PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Với hình lập phương hoặc hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

Với hình lập phương .

Chọn hệ trục tọa độ sao cho :

$A(0;0;0)$; $B(a;0;0)$; $C(a;a;0)$; $D(0;a;0)$

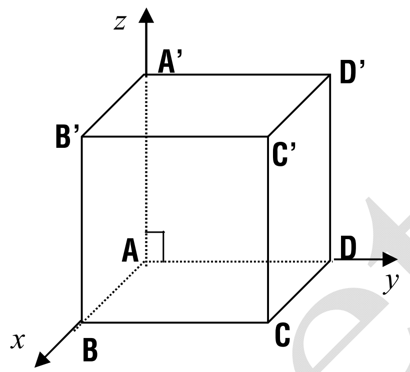
$A'(0;0;a)$; $B'(a;0;a)$; $C'(a;a;a)$; $D'(0;a;a)$

Với hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho :

$A(0;0;0)$; $B(a;0;0)$; $C(a;b;0)$; $D(0;b;0)$

$A'(0;0;c)$; $B'(a;0;c)$; $C'(a;b;c)$; $D'(0;b;c)$

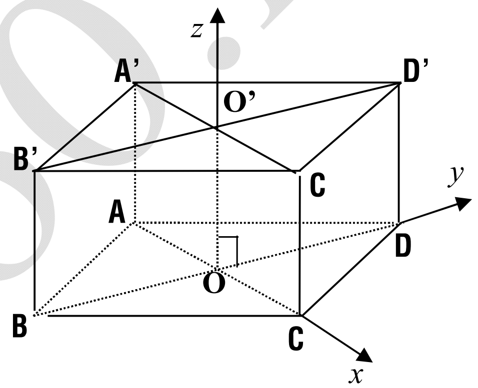


Với hình hộp đáy là hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$

Chọn hệ trục tọa độ sao cho :

- Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi ABCD

- Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy



Với hình chóp tứ giác đều S.ABCD

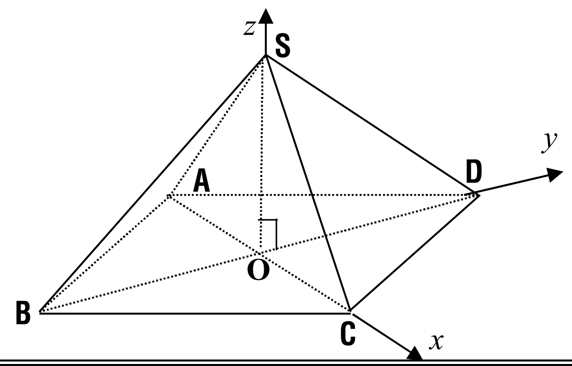
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Giả sử cạnh hình vuông bằng a và đường cao $SO = h$

Chọn O(0;0;0) là tâm của hình vuông

Khi đó : $A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right);C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

$B\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right);D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right);S(0;0;h)$



Với hình chóp tam giác đều S.ABC

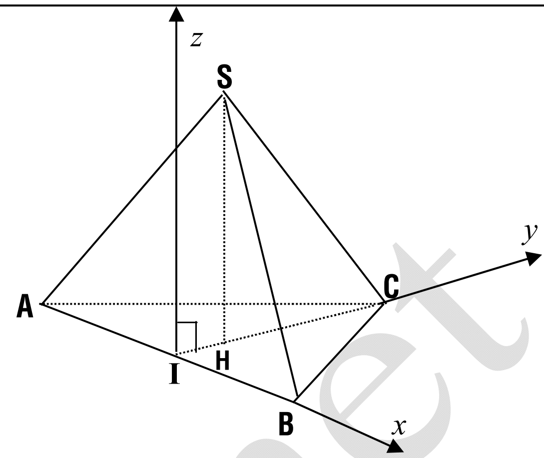
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Giả sử cạnh tam giác đều bằng a và đường cao bằng h. Gọi I là trung điểm của BC

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho I(0;0;0)

Khi đó : $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$; $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$

$C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$; $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h\right)$



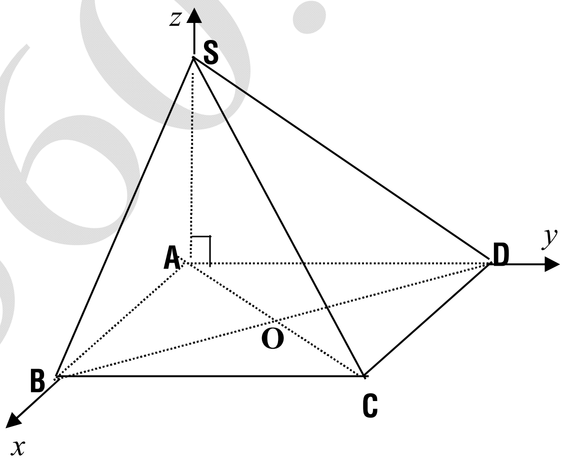
Với hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật và SA $\perp$(ABCD)

ABCD là hình chữ nhật $AB = a; AD = b$ chiều cao bằng h

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho A(0;0;0)

Khi đó : $B(a;0;0)$; $C(a;b;0)$

$D(0;b;0)$; $S(0;0;h)$

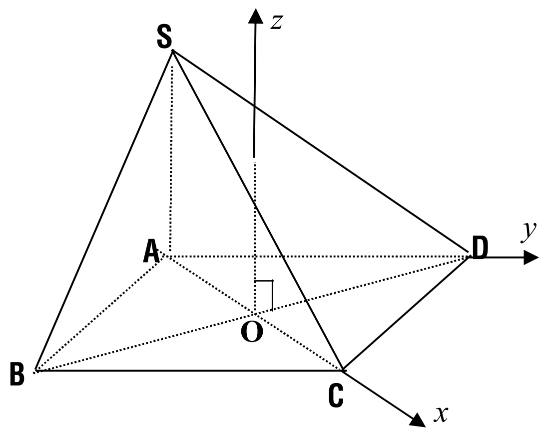


Với hình chóp S.ABC có ABCD là hình thoi và SA $\perp$(ABCD)

ABCD là hình thoi cạnh a

chiều cao bằng h

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho O(0;0;0)



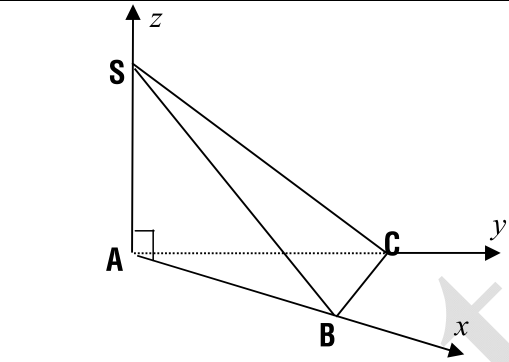
Với hình chóp S.ABC có SA $\perp$(ABC) và Δ ABC vuông tại A

Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a; AC = b$ đường cao bằng h.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho A(0;0;0)

Khi đó : $B(a;0;0)$; $C(0;b;0)$

$S(0;0;h)$



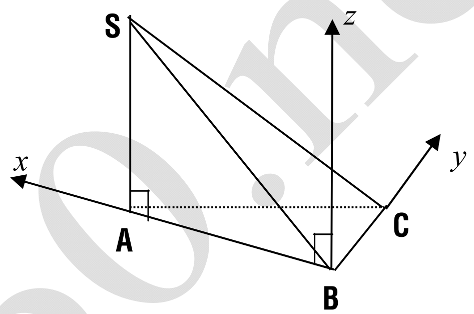
Với hình chóp S.ABC có SA $\perp$(ABC) và Δ ABC vuông tại B

Tam giác ABC vuông tại B có $BA = a; BC = b$ đường cao bằng h.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho B(0;0;0)

Khi đó : $A(a;0;0)$; $C(0;b;0)$

$S(a;0;h)$



Với hình chóp S.ABC có (SAB) $\perp$(ABC), Δ SAB cân tại S và Δ ABC vuông tại C

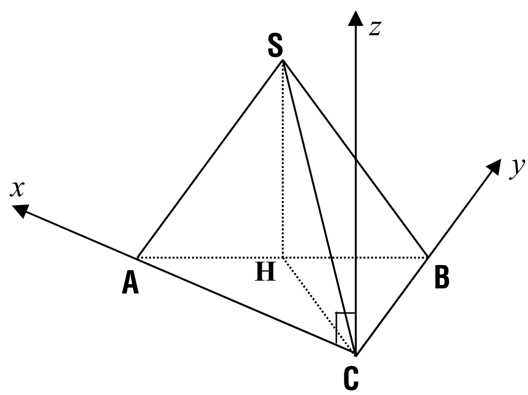
Δ ABC vuông tại C $CA = a; CB = b$ chiều cao bằng h

H là trung điểm của AB

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho C(0;0;0)

Khi đó : $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$

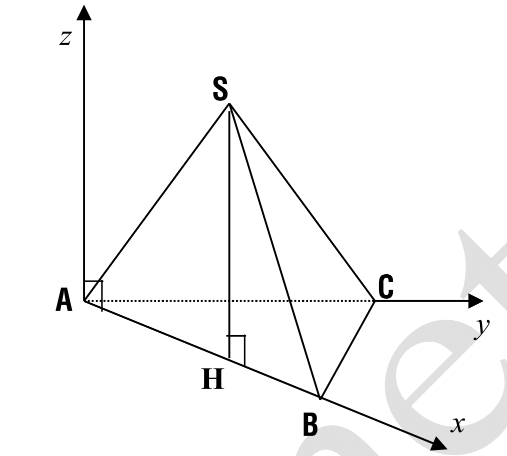
$S(\frac{a}{2};\frac{b}{2};h)$



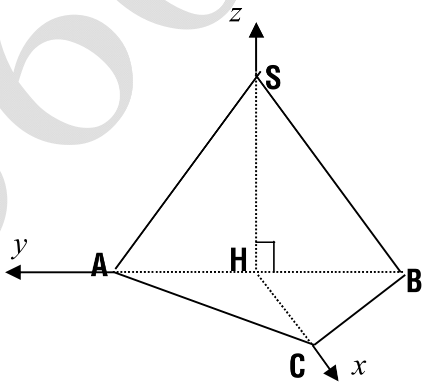
<table>
<tr><th colspan="2">Với hình chóp S.ABC có (SAB) $\perp$(ABC), Δ SAB cân tại S
và Δ ABC vuông tại A</th></tr>
<tr><td>Δ ABC vuông tại A $AB = a; AC = b$
chiều cao bằng h

H là trung điểm của AB

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho A(0;0;0)

Khi đó : $B(a;0;0)$; $C(0;b;0)$
$S(0;\frac{a}{2};h)$</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">Với hình chóp S.ABC có (SAB) $\perp$(ABC), Δ SAB cân tại S
và Δ ABC vuông cân tại C</th></tr>
<tr><td>Tam giác ABC vuông cân tại C có $CA = CB = a$ đường cao bằng h.

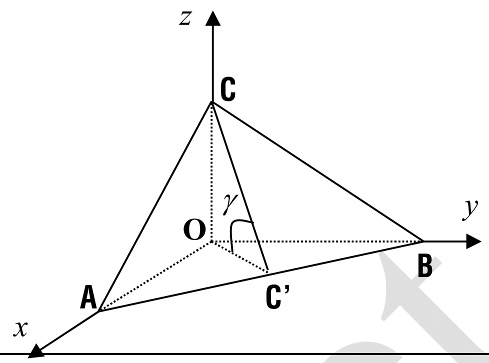
H là trung điểm của AB

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho H(0;0;0)
Khi đó : $C\left(\frac{a}{\sqrt{2}};0;0\right)$; $A\left(0;\frac{a}{\sqrt{2}};0\right)$
$B\left(0;-\frac{a}{\sqrt{2}};0\right)$; $S(0;0;h)$</td><td></td></tr>
</table>

II. Bài tập áp dụng

Bài toán 1. Cho tứ diện OABC có các tam giác OAB,OBC,OCA đều là tam giác vuông tại đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi các mặt phẳng (OBC),(OCA),(OAB) với mặt phẳng (ABC).Chứng minh rằng : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

(SGK Hình 11, trang 96, Văn Như Cương chủ biên, NXBGD 2000, SGK Hình 12, trang 106, Văn Như Cương chủ biên, NXBGD 2000)

Hướng dẫn	Bài giải
Dựng hình : Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $O(0;0;0)$; $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$ $C(0;0;c)$; $\overrightarrow{AB} = (-a\,;b\,;0)$ $\overrightarrow{AC} = (-a\,;0\,;c)$	
Tìm vectơ pháp tuyến của : • Mặt phẳng (ABC) • Mặt phẳng (OBC) • Mặt phẳng (OCA) • Mặt phẳng (OAB)	$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (bc\,;ac\,;ab)$ $\vec{i} = (1,0,0)$ vì : $Ox \perp (OBC)$ $\vec{j} = (0,1,0)$ vì : $Oy \perp (OCA)$ $\vec{k} = (0,0,1)$ vì : $Oz \perp (OAB)$
Sử dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng: $\cos\alpha = \cos((OBC),(ABC))$ $\cos\beta = \cos((OBC),(ABC))$ $\cos\gamma = \cos((OBC),(ABC))$	$\cos\alpha = \dfrac{\lvert b.c\rvert}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$ $\cos\beta = \dfrac{\lvert c.a\rvert}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$ $\cos\gamma = \dfrac{\lvert a.b\rvert}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$
Kết luận	$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} = 1$

Bài toán 2. Bằng phương pháp toạ độ hãy giải bài toán sau :
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.
a.Chứng minh rằng đường chéo $A'C$ vuông góc với mặt phẳng $(AB'D')$
b.Chứng minh rằng giao điểm của đường chéo $A'C$ và mặt phẳng $(AB'D')$ là trọng tâm của tam giác $AB'D'$.
c.Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$
d.Tìm cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(DA'C)$ và $(ABB'A')$
(*SGK Hình 12, trang 112, Văn Như Cương chủ biên, NXBGD 2000*)

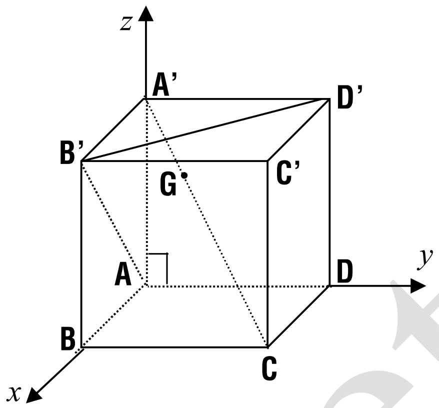
Hướng dẫn	Bài giải

<table>
<tr>
<td>

Dựng hình :

Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $O \equiv A(0;0;0)$;
$A'(0;0;a)$
$B(a;0;0)$; $B'(a;0;a)$
$C(a;a;0)$; $C'(a;a;a)$
$D(0;a;0)$; $D'(0;a;a)$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

a. Chứng minh : $A'C \perp (AB'D')$

Nếu $\begin{cases} A'C \perp AB' \\ A'C \perp AD' \end{cases} \Rightarrow A'C \perp (AB'D')$

</td>
<td>

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{A'C} = (a;a;-a) \\ \overrightarrow{AB'} = (a;0;a) \\ \overrightarrow{AD'} = (0;a;a) \end{cases}$

Vì $\begin{cases} \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AB'} = a^2 + 0 - a^2 = 0 \\ \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD'} = 0 + a^2 - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A'C \perp AB' \\ A'C \perp AD' \end{cases}$

Nên $A'C \perp mp(AB'D')$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

b. Chứng minh : G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$ Phương trình tham số của đường thẳng $A'C$

$A'C : \begin{cases} x = t \\ y = t \quad (t \in R) \\ z = a - t \end{cases}$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(AB'D')$
$(AB'D') : x + y - z = 0$

Trong đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AB'D')$
$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}\right] = (-a^2; -a^2; a^2)$

</td>
<td>

Gọi $G = A'C \cap (AB'D')$ Toạ độ giao điểm G của đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(AB'D')$ là nghiệm của hệ :

$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = a - t \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{3} \\ y = \frac{a}{3} \\ z = \frac{2a}{3} \end{cases} \quad G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2a}{3}\right) \ (1)$

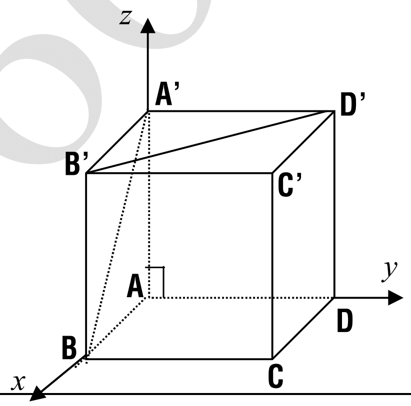
Mặt khác : $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_{B'} + x_{D'}}{3} = \frac{a}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_{B'} + y_{D'}}{3} = \frac{a}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_{B'} + z_{D'}}{3} = \frac{2a}{3} \end{cases}$ (2)

</td>
</tr>
<tr>
<td>So sánh (1) và (2), kết luận</td>
<td>Vậy giao điểm G của đường chéo $A'C$ và mặt phẳng $(AB'D')$ là trọng tâm của tam giác $AB'D'$</td>
</tr>
<tr>
<td>c. Tính $d\left((AB'D'), (C'BD)\right)$</td>
<td>Ta có : $(AB'D') : x + y - z = 0$</td>
</tr>
</table>

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(C'BD)$ $(C'BD): x+y-z-a=0$ Trong đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(C'BD)$ $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{C'B},\overrightarrow{C'D}\right]=(a^2;a^2;-a^2)$	$(C'BD): x+y-z-a=0$ $\Rightarrow (AB'D')\ //\ (C'BD)$ $\Rightarrow d\left((AB'D'),(C'BD)\right)=d\left(B,(AB'D')\right)=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

d. Tính $\cos\left((DA'C),(ABB'A')\right)$ $Oy\perp(ABB'A')\Rightarrow$ Vec tơ pháp tuyến của $(ABB'A')$ là $\vec{j}=(0;1;0)$ Vectơ pháp tuyến của $(DA'C)$: $\overrightarrow{n_3}=\left[\overrightarrow{DA'},\overrightarrow{DC}\right]=(0;a^2;-a^2)=a^2(0;1;-1)$	Vec tơ pháp tuyến của $(ABB'A')$ là $\vec{j}=(0;1;0)$ Vectơ pháp tuyến của $(DA'C)$: $\overrightarrow{n_3}=(0;1;-1)$ $\cos\left((DA'C),(ABB'A')\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \left((DA'C),(ABB'A')\right)=45^o$

Bài toán 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.
Chứng minh hai đường chéo $B'D'$ và $A'B$ của hai mặt bên là hai đường thẳng chéo nhau. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'D'$ và $A'B$

Hướng dẫn	**Bài giải**
Dựng hình : Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $O\equiv A(0;0;0)$; $A'(0;0;a)$; $B(0;a;0)$; $B'(0;a;a)$ $C(a;a;0)$; $C'(a;a;a)$ $D(a;0;0)$; $D'(a;0;a)$	
Chứng minh $B'D'$ và $A'B$ chéo nhau, ta chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{B'D'};\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{BB'}$ không đồng phẳng. Cần chứng minh tích hỗn hợp của ba vectơ $\overrightarrow{B'D'};\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{BB'}$ khác 0	Ta có : $\overrightarrow{B'D'}=(a;-a;0)$ $\overrightarrow{A'B}=(0;a;-a)$; $\overrightarrow{BB'}=(0;0;a)$ $\left[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}\right]=(a^2;a^2;a^2)$ $\left[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}\right]\overrightarrow{BB'}=a^3\neq 0$ $\Rightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{B'D'};\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{BB'}$ không đồng phẳng. hay $B'D'$ và $A'B$ chéo nhau.
Tính $d\left(B'D',A'B\right)$	$d\left(B'D',A'B\right)=\dfrac{a^3}{\sqrt{a^4+a^4+a^4}}=\dfrac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$