{1+1}} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=1$.

Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\ge 1$, nghĩa là $T_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$.

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh $T_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Thật vậy, vì $T_{k+1} = \sqrt{2+T_k}$ nên theo giả thiết quy nạp ta có $T_{k+1} = \sqrt{2+T_k} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$.

Mặt khác, $1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = 1+\cos\left(2.\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}$ nên $T_{k+1} = \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Vậy phương án đúng là **B**.

STUDY TIP

Ngoài cách làm như trên, ta có thể làm theo cách sau: kiểm tra tính đúng – sai của từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua một số giá trị cụ thể của n.

+ Với $n=1$ thì $T_1 = \sqrt{2}$ (loại ngay được phương án **A**, **C** và **D**).

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ 2, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi dưới đây:*

Câu 1. Đặt $T_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn). Tìm n để $T_n = 2\sin\frac{511\pi}{1024}$.

A. $n=10$. **B.** $n=9$. **C.** $n=11$. **D.** $n=8$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\sqrt{2}$ và $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là:

A. $u_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **B.** $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

C. $u_n = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **D.** $u_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Ví dụ 3. Đặt $S_n = \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,với $n\in\mathbb{N}^*$.Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S_n = \frac{n+1}{2(2n+1)}$. **B.** $S_n = \frac{3n-1}{4n+2}$. **C.** $S_n = \frac{n}{2n+1}$. **D.** $S_n = \frac{n+2}{6n+3}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Rút gọn biểu thức S_n dựa vào việc phân tích phần tử đại diện.

Với mọi số nguyên dương k, ta có $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$.

Do đó: $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

Vậy phương án đúng là phương án **C.**

Cách 2: Kiểm tra tính đúng – sai của phương án dựa vào một số giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $S_1=\frac{1}{1.3}=\frac{1}{3}$ (chưa loại được phương án nào);

Với $n=2$ thì $S_2=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}=\frac{2}{5}$ (loại ngay được các phương án A,B và D.

Vậy phương án đúng là phương án C.

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ này,chúng ta hoàn toàn trả lời được các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

Câu 1. Với $n\in\mathbb{N}^*$,biết rằng $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{an+b}{cn+1}$. Trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $P=a^2+b^3+c^4$.

A. $P=17$. **B.** $P=10$. **C.** $P=9$. **D.** $P=19$.

Câu 2. Với $n\in\mathbb{N}^*$,biết rằng $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{an+b}{4n+c}$. Trong đó a,b,c là các số nguyên.Tính giá trị biểu thức $T=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

A. $T=40$. **B.** $T=4$. **C.** $T=32$. **D.** $T=16$.

Câu 3. Biết rằng $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{an^2+bn+c}{(2n+1)^2}$,trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $F=(a+b)^{a+c}$.

A. $F=9$. **B.** $F=6$. **C.** $F=8$. **D.** $F=27$.

Câu 4. Tính tổng S của tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn bất phương trình

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<\frac{17}{35}$$

A. $S=153$. **B.** $S=136$. **C.** $S=272$. **D.** $S=306$.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{n+1}>n^2+3n$.

A. $n\ge 3$. **B.** $n\ge 5$. **C.** $n\ge 6$. **D.** $n\ge 4$.

Đáp án D.

Lời giải

Kiểm tra tính đúng – sai của bất đẳng thức với các trường hợp $n = 1,2,3,4,$ ta dự đoán được $2^{n+1} > n^2 + 3n,$ với $n \ge 4.$ Ta chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

-Bước 1: Với $n = 4$ thì vế trái bằng $2^{4+1} = 2^5 = 32,$ còn vế phải bằng $4^2 + 3.4 = 28.$

Do $32 > 28$ nên bất đẳng thức đúng với $n = 4.$

-Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \ge 4,$ nghĩa là $2^{k+1} > k^2 + 3k.$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = k+1,$ tức là phải chứng minh $2^{(k+1)+1} > (k+1)^2 + 3(k+1)$ hay $2^{k+2} > k^2 + 5k + 4.$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có $2^{k+1} > k^2 + 3k.$

Suy ra $2.2^{k+1} > 2(k^2 + 3k)$ hay $2^{k+2} > 2k^2 + 6k$

Mặt khác $2k^2 + 6k - (k^2 + 5k + 4) = k^2 + k - 4 \ge 4^2 + 4 - 4 = 16$ với mọi $k \ge 4.$

Do đó $2^{k+2} > 2(k^2 + 3k) > k^2 + 5k + 4$ hay bất đẳng thức đúng với $n = k+1.$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy phương án đúng là **D.**

STUDY TIP

Dựa vào kết quả ví dụ 4, ta có thể đề xuất bài toán sau:

Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất sao cho: $2^{n+1} > n^2 + 3n, \forall n \ge p, n \in \mathbb{N}^*$

A. $p = 3$. **B.** $p = 5$. **C.** $p = 4$. **D.** $p = 7$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Tổng S các góc trong của một đa giác lồi n cạnh, $n \ge 3$, là:

A. $S = n.180°$. **B.** $S = (n-2).180°$.

C. $S = (n-1).180°$. **D.** $S = (n-3).180°$.

Câu 2. Với $n \in \mathbb{N}^*$, hãy rút gọn biểu thức $S = 1.4 + 2.7 + 3.10 + ... + n(3n+1)$.

A. $S = n(n+1)^2$. **B.** $S = n(n+2)^2$. **C.** $S = n(n+1)$. **D.** $S = 2n(n+1)$.

Câu 3. Kí hiệu $k! = k(k-1)...2.1, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Với $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $S_n = 1.1! + 2.2! + ... + n.n!$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S_n = 2.n!$. **B.** $S_n = (n+1)! - 1$. **C.** $S_n = (n+1)!$. **D.** $S_n = (n+1)! + 1$.

Câu 4. Với $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $T_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (2n)^2$ và $M_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\dfrac{T_n}{M_n} = \dfrac{4n+1}{2n+2}$. **B.** $\dfrac{T_n}{M_n} = \dfrac{4n+1}{2n+1}$. **C.** $\dfrac{T_n}{M_n} = \dfrac{8n+1}{n+1}$. **D.** $\dfrac{T_n}{M_n} = \dfrac{2n+1}{n+1}$.

Câu 5. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $2^n > 2n+1$ với mọi số nguyên $n \ge p$.

A. $p = 5$. **B.** $p = 3$. **C.** $p = 4$. **D.** $p = 2$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $2^n > n^2$.

A. $n \geq 5$. **B.** $n = 1$ **hoặc** $n \geq 6$. **C** $n \geq 7$. **D.** $n = 1$ **hoặc** $n \geq 5$.

Câu 7. Với mọi số nguyên dương n, ta có: $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + ... + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{an+b}{cn+4}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức $T = ab^2 + bc^2 + ca^2$.

A. $T = 3$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 43$. **D.** $T = 42$.

Câu 8. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{an+2}{bn+4}$, trong đó a, b là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

A. $P = 5$. **B.** $P = 9$. **C.** $P = 20$. **D.** $P = 36$.

Câu 9. Biết rằng $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $M = a + b + c + d + e$.

A. $M = 4$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = \frac{1}{4}$. **D.** $M = \frac{1}{2}$.

Câu 10. Biết rằng mọi số nguyên dương n, ta có $1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = a_1n^3 + b_1n^2 + c_1n + d_1$ và $1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n-1) = a_2n^3 + b_2n^2 + c_2n + d_2$. Tính giá trị biểu thức $T = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$.

A. $T = 2$. **B.** $T = 1$. **C.** $M = \frac{4}{3}$. **D.** $T = \frac{2}{3}$.

Câu 11. Biết rằng $1^k + 2^k + ... + n^k$, trong đó n, k là số nguyên dương. Xét các mệnh đề sau:

$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$ và $S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Số các mệnh đề đúng trong các mệnh đề nói trên là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12. Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta xét các mệnh đề P:"$7^n + 5$ chia hết cho 2"; Q:"$7^n + 5$ chia hết cho 3" và Q:"$7^n + 5$ chia hết cho 6". Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là :

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 13. Xét bài toán: "Kiểm nghiệm với số nguyên dương n bất đẳng thức $n \geq 2^{n-1}$". Một học sinh đã trình bày lời giải bài toán này bằng các bước như sau:

Bước 1: Với $n = 1$, ta có: $n! = 1! = 1$ và $2^{n-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$. Vậy $n! \geq 2^{n-1}$ đúng.

Bước 2 : Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là ta có $k! \geq 2^{k-1}$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, nghĩa là phải chứng minh $(k+1)! \geq 2^k$.

Bước 3 : Ta có $(k+1)! = (k+1).k! \geq 2.2^{k-1} = 2^k$. Vậy $n! \geq 2^{n-1}$ với mọi số nguyên dương n.

Chứng minh trên đúng hay sai, nếu sai thì sai từ bước nào ?

A. Đúng. **B.** Sai từ bước 2. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 3.

Câu 14. Biết rằng $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{an^2+bn}{cn^2+dn+16}$, trong đó a,b,c,d và n là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=(a+c)(b+d)$.
là :

A. $T=75$. **B.** $T=364$. **C.** $T=300$. **D.** $T=256$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Đáp án B.

Cách 1: Từ tổng các góc trong tam giác bằng $180°$ và tổng các góc trong từ giác bằng $360°$, chúng ta dự đoán được $S=(n-2).180°$.

Cách 2: Thử với những trường hợp đã biết để kiểm nghiệm tính đúng –sai từ các công thức. Cụ thể là với $n=3$ thì $S=180°$ (loại luôn được các phương án A, C và D); với $n=4$ thì $S=360°$ (kiểm nghiệm phương án B lần nữa).

Câu 2. Đáp án A.

Để chọn được S đúng, chúng ta có thể dựa vào một trong ba cách sau đây:

Cách 1: Kiểm tra tính đúng –sai của từng phương án với những giá trị của n.

Với $n=1$ thì $S=1.4=4$ (loại ngay được phương án B và C); với $n=2$ thì $S=1.4+2.7=18$ (loại được phương án D).

Cách 2: Bằng cách tính S trong các trường hợp $n=1, S=4$; $n=2, S=18$; $n=3, S=48$ ta dự đoán được công thức $S=n(n+1)^2$.

Cách 3: Ta tính S dựa vào các tổng đã biết kết quả như $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ và $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ta có: $S=3(1^2+2^2+...+n^2)+(1+2+...+n)=n(n+1)^2$.

Câu 3. Đáp án B.

Chúng ta có thể chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Kiểm nghiệm từng phương án đúng đối với những giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $S_1=1.1!=1$ (Loại ngay được các phương án A, C, D).

Cách 2: Rút gọn S_n dựa vào việc phân tích phần tử đại diện

$k.k!=(k+1-1).k!=(k+1).k!-k!=(k+1)!-k!$. Suy ra:

$S_n=(2!-1!)+(3!-2!)+...+((n+1)!-n!)=(n+1)!-1$.

Câu 4. Đáp án A.

Chúng ta có thể chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Kiểm nghiệm từng phương án đúng đối với những giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $T_1=1^2+2^2=5; M_1=2^2=4$ nên $\frac{T_1}{M_1}=\frac{5}{4}$ (loại ngay được các phương án B, C, D).

Cách 2: Chúng ta tính T_n, M_n dựa vào những tổng đã biết kết quả. Cụ thể dựa vào ví dụ 1:

$T_n=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}; M_n=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$. Suy ra $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+2}$.

Câu 5. Đáp án B.

Dễ thấy $p=2$ thì bất đẳng thức $2^p>2p+1$ là sai nên loại ngay phương án D.

Xét với $p=3$ ta thấy $2^p>2p+1$ là bất đửng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $2^n>2n+1$ với mọi $n\ge 3$. Vậy $p=3$ là số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm.

Câu 6. Đáp án D.

Kiểm tra với $n=1$ ta thấy bất đẳng thức đúng nên loại ngay phương án A và C.

Kiểm tra với $n=1$ ta thấy bất đẳng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $2^n>n^2,\forall n\ge 5$.

Câu 7. Đáp án B.

Cách 1: Với chú ý $\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$, chúng ta có:

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{3n}{2(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}.$$

Đối chiếu với đẳng thức đã cho, ta có: $a=1,b=0,c=6$.

Suy ra $T=ab^2+bc^2+ca^2=6$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3$ ta được: $\frac{a+b}{c=4}=\frac{1}{10};\frac{2a+b}{2c+4}=\frac{1}{8};\frac{3x+b}{3c+4}=\frac{3}{22}$.

Giải hệ phương trình trên ta được $a=1,b=0,c=6$. Suy ra $T=ab^2+bc^2+ca^2=6$

Câu 8. Đáp án C.

Cách 1: Bằng cách phân tích số hạng đại diện, ta có: $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k-1}{k}.\frac{k+1}{k}$. Suy ra

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}...\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{2n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{2n+2}{4n}.$$

Đối chiếu với đẳng thức đã cho ta có: $a=2,b=4$. Suy ra $P=a^2+b^2=20$.

Cách 2: Cho $n=2,n=3$ ta được $\frac{a+1}{b}=\frac{3}{4};\frac{3a+2}{3b}=\frac{2}{3}$. Giải hệ phương trình trren ta được $a=2;b=4$. Suy ra $P=a^2+b^2=20$.

Câu 9. Đáp án B.

Cách 1: Sử dụng kết quả đã biết: $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$. So sánh cách hệ số, ta được $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{2};c=\frac{1}{4};d=e=0$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3,n=4,n=5$, ta được hệ 5 phương trình 5 ẩn a,b,c,d,e.

Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{2};c=\frac{1}{4};d=e=0$. Suy ra

$M=a+b+c+d+e=1$.

Câu 10. Đáp án C.

Cách 1: Sử dụng các tổng lũy thừa bậc 1 và bậc 2 ta có:

+) $1.2+2.3+...+n(n+1)=(1^2+2^2+...+n^2)+(1+2+...+n)=\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n$.

Suy ra $a_1=\frac{1}{3};b_1=1;c_1=\frac{2}{3};d_1=0$.

+) $1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)=3(1^2+2^2+...+n^2)-(1+2+...+n)=n^3+n^2$.

Suy ra $a_2=b_2=1;c_2=d_2=0$.

Do đó $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2=\frac{4}{3}$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3,n=4$ và sử dụng phương pháp hệ số bất đinh ta cũng tìm được $a_1=\frac{1}{3};b_1=1;c_1=\frac{2}{3};d_1=0$; $a_2=b_2=1;c_2=d_2=0$.

Do đó $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2=\frac{4}{3}$.

Câu 11. Đáp án D.

Bằng các kết quả đã biết ở ví dụ 1, chúng ta thấy ngay được chỉ có $S_3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ là sai.

Câu 12. Đáp án A.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng 7^n+5 chia hết cho 6.

Thật vậy: Với $n=1$ thì $7^1+5=12\vdots 6$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\ge 1$, nghĩa là 7^k+5 chia hết ccho 6.

Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$, nghĩa là phỉa chứng minh $7^{k+1}+5$ chia hết cho 6.

Ta có: $7^{k+1}+5=7(7^k+5)-30$.

Theo giả thiết quy nạp thì 7^k+5 chia hết cho 6 nên $7^{k+1}+5=7(7^k+5)-30$ cũng chia hết cho 6.

Vậy 7^n+5 chia hết cho 6 với mọi $n\ge 1$. Do đó các mệnh đề P và Q cũng đúng.

Câu 13. Đáp án A.

Câu 14. Đáp án C.

Phân tích phần tử đại diện, ta có: $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$.

Suy ra: $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-.\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{n^2+3n}{4n^2+12n+8}=\frac{2n^2+6n}{8n^2+24n+16}.$$

Đối chiếu với hệ số, ta được: $a=2;b=6;c=8;d=24$.

Suy ra: $T=(a+c)(b+d)=300$.

DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay còn gọi tắt là dãy số)

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1,u_2,...,u_n,...$, trong đó $u_n=u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n).

Số hạng u_1 được gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng tổng quát (số hạng thứ n) của dãy số.

2. Các cách cho một dãy số:

Người ta thường cho một dãy số bằng một trong các cách dưới đây:

- **Cách 1:** Cho dãy số bằng công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ 1. Cho dãy số (x_n) với $x_n=\frac{n}{3^{n+1}}$.

Dãy số cho bằng cách này có ưu điểm là chúng ta có thể xác định được ngay số hạng bất kỳ của dãy số. Chẳng hạn, $x_{10}=\frac{10}{3^{11}}=\frac{10}{177147}$.

- **Cách 2:** Cho dãy số bằng phương pháp truy hồi.

Ví dụ 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=1$ và $a_{n+1}=3a_n-7,\forall n\ge 1$.

Ví dụ 3. Cho dãy số (b_n) xác định bởi $\begin{cases}b_1=1,b_2=3\\ b_{n+2}=4b_{n+1}+5b_n,\forall n\ge 1\end{cases}$.

Với cách này, ta có thể xác định được ngay mối liên hệ giữa các số hạng hoặc nhóm các số hạng của dãy số thông qua hệ thức truy hồi. Tuy nhiên, để tính được các số hạng bất kỳ của dãy số thì chúng ta cần phải tích được các số hạng trước đó hoặc phải tìm được công thức tính số hạng tổng quát của dãy số.

- **Cách 3:** Cho dãy số bằng phương pháp mô tả hoặc diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hẳng dãy số.

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) gồm các số nguyên tố.

Ví dụ 5. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4. Trên cạnh BC, ta lấy điểm A_1 sao cho $CA_1 = 1$. Gọi B_1 là hình chiếu của A_1 trên CA, C_1 là hình chiếu của B_1 trên AB, A_2 là hình chiếu của C_1 trên BC, B_2 là hình chiếu của A_2 trên CA,… và cứ tiếp tục như thế, Xét dãy số (u_n) với $u_n = CA_n$.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số hằng:

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số hằng (hoặc dãy số không đổi) nếu ta có $u_{n+1} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 6. a) Cho dãy số (x_n) với $x_n = n^2 - 2n + 3$ là một dãy số tăng.

Chứng minh: Ta có $x_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) + 3 = n^2 + 2$.

Suy ra $x_{n+1} - x_n = (n^2+2) - (n^2 - 2n + 3) = 2n - 1 > 0, \forall n \ge 1$ hay $x_{n+1} > x_n, \forall n \ge 1$.

Vậy (x_n) là một dãy số tăng.

b) Dãy số (y_n) với $y_n = \dfrac{n+2}{5^n}$ là một dãy số giảm.

Chứng minh:

Cách 1: Ta có $y_{n+1} = \dfrac{n+3}{5^{n+1}}$. Suy ra $y_{n+1} - y_n = \dfrac{n+3}{5^{n+1}} - \dfrac{n+2}{5^n} = -\dfrac{4n+7}{5^{n+1}} < 0, \forall n \ge 1$ hay $y_{n+1} < y_n, \forall n \ge 1$. Vậy (y_n) là một dãy số giảm.

Cách 2: Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có $y_n > 0$ nên ta xét tỉ số $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}$.

Ta có $y_{n+1} = \dfrac{n+3}{5^{n+1}}$ nên $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{n+3}{5(n+2)} < 1, \forall n \ge 1$. Vậy (y_n) là một dãy số giảm.

c) Dãy số (z_n) với $z_n = (-1)^n$ không phải là một dãy số tăng cũng không phải là một dãy số giảm vì $z_{n+1} - z_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = -2(-1)^n$ không xác định được dương hay âm. Đây là dãy số đan dấu.

STUDY TIP

Để chứng minh dãy số (b_n) là dãy số giảm hoặc dãy số tăng, chúng ta thường sử dụng một trong 2 hướng sau đây:

(1): Lập hiệu $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Sử dụng các biến đổi đại sốvà các kết quả đã biết để chỉ ra $\Delta u_n > 0$ (dãy số tăng) hoặc $\Delta u_n < 0$ (dãy số giảm)

(2): Nếu $u_n > 0, \forall n \ge 1$ thì ta có thể lập tỉ số $T_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Sử dụng các biến đổi đại số và các kết quả đã biết để chỉ ra $T_n > 1$ (dãy số tăng), $T_n < 1$ (dãy số giảm).

4. Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_m \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_m \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số M, m sao cho $m \le u_m \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

***Ví dụ 7*:**

a) Dãy số (a_n) với $a_n = 2017\sin\frac{(3n-1)\pi}{4}$ là một dãy số bị chặn vì $-2017 \le a_n \le 2017, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dãy số (b_n) với $b_n = \frac{2n+3}{3n+2}$ là một dãy số bị chặn vì $\frac{2}{3} < b_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dãy số (c_n) với $c_n = (3n-2).7^{n+1}$ bị chặn dưới vì $a_n \ge 49, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Dãy số (d_n) với $d_n = \sqrt{6+\sqrt{6+......+\sqrt{6}}}$ (n dấu căn), bị chặn trên vì $d_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

STUDY TIP

1) Nếu (u_n) là dãy số giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

2) Nếu (u_n) là dãy số tăng thì bị chặn dưới bởi u_1.

B. Các bài toán điển hình

Ví dụ 5. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $a_{n+6} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **B.** $a_{n+9} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. $a_{n+12} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $a_{n+15} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đáp án C

Lời giải

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được đáp án đúng.

+ Ta có $a_{n+6} = 2017\sin\frac{(n+6)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+6)\pi}{3} = -2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3} \ne a_n$

+ Ta có $a_{n+6} = 2017\sin\frac{(n+9)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+9)\pi}{3} = 2017\sin\frac{n\pi}{2} - 2018\cos\frac{n\pi}{3} \ne a_n$.

+ Ta có $a_{n+12} = 2017\sin\frac{(n+12)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+12)\pi}{3} = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3} = a_n$.

+ Ta có $a_{n+15} = 2017\sin\frac{(n+15)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+15)\pi}{3} = -2017\sin\frac{n\pi}{2} - 2018\cos\frac{n\pi}{3} \ne a_n$.

Vậy phương án đúng là C.

Nhận xét: *Từ kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời được các câu hỏi trắc nghiệm sau đây*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3}$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 1: Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $a_{n+p} = a_p, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Câu 2: Số hạng thứ 2017 của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. 3026. **B.** $2017+1009\sqrt{3}$. **C.** $-2017+1009\sqrt{3}$. **D.** -3026.

Ví dụ 6. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = -\frac{3}{2}{a_n}^2 + \frac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng thứ 201 của dãy số (a_n) có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $a_{2018} = 2$. **B.** $a_{2018} = 1$. **C.** $a_{2018} = 0$. **D.** $a_{2018} = 5$.

Đáp án A

Lời giải

Nhận thấy dãy số trên là dãy số cho bởi công thức truy hồi.

Ta có $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 0; a_4 = 1; a_2 = 2; a_6 = 0; +1$.

Từ đây chúng ta có thể dự đoán $a_{n+3} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chúng ta khẳng định dự đoán đó bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

Với $n = 1$ thì $a_1 = 1$ và $a_4 = 1$. Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $a_{k+3} = a_k$.

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1$, nghĩa là chứng minh $a_{k+4} = a_{k+1}$.

Thật vậy, ta có $a_{k+4} = -\frac{3}{2}a_{k+3}^2 + \frac{5}{2}a_{k+3} + 1$ (theo hệ thức truy hồi).

Theo giả thiết quy nạp thì $a_{k+3} = a_k$ nên $a_{k+4} = -\frac{3}{2}a_k^2 + \frac{5}{2}a_k + 1 = a_{k+1}$.

Vậy đẳng thức đúng với $n = k+1$. Suy ra $a_{n+3} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Từ kết quả phần trên, ta có : nếu $m \equiv p(\text{mod}3)$ thì $a_m = a_p$.

Ta có $2018 \equiv 2(\text{mod}\,3)$ nên $a_{2018} = 2$.

Vậy phương án đúng là A.

Nhận xét: *Việc chứng minh được hệ thức $a_{n+3} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ giúp ta giải quyết được bài toán tính tổng hoặc xác định được số hạng tùy ý của dãy số. Vì vậy, việc phát hiện ra tính chất đặc biệt của một dãy số sẽ giúp chúng ta giải quyết các yêu cầu liên quan đến dãy số một cách thuận lợi và dễ dàng hơn. Chúngta cùng kiểm nghiệm qua các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây nhé:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = -\frac{3}{2}{a_n}^2 + \frac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 1. Tính tổng S của sáu số hạng đầu tiên của dãy (a_n)

A. $S = 0$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 5$.

Câu 2. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $a_{n+p} = a_p, \forall n \in \mathbb{N}^*$