CHƯƠNG 01:
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

CHỦ ĐỀ 1. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI

Đầu tiên xin nhắc lại các kiến thức về đạo hàm, đây là phần kiến thức trong chương trình toán THPT lớp 11 học kì II.

1. Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0\in(a;b)$ nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại x_0.

Ký hiệu $y'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hoặc $f'(x_0)$

Lưu ý: Nếu hàm số có đạo hàm trong khoảng $(a;b)$ thì liên tục trên khoảng đó nhưng ngược lại thì chưa chắc đúng.

2. Các quy tắc tính đạo hàm

Chú ý: $u=u(x), v=v(x)$

- $(u\pm v)'=u'\pm v'$
- $(u.v)'=u'.v+u.v'$ *và* $(ku)'=ku'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$ *và* $\left(\dfrac{k}{v}\right)'=-\dfrac{k.v'}{v^2};(v\neq 0)$

BẢNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM THƯỜNG GẶP

Hàm số cơ bản	Hàm số hợp
$(C)'=0$ *(C là hằng số)*	
$(x)'=1$	
$\left(x^\alpha\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$	$\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ với $x\neq 0$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ với $u\neq 0$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ với x>0	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ với u>0
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=u'.\cos u$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-u'.\sin u$
$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ với $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$ với $u\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ với $x\neq k\pi$	$(\cot u)'=-\dfrac{u}{\sin^2 u}$ với $u\neq k\pi$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ với $x > 0$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ với $u > 0$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ với $x > 0$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ với $u > 0$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'.e^u$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$

Tiếp theo xin trình bày cách tìm GTLN, GTNN của hàm số một biến bằng đạo hàm, đây là kỹ năng cực kỳ quan trọng để ứng dụng giải các Bài toán thực tế.

3. Định nghĩa GTLN, GTNN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng K (đoạn, khoảng, nửa khoảng)

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \le f(x_0), \forall x \in K$ thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\max\limits_K y = f(x_0)$

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \ge f(x_0), \forall x \in K$ thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\min\limits_K y = f(x_0)$.

4. Phương pháp tìm GTLN, GTNN.

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng K:

Phương pháp: Lập bảng biến thiên trên khoảng K, rồi nhìn trên đó để kết luận max, min.

Bài toán 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$:

Phương pháp 1: Lập bảng biến thiên trên khoảng đó và kết luận.

Phương pháp 2: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta có các bước làm sau:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đã cho.
2. Tìm các điểm $x_1; x_2; ...; x_n$ trên đoạn $[a;b]$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Tính: $f(a); f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(b)$.
4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên (ở mục 3)

Khi đó: $M = \max\limits_{[a;b]} f(x); \text{m} = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

Chú ý:

1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số f(x) luôn tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tất cả các giá trị trung gian nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên đoạn đó.

2. Nếu đề bài không cho rõ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng, đoạn nào cón nghĩa là ta tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định của hàm số đó.

3. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \ge 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(a) \\ \max f(x) = f(b) \end{cases}$

4. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \le 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(b) \\ \max f(x) = f(a) \end{cases}$

Ngoài ra cần trang bị thêm một số kiến thức về bất đẳng thức cơ bản để giải quyết các bài này nhanh hơn:

5. Bất đẳng thức Cauchy cho 2 và 3 số:

Hai số: Với $A,B\ge 0$ ta luôn có $A+B\ge 2\sqrt{AB}$, dấu bằng xảy ra khi $A=B$

Ba số: Với $A,B,C\ge 0$ ta luôn có $A+B+C\ge 3\sqrt[3]{ABC}$, dấu bằng xảy ra khi $A=B=C$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1.

Một số bài toán ứng dụng về kinh doanh, sản suất trong cuộc sống.

Ý tưởng giải là cố gắng thiết lập một hàm số một biến sau đó ứng dụng đạo hàm để tìm GTLN, GTNN.

Bài 1:

Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 B. 2.350.000 C. 2.450.000 D. 2.550.000

Lời giải:

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x: đồng ; $x\ge 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x-2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là:

$$\frac{2\left(x-2.000.000\right)}{100.000}=\frac{x-2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50-\frac{x-2.000.000}{50.000}=-\frac{x}{50.000}+90$$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, (F(x): đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{x}{50.000}+90\right)x=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Bài toán trở thành tìm GTLN của $F\left(x\right)=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$, ĐK: $x\ge 2.000.000$

$$F'\left(x\right)=-\frac{1}{25.000}x+90$$

$$F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x+90=0\Leftrightarrow x=2.250.000$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000		2.250.000		$+\infty$
F'(x)		+	0	−	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Chọn A.

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x) = -\dfrac{1}{50.000}x^2 + 90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x, ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho F(x) lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Bài 2:

Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ B. 43.000đ C. 42.000đ D. 41.000đ

Lời giải:

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x: đồng; $30.000 \le x \le 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá 50.000 – x thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là:

$$\left(50000 - x\right).\frac{50}{5000} = \frac{1}{100}\left(50000 - x\right).$$

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$$40 + \frac{1}{100}\left(50000 - x\right) = -\frac{1}{100}x + 540$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\dfrac{1}{100}x + 540\right).\left(x - 30.000\right) = -\dfrac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$

Bài toán trở thành tìm GTLN của

$F(x) = -\dfrac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$, Đk: $30.000 \le x \le 50.000$.

$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000$

Vì hàm F(x) liên tục trên $30.000 \le x \le 50.000$ nên ta có:

$F(30.000) = 0$

$F(42.000) = 1.440.000$

$F(50.000) = 800.000$

Vậy với $x = 42.000$ thì $F(x)$ đạt GTLN.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng.

Chọn C.

Bài 3. Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30 - \frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

Lời giải:

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, $(0 < x \le 60)$

Gọi F(x) là hàm lợi nhuận thu được (F(x): đồng)

Số tiền thu được :

$F(x) = \left(300 - \frac{5x}{2}\right)^2 .x = 90.000x - 1500x^2 + \frac{25}{4}x^3$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt giá trị lớn nhất.

$F'(x) = 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 120(loai) \\ x = 40(\text{t/ m}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

X	0		40		60
F'(x)		+	0	−	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Chọn B.

Bài 4.

Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải chứa được $16\pi\left(m^3\right)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có kích thước như thế nào để sản suất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R = 2(m), h = 4(m)$ B. $R = 4(m), h = 2(m)$

C. $R = 3(m), h = 4(m)$ D. $R = 4(m), h = 4(m)$

Lời giải:

Do thùng phi có dạng hình trụ nên:

$V_{tru} = \pi R^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \dfrac{16}{R^2}, (1)$

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$S_{Tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(h + R), (2)$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp} = 2\pi R\left(\frac{16}{R^2} + R\right) = 2\pi\left(\frac{16}{R} + R^2\right)$$

$$S'_{Tp} = 2\pi\left(-\frac{16}{R^2} + 2R\right) = \frac{4\pi}{R^2}\left(R^3 - 8\right)$$

$$S'_{Tp} = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi}{R^2}\left(R^3 - 8\right) = 0 \Leftrightarrow R = 2$$

Bảng biến thiên

R	0		2		$+\infty$
S'(R)		−	0	+	
S(R)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì R= 2(m) và chiều cao là h = 4 (m).

Chọn A.

Bài 5.

Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100m^2$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi $\left(200g/m^2\right)$ tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A. $\dfrac{230}{3}kg$ B. $70kg$ C. $72kg$ D. $69kg$

Giải:

Số Kg tôm giống mà ông Thanh thả vụ vừa qua: 100.1= 100(kg).

Gọi x (0<x<100) là số kg tôm cần thả ít đi trong vụ tôm tới.

Khối lượng trung bình $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống thu hoạch được: $2000:100 = 20(kg)$

Khi giảm 0,2 kg tôm giống thì thì sản lượng tôm thu hoạch tăng thêm là $2\left(kg/m^2\right)$

Gọi $F(x)$ là hàm sản lượng tôm thu được vụ tới $(F(x):kg)$

Vậy sản lượng tôm thu hoạch được trong vụ tới có pt tổng quát là:

$$F(x)=(100-x)\left(20+\frac{3}{8}x\right)=2000+\frac{35}{2}x-\frac{3}{8}x^2$$

Bìa toán trở thành tìm x để F(x) lớn nhất.

Ta có:

$$F'(x)=\frac{25}{2}-\frac{3}{4}x$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow\frac{25}{2}-\frac{3}{4}x=0\Leftrightarrow x=\frac{70}{3}$$

Bảng biến thiên

X	0		$\frac{70}{3}$		100
F'(x)		+	0	−	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Vậy vụ tới ông Thanh phải thả số kg tôm giống là:

$$100-\frac{70}{3}=\frac{230}{3}\approx 76,67(kg)$$

Chọn A.

Nhận xét:

Làm sao ta có thể tìm được hàm F(x) và tìm được hệ số $\frac{3}{8}$

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: nếu ta không giảm số lượng tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được là: $100.20=2000(kg)$ tôm.

Nếu ta giảm số $x(kg)$ tôm giống thì số tôm giống cần thả là $100-x$ và số kg tôm thu hoạch được là: $(100-x)(20+mx)kg$

Theo giả thiết tôm giống giảm 0,2 (kg/m^2) thì $100m^2$ giảm $x=20kg$, sản lượng thu được là $2200kg$.

Ta có: $(100-20)(20+m20)=2200\Leftrightarrow m=\frac{3}{8}$

Bài 6.

Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x)=0,25x^2(30-x)$ trong đó $x(mg)$ và x > 0 là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg B. 30mg C. 40mg D. 20mg

Giải:

Ta có: $G(x)=0,25x^2(30-x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{40}x^3$

$G'(x)=\frac{3}{2}x-\frac{3}{40}x^2$

$G'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}x-\frac{3}{40}x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(\text{loai})\\ x=20(\text{t/ m})\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

X	0		20		$+\infty$
G’(x)		+	0	−	
G(x)		↗	100	↘	

Dựa vào bảng biến thiên thì bênh nhân cần tiêm một lượng thuốc $20mg$

Chọn D.

Bài 7.

Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t):45t^2-t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25 B. 30 C. 20 D. 15

Giải:

Ta có:

$G'(t)=90t-3t^2$

$G''(t)=90-6t$

$G''(t)=0\Leftrightarrow 90-6t=0\Leftrightarrow t=15$

Bảng biến thiên:

T	0		15		$+\infty$
G’’(t)		+	0	−	
G(t)		↗	675	↘	

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Chọn D.

Bài 8:

Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t=10(h)$ B. $t=14(h)$ C. $t=15(h)$ D. $t=22(h)$

Giải:

Ta có:

$$h'=-3\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right).$$

$$h'=0\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow t=-2+6k,\left(k\in Z_{(+)}\right)$$

ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

k	1	2	3	4
t	4	10	16	22

Bảng biến thiên:

Ta suy ra được h đạt GTLN khi $t=10$ (h)

Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

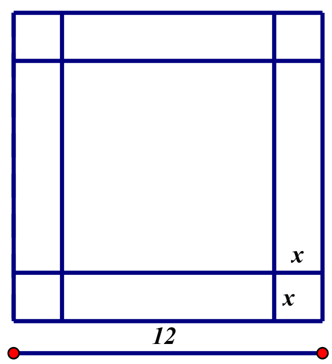
Vì $-1\le cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\le1\Rightarrow9\le3cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12\le15.$

Vậy để h lớn nhất thì $cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow t=-2+12k,\left(k\in Z_{(+)}\right)$

Vậy h đạt GTLN khi $t=10$ (h)

Bài 9:

(Đề minh họa Quốc gia 2017): Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x(cm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được cái hộp không nắp. Tìm x để được một cái hộp có thể tích lớn nhất.



A. $x=6(cm)$ B. $x=3(cm)$

C. $x=2(cm)$ D. $x=4(cm)$

Giải:

Khi cắt tấm nhôm hình vuông và gập thành một cái hộp thì độ dài cạnh của cái hộp là: $12-2x$

Ta có:

$V=S.h=(12-2x)^2.x=4x^3-48x+144x$ với $0<x\le6$

Bài toán trở thành tìm x để V lớn nhất.

Ta có:

$V'=12x^2-96x+144$

$$V'=0\Leftrightarrow12x^2-96x+144=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=6\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		2		6
V'(x)		+	0	−	
V(x)		↗	128	↘	

Vậy để thể tích hộp lớn nhất thì x =2 cm
Chọn C.

Bài 10:
Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$
B. Dài $30cm$, rộng $20cm$
C. Dài $24cm$, rộng $18cm$
D. Dài $24cm$, rộng $19cm$

Giải:

Gọi chiều dài của trang chữ nhật là $x(cm),(x>0)$

Chiều rộng của trang chữ nhật là: $\dfrac{384}{x}cm$

Chiều dài của trang giấy là $x+6(cm)$

Chiều rộng của trang giấy là : $\dfrac{384}{x}+4(cm)$

Diện tích trang giấy: $S=(x+6)\left(\dfrac{384}{x}+4\right)=408+4x+\dfrac{2304}{x}$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $S'(x)=4-\dfrac{2304}{x^2}$

$$S'=0\Leftrightarrow 4-\frac{2304}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=24(\text{t/ m})\\ x=-24(\text{loai})\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		24		$+\infty$
S'(x)		−	0	+	
S(x)	$\searrow$		$S_{\min}$		$\nearrow$

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là 30 cm, chiều rộng là 20 cm.

Bài 11:
Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 16cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $36cm^2$ B. $20cm^2$ C. $16cm^2$ D. $30cm^2$

Giải:

Gọi độ dài hình chữ nhật đó là: $x(cm)$. Chiều rộng của hình chữ nhật đó là: $(8-x)cm$

Suy ra $4\le x\le 8$

Diện tích hình chữ nhật đó là: $S=x(8-x)=8x-x^2$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt GTLN.

Ta có: $S'=8-2x;S'=0\Leftrightarrow 8-2x=0\Leftrightarrow x=4$

Vì hàm S(x) liên tục trên $4 \le x \le 8$, ta có: $S(4) = 16; S(8) = 0$

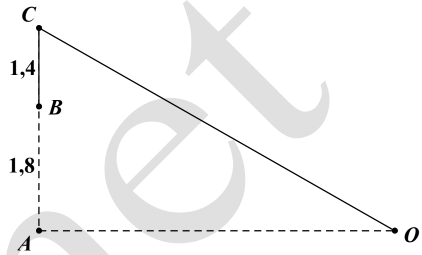
Kết luận: hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng $16cm^2$

Lưu ý: Bìa này ta còn có thể sử dụng lí thuyết của lớp 10. Tìm GTLN của parapol với hệ số a<0 thì $S_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = S\left(-\frac{b}{2a}\right) = 16$

Chọn C.

Bài 12:

Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn.



A. $AO = 2,4m$ B. $AO = 2m$

C. $AO = 2,6m$ D. $AO = 3m$

Giải:

Đặt độ dài cạnh $AO = x(cm), (x > 0)$

Suy ra:

$BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos\widehat{BOC} = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2.OB.OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

$$= \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn nên bài toán trở thành bài toán tìm x để $F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$

Đạt GTNN.

Đặt $(3,24 + x^2) = t, (t > 3,24)$.

Suy ra $F(t) = \frac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}} = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t) = \left(\frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}\right)' = \frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t(t+7)} - (25t + 63)\left(\frac{2t + 7}{2\sqrt{t(t+7)}}\right)}{t(t+7)}\right)$$