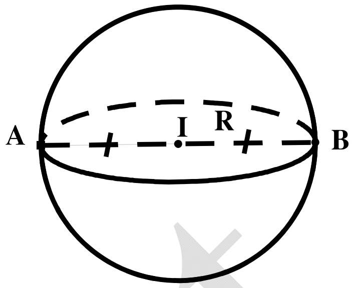
CHỦ ĐỀ. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Định nghĩa:

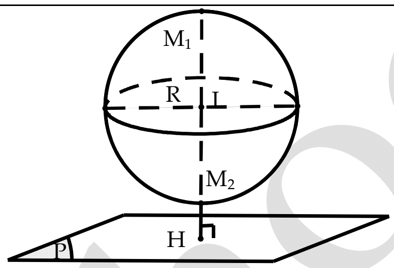
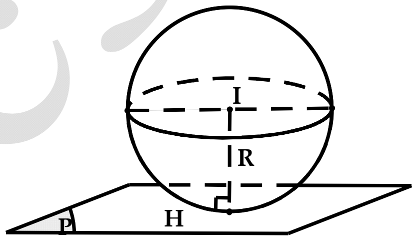
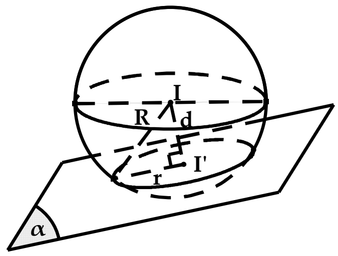
Cho điểm I cố định và một số thực dương R. Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R.

Kí hiệu: $S(I;R) \Rightarrow S(I;R) = \{M / IM = R\}$



Dạng 1 : **Phương trình chính tắc**	*Dạng 2 :* **Phương trình tổng quát**
Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R>0$. $\boxed{(S):\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$	$\boxed{(S):\ x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$ (2) $\Rightarrow$ *Điều kiện để phương trình (2) là phương trình mặt cầu:* $\boxed{a^2+b^2+c^2-d>0}$ • (S) có tâm $I(a;b;c)$. • (S) có bán kính: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

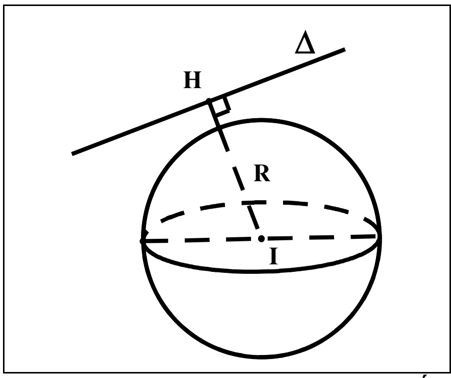
3/ Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng :

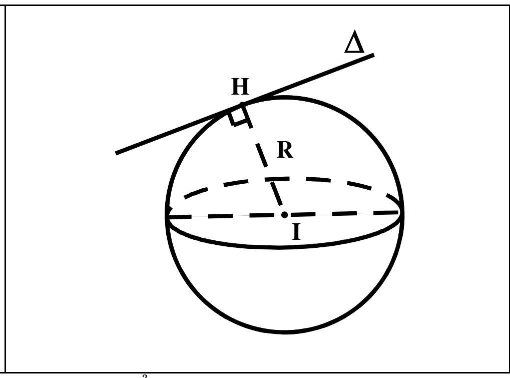
Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) $\Rightarrow$ $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó :		
+ Nếu $d>R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	+ Nếu $d=R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó: (P) là mặt phẳng *tiếp diện* của mặt cầu và H là *tiếp điểm.*	+ Nếu $d<R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$
		

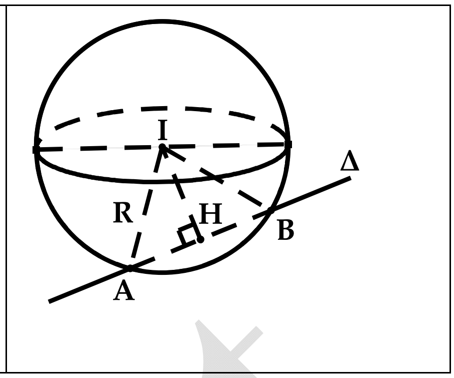
Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là *mặt phẳng kính* và thiết diện lúc đó được gọi là *đường tròn lớn.*

4/ Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng :

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó :		
+ $IH>R$: Δ không cắt mặt cầu.	+ $IH=R$: Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ là *tiếp tuyến* của (S) và H là *tiếp điểm.*	+ $IH<R$: Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.







* **Lưu ý:** Trong trường hợp Δ cắt (*S*) tại 2 điểm *A, B* thì bán kính *R* của (*S*) được tính như sau:

+ Xác định: $\boxed{d(I;\Delta) = IH.}$

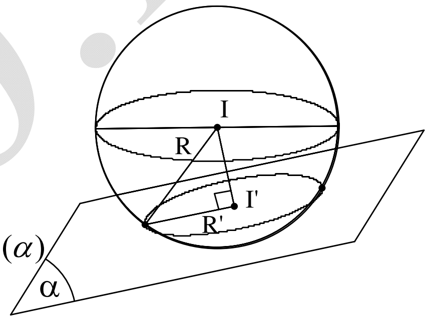
+ Lúc đó: $\boxed{R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}}$

ĐƯỜNG TRÒN TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

* Đường tròn (*C*) trong không gian *Oxyz*, được xem là giao tuyến của (*S*) và mặt phẳng (α).

$(S):\ x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$(\alpha):\ Ax + By + Cz + D = 0$



* <u>Xác định tâm *I'* và bán kính *R'* của (*C*).</u>

+ Tâm $I' = d \cap (\alpha)$.

Trong đó d *là đường thẳng đi qua* I *và vuông góc với mp* (α)

+ Bán kính $\boxed{R' = \sqrt{R^2 - (II')^2} = \sqrt{R^2 - \left[d\left(I;(\alpha)\right)\right]^2}}$

5/ Điều kiện tiếp xúc : Cho mặt cầu (*S*) tâm *I*, bán kính *R*.

+ Đường thẳng Δ là *tiếp tuyến* của (*S*) $\Leftrightarrow$ $\boxed{d(I;\Delta) = R.}$

+ Mặt phẳng (α) là *tiếp diện* của (*S*) $\Leftrightarrow$ $\boxed{d(I;(\alpha)) = R.}$

* **Lưu ý:** Tìm <u>*tiếp điểm*</u> $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Sử dụng tính chất : $\left[\begin{array}{l} IM_0 \perp d \\ IM_0 \perp (\alpha) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{IM_0} \perp \vec{a}_d \\ \overrightarrow{IM_0} \perp \vec{n}_\alpha \end{array}\right.$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Dạng 1: **VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU**

Phương pháp:

* **Thuật toán 1**: Bước 1: Xác định tâm $I(a;b;c)$.

Bước 2: Xác định bán kính R của (S).

Bước 3: Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

$$\boxed{(S):\quad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

* **Thuật toán 2:** Gọi phương trình $\boxed{(S):\ x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$

Phương trình (S) *hoàn toàn xác định* nếu biết được $a,\ b,\ c,\ d$. $(a^2+b^2+c^2-d>0)$

Bài tập 1 : Viết phương trình mặt cầu (S), trong các trường hợp sau:

a) (S) có tâm $I(2;2;-3)$ và bán kính $R=3$.

b) (S) có tâm $I(1;2;0)$ và (S) qua $P(2;-2;1)$.

c) (S) có đường kính AB với $A(1;3;1)$, $B(-2;0;1)$.

Bài giải:

a) Mặt cầu tâm $I(2;2;-3)$ và bán kính $R=3$, có phương trình:

$$(S):\ (x-2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$$

b) Ta có: $\overrightarrow{IP}=(1;-4;1)\Rightarrow IP=3\sqrt{2}$.

Mặt cầu tâm $I(1;2;0)$ và bán kính $R=IP=3\sqrt{2}$, có phương trình:

$$(S):\ (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=18$$

c) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;0)\Rightarrow AB=3\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$.

Mặt cầu tâm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$ và bán kính $R=\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, có phương trình:

$$(S):\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{9}{2}.$$

Bài tập 2 : Viết phương trình mặt cầu (S), trong các trường hợp sau:

a) (S) qua $A(3;1;0)$, $B(5;5;0)$ và tâm I thuộc trục Ox.

b) (S) có tâm O và tiếp xúc mặt phẳng (α): $16x-15y-12z+75=0$.

c) (S) có tâm $I(-1;2;0)$ và có một tiếp tuyến là đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-3}$.

Bài giải:

a) Gọi $I(a;0;0)\in Ox$. Ta có : $\overrightarrow{IA}=(3-a;1;0)$, $\overrightarrow{IB}=(5-a;5;0)$.

Do (*S*) đi qua *A, B* $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(3-a)^2+1} = \sqrt{(5-a)^2+25} \Leftrightarrow 4a = 40 \Leftrightarrow a = 10$

$\Rightarrow I(10;0;0)$ và $IA = 5\sqrt{2}$.

Mặt cầu tâm $I(10;0;0)$ và bán kính $R = 5\sqrt{2}$, có phương trình (*S*) : $(x-10)^2 + y^2 + z^2 = 50$

b) Do (*S*) tiếp xúc với $(\alpha) \Leftrightarrow \mathrm{d}(O,(\alpha)) = R \Leftrightarrow R = \frac{75}{25} = 3$.

Mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 3$, có phương trình (*S*) : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

c) Chọn $A(-1;1;0) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (0;-1;0)$.

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (-1;1;-3)$. Ta có: $\left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}_\Delta\right] = (3;0;-1)$.

Do (*S*) tiếp xúc với $\Delta \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,\Delta) = R \Leftrightarrow R = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}_\Delta\right]\right|}{|\vec{u}_\Delta|} = \frac{\sqrt{10}}{11}$.

Mặt cầu tâm $I(-1;2;0)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{10}}{11}$, có phương trình (*S*) : $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{10}{121}$.

Bài tập 3 : Viết phương trình mặt cầu (*S*) biết :

a) (*S*) qua bốn điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$, $D(1;0;4)$.

b) (*S*) qua $A(0;8;0)$, $B(4;6;2)$, $C(0;12;4)$ và có tâm *I* thuộc mặt phẳng (*Oyz*).

Bài giải:

a) **Cách 1:** Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu (*S*) cần tìm.

Theo giả thiết: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + 7z = -2 \\ y - 4z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

Do đó: $I(-2;1;0)$ và $R = IA = \sqrt{26}$. Vậy (*S*) : $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$.

Cách 2: Gọi phương trình mặt cầu (*S*) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $\left(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0\right)$.

Do $A(1;2;-4) \in (S) \Leftrightarrow \quad -2a - 4b + 8c + d = -21 \quad (1)$

Tương tự: $B(1;-3;1) \in (S) \Leftrightarrow -2a + 6b - 2c + d = -11 \quad (2)$

$C(2;2;3) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b - 6c + d = -17 \quad (3)$

$D(1;0;4) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 8c + d = -17 \quad (4)$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có $a,\ b,\ c,\ d$, suy ra phương trình mặt cầu (*S*) :

$(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$.

b) Do tâm *I* của mặt cầu nằm trên mặt phẳng (*Oyz*) $\Rightarrow I(0;b;c)$.

Ta có: $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}$.

Vậy $I\left(0;7;5\right)$ và $R=\sqrt{26}$. Vậy (*S*): $x^2+\left(y-7\right)^2+\left(z-5\right)^2=26$.

Bài tập 4: Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm *I* thuộc đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$ và (*S*) tiếp xúc với hai mặt phẳng $\left(\alpha\right)$: $x+2y+2z+3=0$ và $\left(\beta\right)$: $x+2y+2z+7=0$.

Bài giải:

Gọi $I\left(t;-1;-t\right)\in\Delta$ là tâm mặt cầu (*S*) cần tìm.

Theo giả thiết: $d\left(I,\left(\alpha\right)\right)=d\left(I,\left(\beta\right)\right)\Leftrightarrow\frac{\left|1-t\right|}{3}=\frac{\left|5-t\right|}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-t=5-t\\1-t=t-5\end{array}\right.\Rightarrow t=3$.

Suy ra: $I\left(3;-1;-3\right)$ và $R=\mathrm{d}\left(I,\left(\alpha\right)\right)=\frac{2}{3}$. Vậy (*S*) : $\left(x-3\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z+3\right)^2=\frac{4}{9}$.

Bài tập 5: Lập phương trình mặt cầu (*S*) qua 2 điểm $A\left(2;6;0\right)$, $B\left(4;0;8\right)$ và có tâm thuộc *d*: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+5}{1}$.

Bài giải:

Ta có $d:\begin{cases}x=1-t\\y=2t\\z=-5+t\end{cases}$. Gọi $I\left(1-t;2t;-5+t\right)\in d$ là tâm của mặt cầu (*S*) cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{IA}=\left(1+t;6-2t;5-t\right)$, $\overrightarrow{IB}=\left(3+t;-2t;13-t\right)$.

Theo giả thiết, do (*S*) đi qua *A, B* $\Leftrightarrow$ *AI* = *BI*

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(1+t\right)^2+\left(6-2t\right)^2+\left(5-t\right)^2}=\sqrt{\left(3+t\right)^2+4t^2+\left(13-t\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 62-32t=178-20t\Leftrightarrow 12t=-116\Leftrightarrow t=-\frac{29}{3}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{32}{3};-\frac{58}{3};-\frac{44}{3}\right)$$ và $R=IA=2\sqrt{233}$. Vậy (S): $\left(x-\frac{32}{3}\right)^2+\left(y+\frac{58}{3}\right)^2+\left(z+\frac{44}{3}\right)^2=932$.

Bài tập 6: Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm $I\left(2;3;-1\right)$ và cắt đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z}{1}$ tại hai điểm *A, B* với $AB=16$.

Bài giải:

Chọn $M\left(-1;1;0\right)\in\Delta\Rightarrow\overrightarrow{IM}=\left(-3;-2;1\right)$. Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta=\left(1;-4;1\right)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_\Delta\right]=\left(2;4;14\right)\Rightarrow\mathrm{d}\left(I,\Delta\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_\Delta\right]\right|}{\left|\vec{u}_\Delta\right|}=2\sqrt{3}$.

Gọi *R* là bán kính mặt cầu (*S*). Theo giả thiết : $R=\sqrt{\left[\mathrm{d}\left(I,\Delta\right)\right]^2+\frac{AB^2}{4}}=2\sqrt{19}$.

Vậy (*S*): $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=76$.

Bài tập 7: Cho hai mặt phẳng (P): $5x-4y+z-6=0$, (Q): $2x-y+z+7=0$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{7}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm *I* là giao điểm của (*P*) và Δ sao cho (*Q*) cắt (*S*) theo một hình tròn có diện tích là 20π.

Bài giải:

Ta có $\Delta:\begin{cases}x=1+7t\\y=3t\\z=1-2t\end{cases}$. Tọa độ *I* là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=1+7t & (1)\\y=3t & (2)\\z=1-2t & (3)\\5x-4y+z-6=0 & (4)\end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $5(1+7t)-4(3t)+(1-2t)-6=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow I(1;0;1)$.

Ta có : $d(I,(Q))=\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

Gọi *r* là bán kính đường tròn giao tuyến của (*S*) và mặt phẳng (*Q*). Ta có: $20\pi=\pi r^2\Leftrightarrow r=2\sqrt{5}$.

R là bán kính mặt cầu (*S*) cần tìm.

Theo giả thiết: $R=\sqrt{\left[d(I,(Q))\right]^2+r^2}=\frac{\sqrt{330}}{3}$. Vậy (*S*) : $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\frac{110}{3}$.

Bài tập 8: Cho mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\y=2t-1\\z=t+2\end{cases}$.

Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm *I* thuộc d và *I* cách (*P*) một khoảng bằng 2 và (*S*) cắt (*P*) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3.

Bài giải:

Gọi $I(-t;2t-1;t+2)\in d$: là tâm của mặt cầu (*S*) và *R* là bán kính của (*S*).

Theo giả thiết : $R=\sqrt{\left[d(I;(P))\right]^2+r^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Mặt khác: $d(I;(P))=2\Leftrightarrow\frac{|-2t-2t+1-2t-4-2|}{\sqrt{4+1+4}}=2\Leftrightarrow|6t+5|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{6}\\t=-\frac{11}{6}\end{array}\right.$

* Với $t=\frac{1}{6}$: Tâm $I_1\left(-\frac{1}{6};-\frac{2}{3};\frac{13}{6}\right)$, suy ra (S_1): $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(z-\frac{13}{6}\right)^2=13$.

* Với $t=-\frac{11}{6}$: Tâm $I_2\left(\frac{11}{6};-\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)$, suy ra (S_2): $\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{6}\right)^2=13$.

Bài tập 9: Cho điểm $I(1;0;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt cầu (*S*) tâm *I* và cắt d tại hai điểm *A, B* sao cho ΔIAB vuông tại *I*.

Bài giải :

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$ và $P(1;-1;1)\in d$.

Ta có: $\overrightarrow{IP}=(0;-1;-2)\Rightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{IP}\right]=(0;-4;-2)$. Suy ra: $\mathrm{d}(I;d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IP}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{20}}{3}$.

Gọi R là bán kính của (S). Theo giả thiết, ΔIAB vuông tại I

$$\Rightarrow\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{2}{R^2}\Leftrightarrow R=\sqrt{2}IH=\sqrt{2}\mathrm{d}(I,d)=\frac{\sqrt{40}}{3}$$

Vậy (S) : $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{40}{9}$.

Bài tập 10: (Khối A- 2011) Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Bài giải :

(S) có tâm $I(2;2;2)$, bán kính $R=2\sqrt{3}$. *Nhận xét:* điểm O và A cùng thuộc (S).

Tam giác OAB đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R'=\dfrac{OA}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Khoảng cách : $d(I;(P))=\sqrt{R^2-(R')^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Mặt phẳng (P) đi qua O có phương trình dạng : $ax+by+cz=0\ \left(a^2+b^2+c^2>0\right)\ (*)$

Do (P) đi qua A, suy ra: $4a+4b=0\Leftrightarrow b=-a$.

Lúc đó: $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|2(a+b+c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}}\Rightarrow\dfrac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 2a^2+c^2=3c^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=a\\c=-1\end{array}\right.$. Theo (*), suy ra $(P): x-y+z=0$ hoặc $x-y-z=0$.

Chú ý: ***Kỹ năng xác định tâm và bán kính của đường tròn trong không gian.***

Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R. Mặt phẳng (P) cắt (S) theo một đường tròn (C).

<u>Bước 1:</u> Lập phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P).

<u>Bước 2:</u> Tâm I' của đường tròn (C) là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

<u>Bước 3:</u> Gọi r là bán kính của (C): $\boxed{r=\sqrt{R^2-\left[d(I;(P))\right]^2}}$

Bài tập 11: Chứng minh rằng: Mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ cắt mặt phẳng (P): $x-2=0$ theo giao tuyến là một đường tròn (C). Xác định tâm và bán kính của (C).

Bài giải :

* Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có : $\mathrm{d}(I,(P))=1<2=R\Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là 1 đường tròn. (đ.p.c.m)

* Đường thẳng d qua $I(1;0;0)$ và vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_P=(1;0;0)$ làm 1 vectơ chỉ phương, có phương trình $d:\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

+ Tọa độ tâm I' đường tròn là nghiệm của hệ : $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=0\\x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=0\end{cases}\Rightarrow I'(2;0;0)$.

+ Ta có: $d(I,(P))=1$. Gọi r là bán kính của (C), ta có : $r=\sqrt{R^2-\left[d(I,(P))\right]^2}=\sqrt{3}$.

Dạng 2 : **SỰ TƯƠNG GIAO VÀ SỰ TIẾP XÚC**

Phương pháp: *** Các điều kiện tiếp xúc**:

+ Đường thẳng Δ là *tiếp tuyến* của (S) $\Leftrightarrow$ $d(I;\Delta)=R$.

+ Mặt phẳng (α) là *tiếp diện* của (S) $\Leftrightarrow$ $d(I;(\alpha))=R$.

** Lưu ý các dạng toán liên quan như tìm tiếp điểm, tương giao.*

Bài tập 1: Cho đường thẳng $(\Delta):\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Số điểm chung của (Δ) và (S) là :

A. 0.B.1.C.2.D.3.

Bài giải:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(0;1;2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $\overrightarrow{MI}=(1;-1;-4)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]=(-5;7;-3)\Rightarrow d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{498}}{6}$

Vì $d(I,\Delta)>R$ nên (Δ) không cắt mặt cầu (S).

Lựa chọn đáp án **A**.

Bài tập 2: Cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=\sqrt{10}$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=10$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2(z+3)^2=10$.
D. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=9$.

Bài giải:

Gọi M là hình chiếu của $I(1;-2;3)$ lên Oy, ta có : $M(0;-2;0)$.

$\overrightarrow{IM}=(-1;0;-3)\Rightarrow R=d(I,Oy)=IM=\sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm.

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=10$.

Lựa chọn đáp án **B**.

Bài tập 3: Cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng *d* có phương trình $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm *I*, tiếp xúc với *d* là:

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=50$. B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5\sqrt{2}$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=5\sqrt{2}$. D. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$.

Bài giải:

Đường thẳng (d) đi qua $I(-1;2;-3)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;1;-1)\Rightarrow d(A,d)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=5\sqrt{2}$

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=50$.

Lựa chọn đáp án **D**.

Bài tập 4: Mặt cầu (S) tâm $I(2;3;-1)$ cắt đường thẳng $d:\frac{x-11}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+25}{-2}$ tại 2 điểm *A, B* sao cho $AB=16$ có phương trình là:

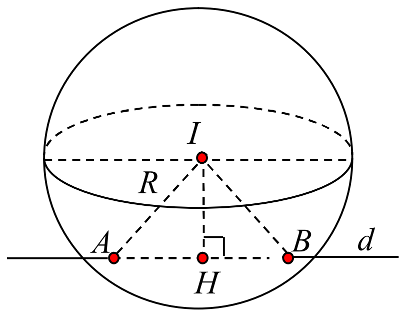
A. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$. B. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=289$.

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$. D. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=280$.

Bài giải:

Đường thẳng (d) đi qua $M(11;\ 0;-25)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-2)$.

Gọi *H* là hình chiếu của I trên (d). Ta có:



$IH=d(I,AB)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=15\ \Rightarrow R=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=17$.

Vậy (S) : $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.

Lựa chọn đáp án **C**.

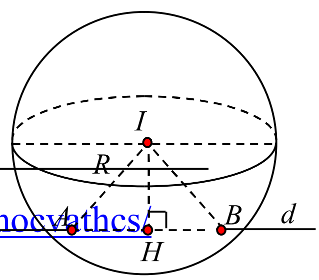
Bài tập 5: Cho đường thẳng $d:\frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z}{1}$ và điểm $I(4;1;6)$. Đường thẳng *d* cắt mặt cầu (S) có tâm *I*, tại hai điểm *A, B* sao cho $AB=6$. Phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18$. B. $(x+4)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=18$.

C. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=9$. D. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=16$.

Bài giải :

Đường thẳng *d* đi qua $M(-5;7;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-2;1)$. Gọi *H* là hình chiếu của *I* trên (*d*). Ta có :



$IH = d(I, AB) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|} = 3 \Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = 18$

Vậy $(S): (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$.

Lựa chọn đáp án **A**.

Bài tập 8: Cho điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm *A, B* sao cho tam giác *IAB* đều là:

A. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{20}{3}$.	B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{20}{3}$.

C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{16}{4}$.	D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{5}{3}$.

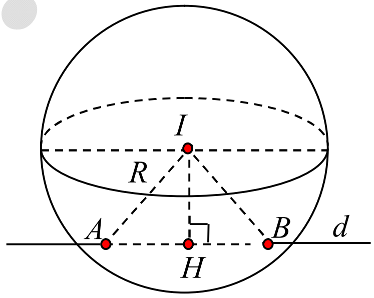
Bài giải:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M = (1;1;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;1)$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (0;-1;2)$ và $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right] = (5;-2;-1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Ta có :

$IH = d(I, AB) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \sqrt{5}$.



Xét tam giác *IAB*, có $IH = R.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \dfrac{2IH}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{20}{3}$.

Lựa chọn đáp án **A**.

Bài tập 9: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 5 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của mặt cầu (*S*) qua $A(0;0;5)$ biết:

a) Tiếp tuyến có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;2)$.

b) Vuông góc với mặt phẳng (*P*) : $3x - 2y + 2z + 3 = 0$.

Bài giải:

a) Đường thẳng *d* qua $A(0;0;5)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;2)$, có phương trình *d*: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$.

b) Mặt phẳng (*P*) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (3;-2;2)$.

Đường thẳng *d* qua $A(0;0;5)$ và vuông góc với mặt phẳng (*P*) nên có một vectơ chỉ phương $\vec{n}_P=(3;-2;2)$,

có phương trình *d*: $\begin{cases} x=3t \\ y=-2t \\ z=2t+5 \end{cases}$.

Bài tập 10: Cho $(S): x^2+y^2+z^2-6x-6y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$; $\Delta_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) song song với Δ_1 và Δ_2 đồng thời tiếp xúc với (*S*).

Bài giải:

Mặt cầu (*S*) có tâm $I(3;3;-1)$, $R=4$.

Ta có: Δ_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(3;2;2)$.

Δ_2 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(2;2;1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp của mặt phẳng (*P*).

Do: $\begin{cases} (P)//\Delta_1 \\ (P)//\Delta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}\perp\vec{u}_1 \\ \vec{n}\perp\vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-2;-1;2)$

Lúc đó, mặt phẳng (*P*) có dạng : $-2x-y+2z+m=0$.

Để mặt phẳng (*P*) tiếp xúc với (*S*) $\Leftrightarrow d(I;(P))=R \Leftrightarrow \dfrac{|5+m|}{3}=4$

$\Leftrightarrow |5+m|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7 \\ m=-17 \end{array}\right.$.

<u>Kết luận:</u> Vậy tồn tại 2 mặt phẳng là : $-2x-y+2z+7=0$, $-2x-y+2z-17=0$.

Bài tập 11: Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$, biết tiếp diện:

a) qua $M(1;1;1)$.

b) song song với mặt phẳng $(P): x+2y-2z-1=0$.

b) vuông góc với đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

Bài giải:

Mặt cầu (*S*) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=3$.

a) Để ý rằng, $M\in(S)$. Tiếp diện tại *M* có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}=(2;-1;-2)$, có phương trình :

(α): $2(x-1)-(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-2z+1=0.$

b) Do mặt phẳng $(\alpha)//(P)$ nên (α) có dạng : $x+2y-2z+m=0$.

Do (α) tiếp xúc với (*S*) $\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\alpha))=R \Leftrightarrow \dfrac{|m-3|}{3}=3 \Leftrightarrow |m-3|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-6 \\ m=12 \end{array}\right.$.

* Với $m=-6$ suy ra mặt phẳng có phương trình : $x+2y-2z-6=0$.