CHỦ ĐỀ. ĐẠO HÀM
KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0.

Kí hiệu: $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$. Vậy $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

STUDY TIP

Nếu $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta y = f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ thì $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

- ✓ Δx gọi là số gia của đối số tại điểm x_0.
- ✓ Δy gọi là số gia của hàm số tương ứng.

2. Đạo hàm bên trái, bên phải.

a) Đạo hàm bên trái.

$f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ trong đó $x\to x_0^-$ được hiểu là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

b) Đạo hàm bên phải.

$f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ trong đó $x\to x_0^+$ được hiểu là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

<u>Nhận xét:</u> Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 $\Leftrightarrow f'(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó $f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$.

3. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn.

a) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.

b) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$ nếu có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b.

4. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số.

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

STUDY TIP

- ✓ Hàm số liên tục tại điểm x_0 có thể không có đạo hàm tại điểm đó.
- ✓ Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

B. CÁC DẠNG TOÁN TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Phương pháp:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa.

Cách 1:

- Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1).

- Nếu tồn tại giới hạn (1) thì hàm số có đạo hàm tại x_0 và ngược lại thì hàm số không có đạo hàm tại x_0.

Cách 2: Tính theo số gia.

- Cho x_0 một số gia Δx : $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Mối quan hệ giữa tính liên tục vào đạo hàm.

- Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} = 0$.
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 $\Rightarrow y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0.
- Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 chưa chắc có đạo hàm tại điểm x_0.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+1}$. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = 1$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Đáp án A.

Cách 1: Xét $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Cách 2:

$\Delta y = f(\Delta x + 1) - f(1) = \sqrt{\Delta x + 2} - \sqrt{2}$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x + 2} - \sqrt{2}}{\Delta x}$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x + 2} - \sqrt{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

STUDY TIP

Nhân lượng liên hợp: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ và $\sqrt{a} - b = \frac{a - b^2}{\sqrt{a} + b}$.

Giải theo cách 1 tỏ ra đơn giản và nhanh hơn cách 2.

Câu 2: Khi tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 5x - 3$ tại điểm $x_0 = 2$, một học sinh đã tính theo các bước sau:

Bước 1: $f(x)-f(2)=f(x)-11$.

Bước 2: $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{x^2+5x-3-11}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+7)}{x-2}=x+7$.

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+7)=9$. Vậy $f'(2)=9$.

Tính toán trên nếu sai thì sai ở bước nào.

A. Bước 1. B. Bước 2. C. Bước 3 . D. Tính toán đúng.

Lời giải

Học sinh tính đạo hàm bằng định nghĩa theo cách 1 các bước đều đúng.

STUDY TIP

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0$.

Câu 3: Số gia của hàm số $f(x)=x^2$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$ là:

A. $(\Delta x)^2-2\Delta x-1$. B. $(\Delta x)^2+2\Delta x+2$. C. $(\Delta x)^2+2\Delta x$. D. $(\Delta x)^2-2\Delta x$.

Lời giải

Đáp án D.

Với số gia Δx của đối số x tại điểm $x_0=-1$, ta có: $\Delta y=(-1+\Delta x)^2-1=(\Delta x)^2-2\Delta x$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=x^2-x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia Δx của đối số x tại x_0 là:

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2-2x_0.\Delta x-\Delta x\right)$.

B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1)$.

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0+1)$.

D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x_0.\Delta x+\Delta x\right)$.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có: $\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)-(x_0^2-x_0)=(\Delta x)^2+2x_0.\Delta x-\Delta x$

$\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây là sai.

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lời giải

Đáp án D.

- A đúng theo định nghĩa.

- B đúng vì $\Delta x = x - x_0$ nên $x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0$.

- C đúng. Đặt $h = \Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = h + x_0$, $h \to 0$ khi $x \to x_0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h + x_0 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Vậy D sai.

Câu 6: Xét ba mệnh đề sau:

(1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó .

(3) Nếu hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó .

Trong ba mệnh trên:

A. (1) và (3) đúng. B. (2) đúng. C. (1) và (2) đúng . D. (2) và (3) đúng.

Lời giải

Đáp án A.

Mệnh đề (2) sai vì: Xét hàm số $f(x) = |x|$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, nhưng ta có: $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ và $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

STUDY TIP

- Khi $x \to 0^+ \Rightarrow x > 0$ nên $|x| = x$.

- Khi $x \to 0^- \Rightarrow x < 0$ nên $|x| = -x$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + |x+1|}{x}$. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = -1$.

A. 2. B. 1. C. 0 . D. Không tồn tại.

Lời giải

Đáp án D.

Hàm số liên tục tại $x_0 = -1$.

Ta có $\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} = 0$ (1).

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-1}{x(x+1)}=2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0=-1$.

STUDY TIP

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3-\sqrt{4-x} & khi\, x\neq 0\\ 1 & khi\, x=0\end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\frac{1}{4}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & khi\, x>1\\ x^2 & khi\, x\leq 1\end{cases}$. Khi đó $f'(1)$ là kết quả nào sau đây.

A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. $f'(1)$ không tồn tại.

Lời giải

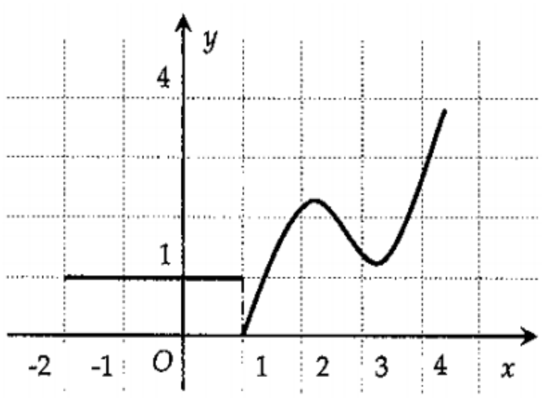
Đáp án D.

Ta có: $f(1)=1^2=1$.

$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$ và $f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$.

Vì $f'(1^+)\neq f'(1^-)$ nên hàm số $f(x)$ không tồn tại đạo hàm tại $x_0=1$.

Câu 10: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây sai.



A. Hàm số có đạo hàm tại $x=0$.
B. Hàm số có đạo hàm tại $x=1$.
C. Hàm số có đạo hàm tại $x=2$.
D. Hàm số có đạo hàm tại $x=3$.

Lời giải

Đáp án B.

Tại $x=1$ đồ thị hàm số bị ngắt nên hàm số không liên tục. Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=1$.

STUDY TIP

- Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng là một đường liền trên khoảng đó.
- Hàm số không liên tục tại điểm x_0 thì không có đạo hàm tại x_0.

Câu 11: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\, x\neq 1 \\ a & khi\, x=1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

A. $a=-2$.
B. $a=2$.
C. $a=1$.
D. $a=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Đáp án B.

Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2=f(1)=a$. Khi đó $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=1$.

Vậy $a=2$.

STUDY TIP

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Câu 12: Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\, x\geq 0 \\ ax+b & khi\, x<0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. $\begin{cases} a=-11 \\ b=11 \end{cases}$.
B. $\begin{cases} a=-10 \\ b=10 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} a=-12 \\ b=12 \end{cases}$.
D. $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$.

Lời giải

Đáp án D.

Trước tiên hàm số phải liên tục tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0), \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b \Rightarrow b=1$

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x+1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}a=a$

Hàm số có đạo hàm tại $x=0\Leftrightarrow a=-1$

STUDY TIP

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$

Câu 13: Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & khi\, x\ge 0\\ a\sin x+b\cos x & khi\, x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0=0$

A. $a=1;b=1$. B. $a=-1;b=1$. C. $a=-1;b=-1$. D. $a=0;b=1$.

Lời giải

Đáp án A

Ta có: $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+bx+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a\sin x+b\cos x)=b$

Để hàm số liên tục thì $b=1$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+x+1-1}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\sin x+b\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\lim_{x\to 0^-}\left(a\cos\frac{x}{2}\right)-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\lim_{x\to 0^-}\sin\frac{x}{2}=a$$

Để tồn tại $f'(0)\Rightarrow f'(0^+)=f'(0^-)\Leftrightarrow a=1$

STUDY TIP

Giới hạn lượng giác $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\Rightarrow \lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-1000)$. Tính $f'(0)$.

A. $10000!$. B. $1000!$. C. $1100!$. D. $1110!$.

Lời giải

Đáp án B.

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(x-2)...(x-1000)-0}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)...(x-1000)$$

$=(-1)(-2)...(-1000)=1000!$

STUDY TIP

Hoán vị n phần tử: $P_n = n! = 1.2...(n-1)n$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Số gia của hàm số $f(x) = x^3$ ứng với $x_0 = 2$ và $\Delta x = 1$ bằng bao nhiêu?

A. -19. B. 7. C. 19. D. -7.

Câu 2. Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x) = 2x(x-1)$ theo x và Δx là:

A. $4x + 2\Delta x + 2$.

B. $4x + 2(\Delta x)^2 - 2$.

C. $4x + 2\Delta x - 2$.

D. $4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 2\Delta x$.

Câu 3. Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ứng với x và Δx là:

A. $\Delta x(\Delta x + 2x - 4)$. B. $2x + \Delta x$. C. $\Delta x(2x - 4\Delta x)$. D. $2x - 4\Delta x$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & khi\, x \neq 0 \\ 0 & khi\, x = 0 \end{cases}$.Giá trị $f'(0)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. -2. D. Không tồn tại.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & khi\, x \neq 1 \\ 0 & khi\, x = 1 \end{cases}$ .Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{3}{2}$. B. 1. C. 0. D. Không tồn tại.

Câu 6. Xét hai mệnh đề:

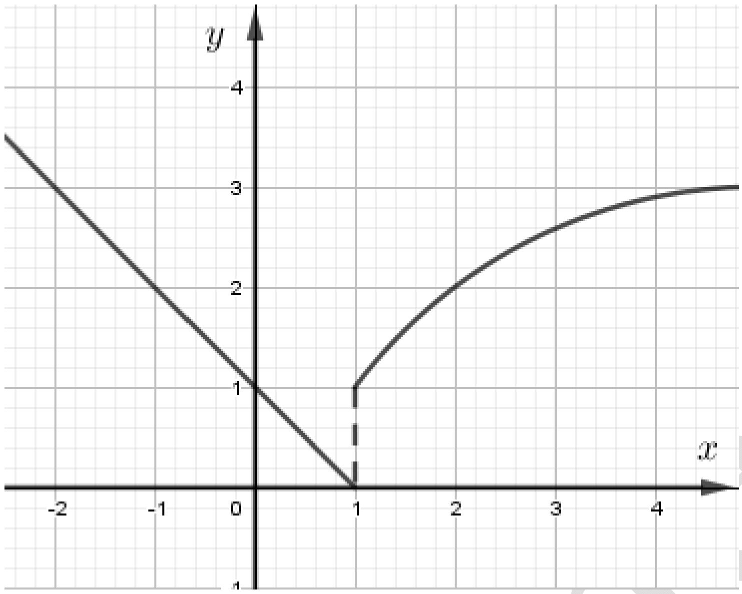
(I) $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

(II) $f(x)$ có liên tục tại x_0 thì $f(x)$ đạo hàm tại x_0.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Cả hai đều sai. D. Cả hai đều đúng.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ:



Hàm số không có đạo hàm tại các điểm nào sau đây?

A. $x=0$. B. $x=1$. C. $x=2$. D. $x=3$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & khi\, x\neq 1\\ 0 & khi\, x=1\end{cases}$ .Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $\dfrac{1}{5}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{1}{4}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & khi\, x\geq 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & khi\, x<1\end{cases}$ .Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. 0. B. 4. C. 5. D. Không tồn tại.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{x} & khi\;\; x\neq 0\\ 0 & khi\;\; x=0\end{cases}$ Xét hai mệnh đề sau:

(I) $f'(0)=1$.

(II) Hàm số không có đạo hàm tại $x_0=0$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai.

Câu 11. Xét hai câu sau:

(1) Hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x=0$.

(2) Hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ có đạo hàm tại $x=0$.

Trong 2 câu trên:

A. (2) đúng. B. (1) đúng. C. Cả (1), (2) đều đúng. D. Cả (1), (2) đều sai.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x} & khi\ x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$. Giá trị của $f'(0)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{5}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. Không tồn tại.

Câu 13. Với hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x} & khi\ \ x\neq 0\\ 0 & khi\ \ x=0\end{cases}$. Để tìm đạo hàm $f'(x)=0$ một học sinh lập luận qua các bước như sau:

1. $|f(x)|=|x|.\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|\leq |x|$.

2. Khi $x\to 0$ thì $|x|\to 0$ nên $|f(x)|\to 0\Rightarrow f(x)\to 0$.

3. Do $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$.

4. Từ $f(x)$ liên tục tại $x=0\Rightarrow f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$.

Lập luận trên nếu sai thì bắt đầu từ bước:

A. Bước 1. B. Bước 2. C. Bước 3. D. Bước 4.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2} & khi\ x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$.

(1) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$.

(2) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Trong các mệnh đề trên:

A. Chỉ (1) đúng. B. Chỉ (2) đúng. C. Cả $(1),(2)$ đều đúng. D. Cả $(1),(2)$ đều sai.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & khi\ \ x\geq 1\\ 2x-1 & khi\ \ x<1\end{cases}$. Tìm a,b để hàm số có đạo hàm tại $x=1$

A. $a=-1,b=0$. B. $a=-1,b=1$. C. $a=1,b=0$. D. $a=1,b=1$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & khi\ \ x>0\\ x^2+x & khi\ \ x\leq 0\end{cases}$. Giá trị của $f'(0)$ bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 17. Xét hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là đoạn $[a;b]$ đồng thời nếu $x\to x_0\in[a;b]$ thì $f(x)\to 1$ với 3 điều kiện:

I. $f(x)$ là hàm số liên tục trái và liên tục phải của x_0.

II. $f(x_0)=1$.

III. $f(x)$ có đạo hàm tại x_0.

Trong ba điều kiện trên, điều kiện cần và đủ để $f(x)$ liên tục tại x_0 là:

A. Chỉ I. B. Chỉ II. C. Chỉ I và II. D. Chỉ II và III.

Câu 18. Xét ba hàm số:

I. $f(x)=|x|.x$

II. $g(x)=\sqrt{x}$

III. $h(x)=|x+1|x$

Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ là:

A. Chỉ I. B. Chỉ II. C. Chỉ I và II. D. Chỉ I và III.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 20. Đáp án C.

$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3$

Với $x_0=2, \Delta x=1 \Rightarrow \Delta y=19$

Câu 21. Đáp án C.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{2(x-x_0)(x+x_0)-2(x-x_0)}{x-x_0}=2x+2x_0-2$$

(Với $x_0=x-\Delta x$)

Câu 22. Đáp án A.

$\Delta y = f(\Delta x+x)-f(x)=(\Delta x+x)^2-4(\Delta x+x)+1-(x^2-4x+1)=\Delta x(\Delta x+2x-4)$

Câu 23. Đáp án A.

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{2}$

Vậy $f'(0)=\frac{1}{2}$

Câu 24. Đáp án D.

Xét $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+3x}{(x-1)(x^2-3x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\infty$

Câu 25. Đáp án A.

(II) Sai : ví dụ: $f(x)=|x|$ thì $f(x)$ liên tục tại $x=0$ nhưng $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$

(I) Đúng theo đáp án đã trình bày

Câu 26. Đáp án B.

Tại $x = 1$, đồ thị hàm số bị gián đoạn nên hàm số không liên tục tại đó

$\Rightarrow$ hàm số không có đạo hàm

Câu 27. Đáp án C.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Câu 28. Đáp án D.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x+3)=5$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x^2+3x-4)=0$$

Vậy không tồn tại $f'(1)$

Câu 29. Đáp án B.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}=+\infty$$

Vậy (I) sai, (II) đúng

Câu 30. Đáp án B.

Ta có: $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x+1}=0=f(0)\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(x+1)}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{(x+1)}=-1$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=0$

Câu 31. Đáp án B.

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-2+2-\sqrt{8x^2+4}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{4x^2}{\sqrt[3]{(4x^2+8)^2}+2\sqrt[3]{4x^2+8}+4}-\frac{8x^2}{2+\sqrt{8x^2+4}}\right)=\frac{1}{3}-2=-\frac{5}{3}$$

Câu 32. Đáp án D.

Một hàm số liên tục tại x_0 chưa chắc có đạo hàm tại điểm đó, hơn nữa $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sin\frac{\pi}{x}$ không có giới hạn khi $x\to 0$

Câu 33. Đáp án C.

Ta có: $-|x| \le x.\sin\frac{1}{x^2} \le |x|$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) \le \lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x^2} \le \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x^2} = 0 = f(0)$

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)$

Lấy dãy (x_n): $x_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}$ có:

$\lim x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1$

Lấy dãy (x_n'): $x_n' = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{6}+2\pi n}} = \frac{1}{2}$, tương tự ta cũng có:

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n' = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n') = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^2}$

không tồn tại

Câu 34. Đáp án C.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a+b = f(1)\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1) = 1\end{cases} \Rightarrow a+b=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{ax^2+bx-(a+b)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}[a(x+1)+b] = 2a+b$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x^2-1-(a+b)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-1-1}{x-1} = 2$

Ta có hệ: $\begin{cases}a+b=1\\2a+b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$

Câu 35. Đáp án A.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}.\sin x\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x) = 0$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{x}=1$

Vậy: $f'(0)=f'(0^-)=f'(0^+)=1$

Câu 36. Đáp án C.

- *f(x)* liên tục tại x_0 tức là $x\to x_0$ thì $f(x)\to f(x_0)$ nên (I) và (II) đúng.
- *f*(*x*) có đạo hàm tại x_0 là điều điện đủ để *f*(*x*) liên tục tại x_0. *f*(*x*) liên tục tại x_0 nhưng có thể *f*(*x*) không có đạo hàm tại điểm đó.

Câu 37. Đáp án B.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$. Vậy $g(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Cho các hàm số $u=u(x);\ v=v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

1. $(u+v)'=u'+v'$
2. $(u-v)'=u'-v'$
3. $(u.v)'=u'v+v'u$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$

STUDY TIP

Mở rộng:

1. $(u_1\pm u_2\pm\ldots\pm u_n)'=u_1'\pm u_2'\pm\ldots\pm u_n'$
2. $(u.v.w)'=u'.v.w+u.v'.w+u.v.w'$

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Cho hàm số $y=f(u(x))=f(u)$ với $u=u(x)$. Khi đó: $\boxed{y_x'=y_u'.u_x'}$

3. Bảng công thức đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm các hàm hợp $u=u(x)$
$(c)'=0$, c là hằng số	
$(x)'=1$	
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(x^\alpha\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$	$\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u'.u^{\alpha-1}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=u'.\cos u$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-u'.\sin u$
$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'.(1+\tan^2 x)$
$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$	$(\cot u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}=-u'.(1+\cot^2 u)$

STUDY TIP

Với các hàm số đã cho trong bảng được xác định với điều kiện đầy đủ.

B. Các dạng toán về quy tắc tính đạo hàm

Đạo hàm của hàm đa thức - hữu tỉ - căn thức và hàm hợp