

ĐẠO HÀM CẤP CAO

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $f'(x)$ còn gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số $f(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'' hay $f''(x)$. Đạo hàm của đạo hàm cấp 2 được gọi là đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$. Tương tự, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$, tức là ta có:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1).$$

2. Đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm t .

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số.

1.PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng trực tiếp định nghĩa: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ để tính đạo hàm đến cấp mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ: Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau:

a). $y = x \sin 2x, (y''')$ b). $y = \cos^2 x, (y''')$ c). $y = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1, (y^{(n)})$

d). $y = x^4 - \sin 2x, (y^{(4)})$ e). $y = \sin^2 2x, (y^{(5)})$ f). $y = \frac{3x-1}{x+2}, (y^{(4)})$

LỜI GIẢI

a). Có $y' = x' \sin 2x + x.(\sin 2x)' = \sin 2x + 2x \cos 2x$

$$\Rightarrow y'' = (\sin 2x)' + (2x)' \cos 2x + 2x(\cos 2x)' = 4 \cos 2x - 4x \sin 2x$$

$$\Rightarrow y''' = 4(\cos 2x)' - (4x)' \sin 2x - 4x(\sin 2x)' = -8 \sin 2x - 4 \sin 2x - 8 \cos 2x$$

$$= -12 \sin 2x - 8 \cos 2x.$$

b). Ta có $y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \Rightarrow y' = -\sin 2x$

$$\Rightarrow y'' = -2 \cos 2x \Rightarrow y''' = 4 \sin 2x$$

c). $y = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1$

$$\Rightarrow y' = 4x^3 + 12x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 12x^2 + 24x - 6 \Rightarrow y''' = 24x + 24$$

$$\Rightarrow y^{(4)} = 24 \Rightarrow y^{(5)} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = 0.$$

d). $y = x^4 - \sin 2x$

$$\Rightarrow y' = 4x^3 - 2 \cos 2x \Rightarrow y'' = 12x^2 + 4 \sin 2x$$

$$\Rightarrow y''' = 24x + 8 \cos 2x \Rightarrow y^{(4)} = 24 - 16 \sin 2x$$

e). $y = \sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$

$$\Rightarrow y' = 2 \sin 4x \Rightarrow y'' = 8 \cos 4x \Rightarrow y''' = -32 \sin 4x$$

$$\Rightarrow y^{(4)} = -128 \cos 4x \Rightarrow y^{(5)} = 512 \sin 4x$$

f). $y = \frac{3x-1}{x+2}, (y^{(4)})$

$$\Rightarrow y' = \frac{7}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-7[(x+2)^2]'}{(x+2)^4} = \frac{-14}{(x+2)^3}$$

$$\Rightarrow y''' = \frac{14[(x+2)^3]'}{(x+2)^6} = \frac{42}{(x+2)^4} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{-42[(x+2)^4]'}{(x+2)^8} = \frac{-168}{(x+2)^5}$$

DẠNG 2: Tìm đạo hàm cấp n của một hàm số

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Tính y', y'', y''' . Dựa vào các đạo hàm vừa tính, dự đoán công thức tính $y^{(n)}$.

Bước 2: Chứng minh công thức vừa dự đoán là đúng bằng phương pháp quy nạp.

Chú ý: Cần phân tích kĩ các kết quả của đạo hàm y', y'', y''' tìm ra quy luật để dự đoán công thức $y^{(n)}$ chính xác.

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin x (n \in \mathbb{N}^*)$

LỜI GIẢI

Bước 1: Ta có: $y' = \cos x = \sin\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right); y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

Dự đoán: $y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (1), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bước 2: Chứng minh (1) bằng quy nạp:

* $n=1$: (1) hiển nhiên đúng.

* Giả sử (1) đúng với $n=k \geq 1$ nghĩa là ta có: $y^k = \sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$ ta phải chứng minh (1) cũng đúng với $n=k+1$ nghĩa là ta phải chứng minh

$$y^{(k+1)} = \sin\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

Thật vậy : vế trái (2) $= y^{k+1} = [y^k]'$ $= \left[\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right) =$ vế phải (2)

\Rightarrow (2) đúng, nghĩa là (1) đúng với $n=k+1$.

Bước 3: theo nguyên lí quy nạp suy ra $y^n = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{x+3} (n \in \mathbb{N}^*)$

LỜI GIẢI

Ta có: $y' = (-1)' \frac{1}{(x+3)^2} = (-1)' \frac{1!}{(x+3)^2};$

$$y'' = (-1)^2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{(x+3)^3} = (-1)^2 \cdot \frac{2!}{(x+3)^3}.$$

Dự đoán: $y^n = (-1)^n \frac{n!}{(x+3)^{n+1}} \quad (1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp:

* $n=1$: (1) hiển nhiên đúng.

* Giả sử (1) đúng với $n=k \geq 1$, nghĩa là ta có: $y^k = (-1)^k \frac{k!}{(x+3)^{k+1}}$ ta phải chứng minh (1) cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là ta phải chứng minh:

$$y^{k+1} = (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}} \quad (2)$$

Thật vậy: vế trái

$$(2) = y^{k+1} = [y^k]' = \left[(-1)^k \frac{k!}{(x+3)^{k+1}} \right]' = (-1)^{k+1} \cdot \frac{k!}{[(x+3)^{k+1}]^2} \cdot [(x+3)^{k+1}]'$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{k!(k+1)}{(x+3)^{k+2}} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}} = vt(2)$$

Vậy (2) đúng nghĩa là (1) đúng với $n = k+1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta suy ra $y^n = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x+3)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

DẠNG 3: Chứng minh đẳng thức:

Bài 11:

a). Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh $x \cdot y'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0$ (*)

b). Cho hàm số: $y = \sqrt{2x-x^2}$ chứng minh: $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$ (*)

c). Cho hàm số: $y = x \tan x$ chứng minh: $x^2 \cdot y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y) = 0$ (*)

d). Cho hàm số: $y = \frac{x-3}{x+4}$ chứng minh: $2(y')^2 = (y-1) \cdot y''$ (*)

LỜI GIẢI

a). Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh $x \cdot y'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0$ (*)

Ta có $y' = (x \sin x)' \Leftrightarrow y' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' \Leftrightarrow y' = \sin x + x \cos x$

$$y'' = (\sin x + x \cos x)' = (\sin x)' + (x \cos x)' = \cos x + x' \cdot \cos x + x \cdot (\cos x)' = 2 \cos x - x \sin x$$

$$(1) \Leftrightarrow x(2 \cos x - x \sin x) - 2(\sin x + x \cos x - \sin x) + x^2 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \cos x - x^2 \sin x - 2x \cos x + x^2 \sin x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (đpcm).}$$

b). Cho hàm số: $y = \sqrt{2x-x^2}$ chứng minh: $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$ (*)

Ta có: $y' = (\sqrt{2x-x^2})' \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} \cdot (2x-x^2)' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

$$y'' = \frac{(1-x)' \cdot \sqrt{2x-x^2} - (\sqrt{2x-x^2})' \cdot (1-x)}{(\sqrt{2x-x^2})^2} = \frac{-\sqrt{2x-x^2} - \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \cdot (1-x)}{(\sqrt{2x-x^2})^2}$$

$$= \frac{-(2x-x^2) - (1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2} \cdot (\sqrt{2x-x^2})^2} = \frac{-1}{(\sqrt{2x-x^2})^3}.$$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{2x-x^2})^3 \cdot \frac{-1}{(\sqrt{2x-x^2})^3} + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 + 1 = 0 \text{ (đpcm).}$$

c). Cho hàm số: $y = x \tan x$ chứng minh: $x^2 \cdot y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y) = 0$ (*)

Ta có: $y' = (x \tan x)' = x' \cdot \tan x + x \cdot (\tan x)' = \tan x + x(1 + \tan^2 x)$

$$y'' = (\tan x)' + x' \cdot (1 + \tan x) + x \cdot (1 + \tan x)' = 2(1 + \tan^2 x) + x \cdot (2 \tan x) \cdot (\tan^2 + 1)$$

$$= 2(1 + \tan^2 x)(1 + x \tan x)$$

$$(*) \Leftrightarrow 2x^2(1 + \tan^2 x) \cdot (1 + x \tan x) - 2(x^2 + x^2 \tan^2 x)(1 + x \tan x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2(1 + \tan^2 x)(1 + x \tan x) - 2x^2(1 + \tan^2 x)(1 + x \tan x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (đpcm).}$$

d). Cho hàm số: $y = \frac{x-3}{x+4}$ chứng minh: $2(y')^2 = (y-1) \cdot y''$ (*)

Ta có: $y' = \left(\frac{x-3}{x+4}\right)' = \frac{7}{(x+4)^2}$

$$y'' = \frac{-7((x+4)^2)'}{(x+4)^4} = \frac{-14}{(x+4)^3}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \left(\frac{7}{(x+4)^2}\right)^2 = \left(\frac{x-3}{x+4} - 1\right) \cdot \left(\frac{-14}{(x+4)^3}\right) \Leftrightarrow \frac{98}{(x+4)^4} = \frac{98}{(x+4)^4} \text{ (đpcm).}$$

e) Cho hàm số $y = \cos^2 3x$ chứng minh: $18(2y-1) + y'' = 0$ (*)

Ta có: $y = \cos^2 3x$

$$y' = 2 \cdot \cos 3x (\cos 3x)' = 2 \cos 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' = -3 \sin 6x$$

$$y'' = -18 \cos 6x$$

$$(*) \Leftrightarrow 18(2 \cos^2 3x - 1) - 18 \cos 6x = 0 \Leftrightarrow 18 \cdot \cos 6x - 18 \cos 6x = 0 \text{ (đpcm).}$$

Bài 12:

a). Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cdot \cos x}$. Chứng minh $y'' + y = 0$ (*)

b). Cho hàm số $y = (x^2 - 1)^2$. Chứng minh: $y^4 + 2xy''' - 4y'' = 40$ (*)

c). Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh: $4(x^2 + 1).y'' + 4x.y' - y = 0$ (*)

d). Chứng minh $(1+x^2).y'' + x.y' - k^2.y = 0$ nếu $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^k$

LỜI GIẢI

a). Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cdot \cos x}$ chứng minh $y'' + y = 0$ (*)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} = \sin x + \cos x \end{aligned}$$

$$y' = \cos x - \sin x$$

$$y'' = -\sin x - \cos x$$

$$(*) \Leftrightarrow -\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (đpcm).}$$

b). Cho hàm số $y = (x^2 - 1)^2$. Chứng minh: $y^4 + 2xy''' - 4y'' = 40$ (*)

$$\text{Ta có: } y = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y'' = 12x^2 - 4$$

$$y''' = 24x$$

$$y'''' = 24.$$

$$(*) \Leftrightarrow 24 + 2x(24x) - 4(12x^2 - 4) = 40.$$

$$\Leftrightarrow 24 + 48x^2 - 48x^2 + 16 = 40 \Leftrightarrow 40 = 40 \text{ (đpcm).}$$

c). Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh: $4(x^2 + 1).y'' + 4x.y' - y = 0$ (*)

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'' = \frac{\left(\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}\right)' \cdot 2\sqrt{1+x^2} - \left(2\sqrt{1+x^2}\right)' \cdot \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}{\left(2\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (2\sqrt{1+x^2} - 4x)}{8(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

$$(*) \Leftrightarrow 4(x^2+1) \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} (2\sqrt{1+x^2} - 4x)}{8(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} + 4x \cdot \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (2\sqrt{1+x^2} - 4x)}{2\sqrt{1+x^2}} + 2x \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2x\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (đpcm).}$$

d). Chứng minh $(1+x^2) \cdot y'' + x \cdot y' - k^2 \cdot y = 0$ nếu $y = (x + \sqrt{x^2+1})^k$

$$\text{Ta có: } y = (x + \sqrt{x^2+1})^k \Rightarrow y' = k(x + \sqrt{x^2+1})^{k-1} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= k(x + \sqrt{x^2+1})^{k-1} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) = k \cdot \frac{(x + \sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y'' = k \cdot \frac{\left[(x + \sqrt{x^2+1})^k \right]' \cdot \sqrt{x^2+1} - (x + \sqrt{x^2+1})^k \cdot (\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1}$$

$$= k \cdot \frac{\frac{k(x + \sqrt{x^2+1})^{k-1}}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot (x + \sqrt{x^2+1})^k}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{k(x + \sqrt{x^2+1})^k (k\sqrt{x^2+1} - x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$(*) \Leftrightarrow (1+x^2) \frac{k(x + \sqrt{x^2+1})^k \cdot (k\sqrt{x^2+1} - x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} + \frac{x \cdot k(x + \sqrt{1+x^2})^k}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(x + \sqrt{x^2+1})^k \cdot (k\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x \cdot k(x^2 + \sqrt{1+x^2})^k}{\sqrt{1+x^2}} - k^2(x + \sqrt{x^2+1})^k = 0$$

Quy đồng đặt thừa số chung được:

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^k}{\sqrt{x^2 + 1}} (k^2 \sqrt{x^2 + 1} - kx + kx - k^2 \sqrt{x^2 + 1}) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$ ta có:

a) Nếu $y = \frac{1}{x}$ thì $y^n = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$.

b) Nếu $y = \cos x$ thì $y^{4n} = \cos x$.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

a) Nếu $y = \sin ax$ thì $y^{4n} = a^{4n} \cdot \sin ax$ (a là hằng số).

b) Nếu $y = \sin^2 x$ thì $y^{4n} = -2^{4n-1} \cos 2x$.