CHỦ ĐỀ. QUAN HỆ VUÔNG GÓC. VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa và các phép toán:

✓ Định nghĩa, tính chất và các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

✓ Phép cộng, trừ vectơ:

- ***Quy tắc ba điểm***: Cho ba điểm *A, B, C* bất kì, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
- ***Quy tắc hình bình hành***: Cho hình bình hành *ABCD*, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
- ***Quy tắc hình hộp:*** Cho ***hình*** hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

✓ Lưu ý:

- ***Điều kiện để hai vectơ cùng phương***:
  Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})$ $\Leftrightarrow \exists! k\in\mathbb{R}:\vec{a}=k.\vec{b}$.
- Điểm *M* chia đoạn thẳng *AB* theo tỉ số *k* $(k\neq 1)$, điểm *O* tùy ý.
  Ta có: $\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MB}$ $\quad \overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$
- ***Trung điểm của đoạn thẳng***: Cho *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AB*, điểm *O* tùy ý.
  Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ $\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$
- ***Trọng tâm của tam giác***: Cho *G* là trọng tâm ΔABC, điểm *O* tùy ý.
  Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ $\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ:

✓ ***Định nghĩa***: Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

✓ ***Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:*** Cho ba vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Khi đó: $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists! m,\ n\in\mathbb{R}:\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$

✓ Cho ba vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tùy ý.

Khi đó: $\exists! m,\ n,\ p\in\mathbb{R}:\vec{x}=m.\vec{a}+n.\vec{b}+p.\vec{c}$

3. Tích vô hướng của hai vectơ:

✓ ***Góc giữa hai vectơ trong không gian***: Ta có: $\overrightarrow{AB}=\vec{u},\ \overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

Khi đó: $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\widehat{BAC}$ $(0^0\leq\widehat{BAC}\leq 180^0)$

✓ ***Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:***

Cho $\vec{u},\ \vec{v}\neq\vec{0}$. Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

- Với $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$, quy ước: $\vec{u}.\vec{v}=0$

- Với $\vec{u},\ \vec{v} \neq \vec{0}$, ta có: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

II. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Dạng 1: **Chứng minh đẳng thức. Phân tích vectơ. Áp dụng công thức tính tích vô hướng.**

- Áp dụng các phép toán đối với vectơ (phép cộng hai vectơ, phép hiệu hai vectơ, phép nhân một vectơ với một số).
- Áp dụng các tính chất đặc biệt của hai vectơ cùng phương, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.

Ví dụ: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

Hướng dẫn :

Cần lưu ý tính chất M là trung điểm của thì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$. Khi đó :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\ .$$

Dạng 2: **Chứng minh hai đường thẳng song song, ba điểm thẳng hàng, đường thẳng song song với mặt phẳng, các tập hợp điểm đồng phẳng**

- Ứng dụng điều kiện của hai vectơ cùng phương, ba vectơ đồng phẳng

Ví dụ : Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. **B.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. **D.** $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

Hướng dẫn:

Để A, B, C, D tạo thành hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ hoặc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Khi đó

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\right)$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$: Với O là trọng tâm của tứ giác (hoặc tứ diện) $ABCD$.

C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Vậy chọn **A.**

Bài 2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

III. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Vectơ chỉ phương của đường thẳng:**

   Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng *d* nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng *d*.

2. **Góc giữa hai đường thẳng:**

✓ Cho $a//a'$, $b//b'$ và a', b' cùng đi qua một điểm. Khi đó: $\left(\widehat{a,b}\right)=\left(\widehat{a',b'}\right)$

✓ Giả sử $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng a, b và $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\varphi$.

Khi đó: $\left(\widehat{a,b}\right)=\begin{cases}\varphi & \left(0^0\le\varphi\le 90^0\right)\\ 180^0-\varphi & \left(90^0<\varphi\le 180^0\right)\end{cases}$

✓ Nếu $a//b$ hoặc $a\equiv b$ thì $\left(\widehat{a,b}\right)=0^0$.

3. **Hai đường thẳng vuông góc:**

✓ $a\perp b\Leftrightarrow\left(\widehat{a,b}\right)=90^0$.

✓ Giả sử $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng a, b. Khi đó: $a\perp b\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

✓ Cho $a//b$. Nếu $a\perp c$ thì $b\perp c$.

Lưu ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau chỉ có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

IV. KỸ NĂNG CƠ BẢN :

Xác định góc giữa hai đường thẳng, chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Ví dụ :Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. $A'C'\perp BD$. **B.** $BB'\perp BD$. **C.** $A'B\perp DC'$. **D.** $BC'\perp A'D$.

Hướng dẫn

Theo tính chất hình hộp, các cạnh bên vuông góc các cạnh đáy nên $BB'\perp BD$

Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

V. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa:** $d\perp(\alpha)\Leftrightarrow d\perp a,\ \forall a\subset(\alpha)$

2. **Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:** $\begin{cases}d\perp a\\ d\perp b\\ a,b\subset(\alpha)\\ a\cap b=I\end{cases}\Rightarrow d\perp(\alpha)$

3. **Tính chất:**

✓ Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng: là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng đó. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp tất cả các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

✓ $\begin{cases}a\in b\\ \left(\alpha\right)\perp a\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha\right)\perp b$

✓ $\begin{cases}a\ne b\\ a\perp\left(\alpha\right)\Rightarrow a//b\\ b\perp\left(\alpha\right)\end{cases}$

✓ $\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\ a\perp(\alpha)\end{cases}\Rightarrow a\perp(\beta)$

✓ $\begin{cases}(\alpha)\neq(\beta)\\ (\alpha)\perp a\\ (\beta)\perp a\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$

✓ $\begin{cases}a//(\alpha)\\ b\perp(\alpha)\end{cases}\Rightarrow b\perp a$

✓ $\begin{cases}a\not\subset(\alpha)\\ a\perp b\\ (\alpha)\perp b\end{cases}\Rightarrow a//(\alpha)$

4. Định lý ba đường vuông góc:

Cho $a\subset(\alpha)$ và $b\not\subset(\alpha)$, b' là hình chiếu của b lên (α). Khi đó: $a\perp b\Leftrightarrow a\perp b'$

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

✓ Nếu d vuông góc với (α) thì góc giữa d và (α) là 90^0.

✓ Nếu d không vuông góc với (α) thì góc giữa d và (α) là thì góc giữa d và d' với d' là hình chiếu của d trên (α).

✓ Chú ý: góc giữa d và (α) là φ thì $0^0\le\varphi\le 90^0$.

VI. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Ví dụ : Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. Nếu đường thẳng $d\perp(\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d\perp(\alpha)$.

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

D. Nếu $d\perp(\alpha)$ và đường thẳng $a\,\|\,(\alpha)$ thì $d\perp a$.

Hướng dẫn :

A. Đúng vì $d\perp(\alpha)\Leftrightarrow d\perp a,\ \forall a\subset(\alpha)$.

B. Sai vì Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì $d\perp(\alpha)$.

C. Đúng vì $\begin{cases}d\perp a\\ d\perp b\\ a,b\subset(\alpha)\\ a\cap b=I\end{cases}\Rightarrow d\perp(\alpha)\Leftrightarrow d\perp c,\ \forall c\subset(\alpha)$.

D. Đúng vì $\begin{cases} a//(\alpha) \\ d\perp(\alpha) \end{cases} \Rightarrow d\perp a$

Bài 4. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

VII.KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Góc giữa hai mặt phẳng:

✓ Nếu $\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{cases}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

✓ Giả sử $(\alpha)\cap(\beta)=d$. Từ điểm $I\in d$, dựng $\begin{cases} a\perp d, a\subset(\alpha) \\ b\perp d, b\subset(\beta) \end{cases}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

✓ Chú ý: Gọi góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là φ thì $\varphi\in\left[0^0;90^0\right]$.

2. Diện tích hình chiếu của một đa giác:

Gọi S là diện tích của đa giác $\mathcal{H}$ nằm trong (α) và S' là diện tích của đa giác $\mathcal{H}'$ là hình chiếu vuông góc của đa giác $\mathcal{H}$ lên (β). Khi đó $S'=S.\cos\varphi$ với φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

3. Hai mặt phẳng vuông góc:

Nếu hai mặt phẳng (α) vuông góc mặt phẳng (β) thì góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) bằng 90^0.

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau: $\begin{cases} a\subset(\alpha) \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$

4. Tính chất:

✓ $\begin{cases} (\alpha)\perp(\beta) \\ (\alpha)\cap(\beta)=d \\ a\subset(\alpha) \\ a\perp d \end{cases} \Rightarrow a\perp(\beta)$

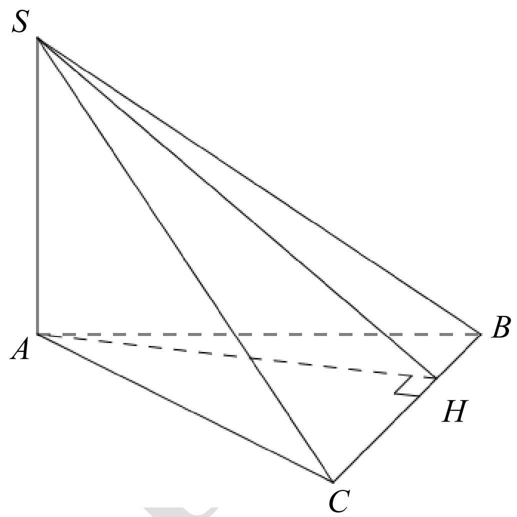
✓ $\begin{cases} (\alpha)\perp(\beta) \\ A\in(\alpha) \\ A\in a \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow a\subset(\alpha)$

✓ $\begin{cases} (\alpha)\perp(\gamma) \\ (\beta)\perp(\gamma) \\ (\alpha)\cap(\beta)=d \end{cases} \Rightarrow d\perp(\gamma)$

VIII. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Dạng 1 : Góc giữa hai mặt phẳng

Ví dụ : Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và đáy là tam giác vuông ở A. Khẳng định nào sau đây ***sai***?



A. $(SAB)\perp(ABC)$.

B. $(SAB)\perp(SAC)$.

C. Vẽ $AH\perp BC$, $H\in BC$ thì góc $\angle ASH$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc $\angle SCB$.

Hướng dẫn :

A. Đúng vì $\begin{cases} SA\subset(SAB) \\ SA\perp(ABC) \end{cases} \Rightarrow (SAB)\perp(ABC)$.

B. Đúng vì $\begin{cases} AB\perp AC \\ AB\perp SA \end{cases} \Rightarrow AB\perp(SAC)$, $\begin{cases} AB\subset(SAB) \\ AC\perp(SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAB)\perp(SAC)$

C. Đúng vì $\begin{cases} AH\perp BC \\ AH\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAH) \Rightarrow BC\perp SH\supset(SAH)$.

$\begin{cases} BC\perp AH \\ BC\perp SH \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{(SH;AH)} = \widehat{SHA}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng SH và AH, là góc $\widehat{SHA}$.

D. Sai do cách xác định như câu **C.**

BÀI TẬP

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Trong không gian cho tứ diện đều $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***:

A. $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 2. Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó 4 vectơ nào sau đây đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{DD'}$.

C. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$. **D.** $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chọn mệnh đề ***đúng***:

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. **B.** $\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})$. **D.** . $\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 4. Trong không gian cho hai đường thẳng a và b lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}, \vec{v}$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng a và b. Khẳng định nào sau đây là ***đúng***:

A. $\alpha = \left|(\vec{u}, \vec{v})\right|$.

B. $\cos\alpha = \left|\cos(\vec{u}, \vec{v})\right|$.

C. Nếu a và b vuông góc với nhau thì $\vec{u}.\vec{v} = \sin\alpha$.

D. Nếu a và b vuông góc với nhau thì $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Câu 5. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào ***sai***?

A. Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ thì bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng

B. Tam giác ABC có I là trung điểm cạnh BC thì ta có đẳng thức: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

C. Vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ nên suy ra B là trung điểm của AC

D. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}$ nên 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Chọn mệnh đề ***đúng***:

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})$. **B.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. **D.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 7. Cho tứ diện đều $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây là ***sai?***

A. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC} = \vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Câu 8. Trong không gian cho 3 vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ không đồng phẳng. Mệnh đề nào sau đây là ***đúng***?

A. Các vectơ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

B. Các vectơ $\vec{u} + \vec{v}, -2\vec{u}, 2\vec{w}$ đồng phẳng.