BẤT ĐẲNG THỨC

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-NHỎ NHẤT

Bài viết này đề cập đến một số phương pháp cơ bản và thông dụng nhất để chứng minh BĐT hoặc tìm GTLN và GTNN của một biểu thức.

&1. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

1. Kiến thức cơ bản

Bất đẳng thức Côsi cho hai số hoặc ba số

a/ Nếu a, b là các số không âm, ta luôn có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (1)$

Dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

b/ Nếu a, b, c là các số không âm, ta luôn có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \; (2)$

Dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Một số dạng thông dụng của bất đẳng thức côsi

a/ Nếu a, b là các số dương, thì luôn có

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4,\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq \frac{4}{a+b},\ ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,\ a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

b/ Nếu a, b là các số dương, thì luôn có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9,\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{9}{a+b+c},\ abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bất đẳng thức Côsi cho n số không âm

Cho n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không âm, ta luôn có : $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Các dạng toán

Khi sử dụng ***bất đẳng thức côsi*** ta phải chú ý đến **điều kiện** bài toán và đặc biệt dấu **"="** xảy ra khi nào?

Loại 1: Tổng và tích

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \; (1)$

Giải

Do $a, b, c \geq 0$ nên áp dụng ***bất đẳng thức côsi*** cho từng cặp 2 số, ta được:

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

$b + c \geq 2\sqrt{bc}$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = c$

$c + a \geq 2\sqrt{ca}$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow c = a$

Nhân ba bất đẳng thức cùng chiều theo từng vế, ta được (1)

Dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 2: (Đề thi khối B – 2005)

Chứng minh rằng với mọi $x \in R$, ta có: $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$

Giải

Chú ý: $\frac{12}{5}.\frac{15}{4} = 3^2$, $\frac{15}{4}.\frac{20}{3} = 5^2$, $\frac{20}{3}.\frac{12}{5} = 4^2$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x\left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}.\frac{15}{4}\right)^x} = 2\sqrt{\left(3^2\right)^x} = 2.\left(\sqrt{3^x}\right)^2 = 2.3^x$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x = \left(\frac{15}{4}\right)^x \Leftrightarrow x = 0$

Tương tự: $\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2.5^x$, $\left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x \geq 2.4^x$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được: $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Ví dụ 3: Cho a, b là các số thực thỏa $a + b = 2$ .Chứng minh rằng: $ab\left(a^2 + b^2\right) \leq 2(1)$

Nhận xét: Dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = b \Rightarrow 2ab = a^2 + b^2$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$,ta có:

$$ab\left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{2}.2ab\left(a^2 + b^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2ab + a^2 + b^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2 = 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2ab = a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$

Ví dụ 4: Cho a, b là các số thực dương thỏa $a + b = 2$. Chứng minh rằng: $a^3b^3\left(a^3 + b^3\right) \leq 2$ (1)

Nhận xét:

- $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = 2\left(a^2 - ab + b^2\right)$
- Dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = b \Rightarrow a^2 - ab + b^2 = ab$

Giải

$$a^3b^3\left(a^3 + b^3\right) \leq 2 \Leftrightarrow a^3b^3\left(a^2 - ab + b^2\right) \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $xyzt \leq \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = t$, ta có:

$$a^3b^3\left(a^2-ab+b^2\right)=ab.ab.ab.\left(a^2-ab+b^2\right)\le\left(\frac{ab+ab+ab+a^2-ab+b^2}{4}\right)^4=\left[\frac{(a+b)^2}{4}\right]^4=1$$

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases}ab=a^2-ab+b^2\\a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

Ví dụ 5: Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2\ge 64abcd$$

<u>Giải</u>

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $(x+y)^2\ge 4xy$, ta có:

$(a+b)^2\ge 4ab$ $\quad$ $(a+b+c)^2\ge 4c(a+b)$

$(a+b+c+d)^2\ge 4d(a+b+c)$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$(a+b)^2(a+b+c)^2(a+b+c+d)^2\ge 64abcd(a+b)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2\ge 64abcd$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}d=a+b+c\\c=a+b\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow d=2c=4b=4a$

Ví dụ 6: Cho *a* + *b* = 2. Chứng minh rằng: $a^4+b^4\ge 2$.

Áp dụng bất đẳng thức $2\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2$ liên tiếp

Ta có: $\quad 2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2=4\Rightarrow a^2+b^2\ge 2$.

và $\quad 2(a^4+b^4)\ge(a^2+b^2)^2\ge 2^2=4$

Suy ra: $\quad a^4+b^4\ge 2$ $\quad$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

Bài tập tương tự

Bài 1: Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$.

Bài 2: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $2^{a^2}+2^{b^2}+2^{c^2} \ge 2^{ab}+2^{bc}+2^{ca}$.

Bài 3: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng: $a^3b+b^3c+c^3a \ge ab+bc+ca$.

Bài 4: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Bài 5: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $(a+b+c)(ab+bc+ca) \le \frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$

Loại 2: Biến chứa trong căn

Ví dụ 1: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$.

Giải:

Nhận xét: **Dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \Rightarrow a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)}+\sqrt{\frac{2}{3}(b+c)}+\sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} \le 2$

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, ta có:

$$\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} \le \frac{\frac{2}{3}+a+b}{2} \qquad \sqrt{\frac{2}{3}(b+c)} \le \frac{\frac{2}{3}+b+c}{2} \qquad \sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} \le \frac{\frac{2}{3}+c+a}{2}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, suy ra kết quả.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3} \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2: Cho $c>0$ và $a,b \ge c$. Chứng minh rằng: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}$

Giải:

Tương tự chứng minh trong ví dụ 1

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow A=\sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{a-c}{a}\right)}+\sqrt{\frac{c}{a}\left(\frac{b-c}{b}\right)} \le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, ta có:

$$A = \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{a-c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a}\left(\frac{b-c}{b}\right)} \le \frac{\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}}{2} + \frac{\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}}{2} = 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{a-c}{a} \\ \frac{c}{a} = \frac{b-c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow ab = ac + bc \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Ví dụ 3: (Đề thi khối D – 2005)

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge 3\sqrt{3}$$

<u>Giải:</u>

***<u>Lưu ý:</u>* Nhận thấy dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Áp dụng BĐT côsi dạng $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$. Ta có:

$$1 + x^3 + y^3 \ge 3\sqrt[3]{1.x^3.y^3} = 3xy \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \ge \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$$

Tương tự : $\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \ge \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}$, $\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$

Từ đó suy ra $VT \ge \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}\right) \ge 3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{xy}}\frac{1}{\sqrt{yz}}\frac{1}{\sqrt{zx}}} = 3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 3\sqrt{3} \quad (CMX)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1, \quad y = z = 1, \quad z = x = 1 \\ \sqrt{xy} = \sqrt{yz} = \sqrt{xz}, \quad xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là các số dương thỏa $a + b + c = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a}$$

<u>Giải:</u>

Nhận xét: **Dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{4}\Rightarrow a+3b=b+3c=c+3a=1$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt[3]{xyz}\le\frac{x+y+z}{3}$, ta có:

$$P=\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}=\sqrt[3]{1.1.(a+3b)}+\sqrt[3]{1.1.(b+3c)}+\sqrt[3]{1.1.(c+3a)}$$
$$\le\frac{1+1+a+3b}{3}+\frac{1+1+b+3c}{3}+\frac{1+1+c+3a}{3}=\frac{6+4(a+b+c)}{3}=3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{4}$

Vậy $\min P=3\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{4}$

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn: $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{2}.$$

<u>Giải:</u>

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $\sqrt{\frac{1}{AB}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$ và lưu ý : $1=ab+bc+ca$

Ta có: $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{ab+bc+ca+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)$.

Tương tự: $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)$, $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right)$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

<u>Bài tập tương tự</u>

<u>Bài 1 :</u> Cho $a,b,c\ge-\frac{1}{4}$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh : $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$.

<u>Bài 2 :</u> Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng : $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Bài 3 : Cho $|a|\le 1, |b|\le 1, |a+b|=\sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

A = $\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}$ (Đề thi vào lớp 10 THPT Hải Dương)

Bài 4: Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}$.

Bài 5: Cho $-1\le a\le 1$. Chứng minh rằng: $\sqrt[4]{1-a^2}+\sqrt[4]{1-a}+\sqrt[4]{1+a}\le 3$

Loại 3: Mẫu chứa biến

Loại này rất đa dạng và khi giải đòi hỏi nhiều thủ thuật, biến đổi phức tạp. Sau đây là một số thủ thuật đơn giản thường gặp.

Thêm bớt để khử Mẫu: Chú ý việc bảo tồn dấu "=" khi thực hiện.

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\ (1)$

Lưu ý: Trong (1) ta nhận thấy dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ *và VT(1) dạng phân số, VP(1) là một số thực. Ta nghĩ ngay tới* ***bất đẳng thức côsi*** *dạng* $\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\ge 2\sqrt{\frac{A}{B}.\frac{B}{A}}=2(*)$*.Dấu "="trong* $(*)$ *xảy ra* $\Leftrightarrow A=B$ *với* $A,B>0$.

Lời giải (1):

$$(1)\Leftrightarrow\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\ge 3\Leftrightarrow\left(\frac{2a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{2b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{2c}{a+b}+1\right)\ge 6$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{a+c}{b+c}\right)+\left(\frac{b+c}{c+a}+\frac{b+a}{c+a}\right)+\left(\frac{c+a}{a+b}+\frac{c+b}{a+b}\right)\ge 6$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+b}{a+b}\right)+\left(\frac{b+c}{c+a}+\frac{a+c}{b+c}\right)+\left(\frac{c+a}{a+b}+\frac{b+a}{c+a}\right)\ge 6\quad(2)$$

Do a, b, c là các số dương. Nên áp dụng $(*)$, ta được:

$\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+b}{a+b}\ge 2$. Dấu "=" xảy ra $a=c$

$\frac{b+c}{c+a}+\frac{a+c}{b+c}\ge 2$. Dấu "=" xảy ra $b=a$

$\frac{c+a}{a+b}+\frac{b+a}{c+a}\geq 2$. Dấu "=" xảy ra $c=b$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều theo từng vế, ta được (2)

Dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 2: Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq \frac{15}{2}$

Giải

Lưu ý: Có bạn làm như sau:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a+c}+\frac{c+a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}\right)\geq 2+2+2=6$$

Nhưng dấu "=" không thể xảy ra. Vì sao? Các bạn tự trả lời.

Lời giải đúng:

Ta có:

$$A=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq 2+2+2=6$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

$$B=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ (ví dụ 1b.)

Suy ra: $A+B\geq 6+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ *a = b = c*.

Ví dụ 3: Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\geq a+b+c$

Lưu ý: Nhận thấy VT là dạng phân số, VP là tổng bậc 1 và hai vế đồng bậc. Hơn nữa dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. Nên ta nghỉ ngay tới là triệt tiêu mẫu số ở VT và phải luôn bảo tồn dấu "=".

Giải

Ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{2c}+c\ge 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge 2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}}=a+b$$

$$\frac{b^2+c^2}{2a}+a\ge 2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\ge 2\sqrt{\frac{(b+c)^2}{4}}=b+c$$

$$\frac{c^2+a^2}{2b}+b\ge 2\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}\ge 2\sqrt{\frac{(c+a)^2}{4}}=c+a$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo từng vế, suy ra:

$$\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\ge a+b+c$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học Sài Gòn khối A-B 2007)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$$

Lưu ý: Điều kiện là bậc hai nhưng biểu thức P là bậc nhất. Bài toán yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất, có nghĩa là ta chứng minh $P\ge k,(k=const)$. Do đó ta nghĩ tới việc đánh giá $P^2\ge k^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Giải

Do a, b ,c là các số dương nên $P>0$ và

$$P^2=\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2=\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $A+B\ge 2\sqrt{AB}$, ta có:

$$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\geq 2b^2,\qquad \frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\geq 2c^2,\qquad \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\geq 2a^2$$

Suy ra $P^2\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=3\Rightarrow P\geq\sqrt{3}\ \left(P>0\right)$

Vậy $\min P=\sqrt{3}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}.$$

Giải:

Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=\frac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\geq a-\frac{ab}{2}$.

Tương tự: $\frac{b}{1+c^2}\geq b-\frac{bc}{2}$; $\frac{c}{1+a^2}\geq c-\frac{ac}{2}$.

Do đó, ta chỉ cần chứng minh: $a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geq\frac{3}{2}$.

Từ BĐT $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$ suy ra $ab+bc+ca\leq 3$.

Do đó: $a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geq\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$.

Ví dụ 6: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^3+8}+\frac{b^3}{c^3+8}+\frac{c^3}{a^3+8}\geq\frac{1}{9}+\frac{2}{27}(ab+bc+ca).\qquad (*)$$

Giải:

Ta có: $\frac{a^3}{b^3+8}+\frac{b+2}{27}+\frac{b^2-2b+4}{27}\geq\frac{a}{3}\Rightarrow\frac{a^3}{b^3+8}\geq\frac{9a+b-b^2-6}{27}$.

Tương tự: $\frac{b^3}{c^3+8}\geq\frac{9b+c-c^2-6}{27}$; $\frac{c^3}{a^3+8}\geq\frac{9c+a-a^2-6}{27}$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta có:

$$\text{VT }(*) \geq \frac{10(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)-18}{27} = \frac{12-(a^2+b^2+c^2)}{27} =$$

$$= \frac{3+(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{27} = \frac{1}{9}+\frac{2}{27}(ab+bc+ca) \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

<u>Đánh giá nghịch đảo</u>

Ví dụ 7: (Đề thi khối B, 2014) Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa $(a+b)c>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\frac{c}{2(a+b)}$.

<u>Giải:</u>

Ta có $a+b+c \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$. Tương tự $\sqrt{\frac{b}{a+c}} \geq \frac{2b}{a+b+c}$

Suy ra $P \geq \frac{2(a+b)}{a+b+c}+\frac{c}{2(a+b)}=\left[\frac{2(a+b)}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{2(a+b)}\right]-\frac{1}{2} \geq 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Khi $a=0,\ b=c>0$ thì $P=\frac{3}{2}$.Vậy $\min P=\frac{3}{2}$ *khi* $a=0,\ b=c>0$

Ví dụ 8: Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

<u>Giải</u>

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có:

$$2\sqrt{\frac{b+c-a}{a}} \leq \frac{b+c-a}{a}+1=\frac{b+c}{a} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c-a}} \geq \frac{2a}{b+c}.$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{c+a-b}} \geq \frac{2b}{a+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq \frac{2c}{a+b}$

Ta chỉ cần chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}(*)$ là xong.

Chứng minh $(*)$ xem **<u>ví dụ 1 loại 3</u>**

Ví dụ 9: Cho a, b, c, d là những số thực không âm thỏa mãn

$$(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)>0$$

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq 2$

<u>Giải:</u>

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có

$$\sqrt{a(b+c+d)} \leq \frac{a+(b+c+d)}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{a(b+c+d)}}{a+b+c+d} \leq 1$$

Nhân hai vế với bất đẳng thức $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} \geq 0$, ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} \geq \frac{2a}{a+b+c+d}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{c+d+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c+d}$, $\sqrt{\frac{c}{d+a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c+d}$, $\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2d}{a+b+c+d}$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên, ta suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ hai trong bốn số bằng nhau và hai số còn lại bằng 0. Vì sao?....

<u>Đánh giá mẫu</u>

Ví dụ 10: Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \geq \frac{1}{5}(a+b+c) \quad (*)$$

Giải:

Ta có: $\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sqrt{(a+4b)(3a+2b)}\le\frac{1}{2}(4a+6b)=2a+3b$.

Tương tự với các mẫu số còn lại. Từ đó:

$$VT(*)\ge\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2a+3b+2b+3c+2c+3a}=\frac{1}{5}(a+b+c)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 11: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1. \qquad (*)$$

Giải:

Trước hết ta chứng minh BĐT: $x^5+y^5\ge x^2y^2(x+y)$ (1) với mọi *x* > 0, *y* > 0.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^3(x^2-y^2)+y^3(y^2-x^2)\ge 0 \Leftrightarrow (x^3-y^3)(x^2-y^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)(x^2+xy+y^2)\ge 0$ (luôn đúng với mọi *x* > 0, *y* > 0).

Do đó: $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}=\frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{1}{ab(a+b+c)}$.

Tương tự: $\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\frac{1}{bc(a+b+c)}$; $\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\frac{1}{ca(a+b+c)}$.

Suy ra: VT (*) $\le\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=1$. (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 12: Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{x^3}{x^3+3yzt}+\frac{y^3}{y^3+3ztx}+\frac{z^3}{z^3+3txy}+\frac{t^3}{t^3+3xyz}\ge 1$$

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $3abc \le a^3 + b^3 + c^3$.

(***Các bạn tự giải tiếp!***)

<u>Sử dụng bất đẳng thức phụ :</u>

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge \frac{4}{a+b} \qquad (1)$$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge \frac{9}{a+b+c} \quad (2)$$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

<u>Trong đó</u> : *a, b, c là các số thực dương.*

Ví dụ 13: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn *a + b + c* = 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc} \ge 16$

<u>Giải :</u>

Áp dụng (1) ta có: $$\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge \frac{4}{c(a+b)} \ge \frac{4}{\left(\frac{c+a+b}{2}\right)^2} = 16.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $c = \frac{1}{2},\ a = b = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 14: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn *a + b + c* $\le$ 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2009}{ab+bc+ca} \ge 670.$$

<u>Giải :</u>

Áp dụng (2), ta có:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \ge \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \ge 1 \quad (3)$$

Mặt khác, ta có: $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{2007}{ab+bc+ca} \ge \frac{3.2007}{(a+b+c)^2} \ge 669$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c = 1$.

Ví dụ 15: Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác (*p* là nửa chu vi). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Áp dụng (1), ta có:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{2p-a-b}=\frac{4}{c} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{4}{2p-b-c}=\frac{4}{a} \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\ge\frac{4}{2p-a-c}=\frac{4}{b} \qquad \text{(c)}$$

Cộng (a), (b), (c), vế theo vế, ta được:

$$2\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)\ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ *a = b = c*.

Ví dụ 16: (Đề thi khối A-2005)

Cho *a, b, c* > 0 thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. Chứng minh $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+a+c}+\frac{1}{2c+a+b}\le 1$

Giải:

Từ (1) dạng: $\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}$

Suy ra $\frac{1}{2a+(b+c)}\le\frac{1}{8a}+\frac{1}{4(b+c)}=\frac{1}{8a}+\frac{1}{4b+4c}\le\frac{1}{8a}+\frac{1}{16b}+\frac{1}{16c}$

Tương tự : $\frac{1}{2b+(a+c)}\le\frac{1}{8b}+\frac{1}{16a}+\frac{1}{16c}$; $\qquad \frac{1}{2c+(a+b)}\le\frac{1}{8c}+\frac{1}{16a}+\frac{1}{16b}$

Cộng vế với vế 3 bđt trên, rồi rút gọn ta có đpcm.

Ví dụ 17: Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng: