GIỚI HẠN MỘT BÊN

A: KIẾN THỨC CẦN NHỚ THEO CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

1.Giới hạn hữu hạn

a. Định nghĩa 1

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0;b),(x_0\in R)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0)nếu với mọi dãy số bất kì (x_n) những số thuộc khoảng $(x_0;b)$ mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$. Khi đó ta viết

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^+$.

b. Định nghĩa 2

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;x_0),(x_0\in R)$. Ta nói rằng hàm số có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy bất kì (x_n) những số thuộc khoảng $(a;x_0)$ mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$. Khi đó ta viết

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^-$.

Chú ý:

1). Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì hàm số f có giới hạn bên phải và giới hạn bên trái tại điểm x_0 . Và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

2). Ngược lại, nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ thì hàm số f có giới hạn tại điểm x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

3). Các định lí 1 và 2 ở bài trước vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bởi $x\to x_0^-$ hoặc $x\to x_0^+$.

2. Giới hạn vô cực

1.Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ được phát biểu tương tự như định nghĩa 1 và định nghĩa 2.

2. Các chú ý 1 và 2 vẫn đúng nếu thay L bởi $+\infty$ hoặc $-\infty$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{5x-15}$ b). $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

LỜI GIẢI

a). Vì $x\to 3^+ \Rightarrow x>3 \Leftrightarrow x-3>0$. Vậy $|x-3|=x-3$

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{5x-15}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{5(x-3)}=\dfrac{1}{5}$.

b). Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=-1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^3-2x & x\ge 1\\ x^3-3x & x<1\end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x); \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Hàm số có giới hạn tại $x=1$ không? Vì sao?

LỜI GIẢI

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3-3x\right)=1-3=-2$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2x^3-2x\right)=2-2=0$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên hàm số đã cho không có giới hạn tại $x=1$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1 : Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to (-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}$ c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\dfrac{4-4x^3}{3x^2+5x}}$

LỜI GIẢI

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{-1}{1}=-1$.

b) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x+1)(x+3)}{\sqrt{x^2(x+1)}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}(x+3)}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0.$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\dfrac{4-4x^3}{3x^2+5x}}=\sqrt{\dfrac{0}{8}}=0.$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x^4-6x^2-x & x\ge 1\\ x^3-3x & x<1\end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x);\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$. Hàm số có giới hạn tại $x=1$ không? Vì sao?

LỜI GIẢI

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3-3x\right)=1-3=-2$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(5x^4-6x^2-x\right)=5-6-1=-2$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-2$ nên hàm có giới hạn tại $x=1$ và $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2.$

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & x\ne 1\\ \dfrac{1}{8} & x=1\end{cases}$

a). Tìm $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$. So sánh $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ và $f(1)$

b). Tìm $\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)$. So sánh $\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)$ và $f(-3)$.

LỜI GIẢI

a)Ta có $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4-x-3}{(x-1)(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=-\frac{1}{8}.$$

Và $f(1)=\frac{1}{8}$. Vậy $\lim\limits_{x\to 1} f(x)<f(1)$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)^+}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\frac{2-0}{9-1}=\frac{1}{4}$ và có $f(-3)=\frac{2-0}{9-1}=\frac{1}{4}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=f(-3)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3 & |x|<2 \\ 5 & |x|=2 \\ 3x-1 & |x|>2 \end{cases}$

a). Tìm $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$.

b). Hàm số có giới hạn tại $x=2$ không? Tại sao?

LỜI GIẢI

a). Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}(3x-1)=-7$ và có $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}(2x^2-3)=5$.

b). Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1)=5$, và có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x^2-3)=5$.

Vì $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=5$ nên hàm số có giới hạn tại $x=2$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$.

Câu 5 : Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x} & x\ge 0 \\ ax+b-1 & -2<x<0 \\ \dfrac{x^2-4}{x+2} & x\le -2 \end{cases}$

Tìm a, b để hàm số cùng có giới hạn tại $x=-2$ và $x=0$.

LỜI GIẢI

Tại $x=0$ ta có

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b-1)=b-1$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x+1}-2+2-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

Mà $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x+1}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2(x+1-1)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+1} = 1.$

Và $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{8-8+x}{x\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \dfrac{1}{12}$.

Nên $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x} = 1+\dfrac{1}{12} = \dfrac{13}{12}.$

Do đó hàm số có giới hạn tại $x=0$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow b-1 = \dfrac{13}{12} \Leftrightarrow b = \dfrac{25}{12}. \quad (1)$

Tại $x=-2$:

$\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to (-2)^+} (ax+b-1) = -2a+b-1$.

$\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-2)^-} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \lim\limits_{x\to (-2)^-} (x-2) = -2-2 = -4.$

Do đó hàm số có giới hạn tại $x=-2$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x) \Leftrightarrow -2a+b-1 = -4. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: hàm số cùng có giới hạn tại $x=0$ và $x=-2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b = \dfrac{25}{12} \\ -2a+b-1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{25}{12} \\ a = \dfrac{61}{24}. \end{cases}$$

Vậy với $a = \dfrac{61}{24}, b = \dfrac{25}{12}$ thì hàm số cùng có giới hạn tại $x=0$ và $x=-2.$

Câu 6 : Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ b). $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}$ c). $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$ d). $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$

LỜI GIẢI

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2}+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}=-2$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\left(\sqrt{2-x}\right)^2(2+x)}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}(2+x)=0.$

c) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{x^4(x+1)}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2(x+2)}{x^2\sqrt{x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{x+1}(x+2)}{x^2}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{(x-4)(x-3)}}{\sqrt{(3-x)(3+x)}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\dfrac{(x-4)(x-3)}{(3-x)(3+x)}}$

$=\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\dfrac{(4-x)(3-x)}{(3-x)(3+x)}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\dfrac{4-x}{3+x}}=\sqrt{\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}.$

Câu 7 : Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[x.\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}\right]$

c). $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$ d). $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$

e). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|}{x-2}$ f). $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}}$

LỜI GIẢI

a). $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}\right]=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}}\right]$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}}\right]==\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\sqrt{x+1}\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\right]=0.$

b). $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[x.\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}\right]$

Vì $x\to 1^-\Rightarrow\ x<1\Rightarrow\ 1-x>0$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}x\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+\left(\sqrt{1-x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}x.\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{2+\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{2}.$

c). $L=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x^2+5x-3}{\left(x+3\right)^2}=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{\left(2x-1\right)\left(x+3\right)}{\left(x+3\right)^2}=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x-1}{x+3}$

Ta có $x\to -3^+\Rightarrow x>-3\Rightarrow x+3>0\Rightarrow\lim\limits_{x\to -3^+}\left(x+3\right)=0^+$, và $\lim\limits_{x\to -3^+}\left(2x-1\right)=-7.$

Kết luận $L=-\infty$.

d). $L=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2-1}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}$

Ta có $x\to 2^-\Rightarrow x<2\Rightarrow x-2<0\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 2^-}\left(x-2\right)=0^-$, và $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x+1\right)=3$, và $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x+2\right)=4$

Kết luận $L=-\infty$.

e). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|\left(x-2\right)\left(x-1\right)\right|}{x-2}$

Nếu $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left|\left(x-2\right)\left(x-1\right)\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left(x-2\right)\left(x-1\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-1\right)=1$.

Nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\left|(x-2)(x-1)\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}(1-x)=-1$.

$$L=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{x^2-\frac{1}{4}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{\sqrt{2(2-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)}}{-\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\left[-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-x}}\cdot\frac{\sqrt{2(2-x)}}{\frac{1}{2}+x}\right]$$

Mà $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-x}}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\left[\dfrac{\sqrt{2(2-x)}}{\frac{1}{2}+x}\right]=\sqrt{3}$. Do đó $L=-\infty$.

f). $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}}$

Với mọi $x>1$ ta có : $(1-x)\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}}=-(x-1)\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}}$

$$=-\sqrt{\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x-1)(x+3)}}=-\sqrt{\frac{(x-1)(x+5)}{x+3}}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}}=\lim\limits_{x\to 1^+}-\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+5)}{x+3}}=0$.

Câu 8 : Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ với $f(x)=\begin{cases}x-3, & \text{khi } x<1\\ x=-13, & \text{khi } x=1\\ 1-\sqrt{7x^2+2}, & \text{khi } x>1\end{cases}$

b). $\lim\limits_{x\to -2}g(x)$ với $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-2}{x+1}, & \text{khi } x<-2\\ x+10, & \text{khi } x\ge -2\end{cases}$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-3)=-2\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\sqrt{7x^2+2}\right)=-2\end{cases}$

Vậy ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2$

b).Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{3x-2}{x+1} = 8 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (x+10) = 8 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} g(x) = 8$

Chú ý: giới hạn của hàm số và giá trị của hàm số tại điểm lấy giới hạn có thể bằng nhau, có thể khác nhau. Trong thí dụ trên:

câu a) có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2 \neq (1) = -13$, còn câu b) $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = g(-2) = 8$

Câu 9: Tìm giới hạn của hàm số $g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+1}, \text{ khi } x < 0 \\ x+10, \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

LỜI GIẢI

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x-2}{x+1} = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+10) = 10 \end{cases}$

Ta thấy $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ nên hàm số không có giới hạn tại $x = 0$.

Câu 10: Tìm m để hàm số $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1}, & \text{khi } x < -1 \\ mx^2 - x + m^2, & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = -1$.

LỜI GIẢI

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} (x^2 - x + 1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (mx^2 - x + m^2) = m^2 + m + 1 \end{cases}$

Hàm số có giới hạn tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$

$$3 = m^2 + m + 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array} \right.$$