CHƯƠNG II: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

BÀI : ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

PHẦN 1 – LÝ THUYẾT

1. Các tính chất thừa nhận.

Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tính chất 4: Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Tính chất 5: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Vậy thì: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng .

Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

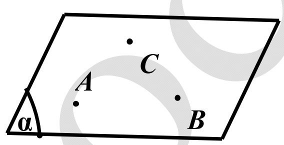
2. Cách xác định mặt phẳng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết:

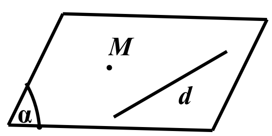
- Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nó đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Các kí hiệu:

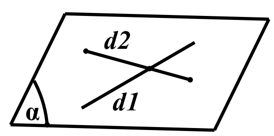
- (ABC) là kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A,B,C (h1)
- (M,d) là kí hiệu mặt phẳng đi qua d và điểm $M \notin d$ (h2)
- (d_1,d_2) là kí hiệu mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1,d_2 (h3)



(h1)



(h2)



(h3)

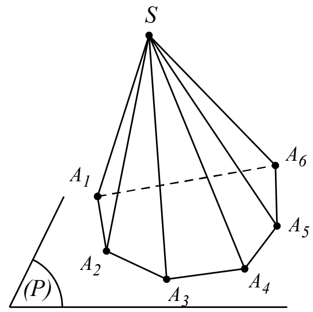
3. Hình chóp và hình tứ diện.

3.1. Hình chóp.

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α).

Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1,A_2,...,A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2,SA_2A_3,...,SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2,SA_2A_3,...,SA_nA_1$ được gọi là hình chóp , kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là đáy , các đoạn $SA_1,SA_2,...,SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2,A_2A_3,...,A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2,SA_2A_3,...,SA_nA_1$ là các mặt bên…



3.2. Hình Tứ diện

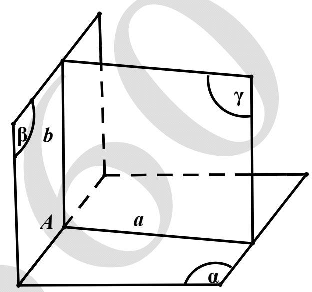
Cho bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và (BCD) được gọi là tứ diện $ABCD$.

PHẦN 2 – CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp giải:

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến.



Lưu ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường được tìm như sau :

Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt thuộc (α) và (β), đồng thời chúng cùng nằm trong mặt phẳng (γ) nào đó; giao điểm $M = a \cap b$ chính là điểm chung của (α) và (β).

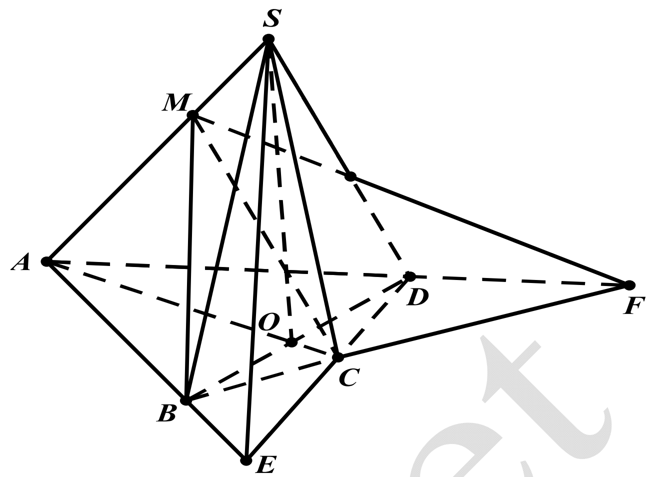
Ví dụ điển hình

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAC) và (SBD) b) (SAC) và (MBD)

c) (MBC) và (SAD) d) (SAB) và (SCD)

Lời giải



a) Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ Lại có

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$S \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$.

Và $M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD)$.

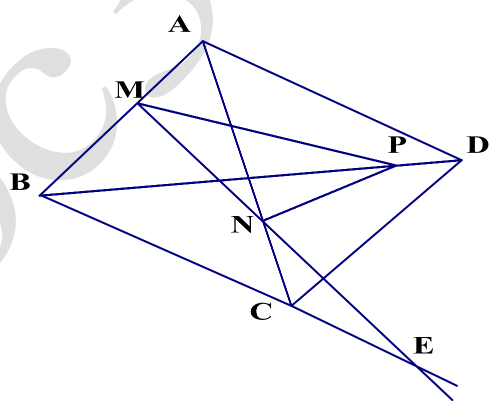
c) Trong $(ABCD)$ gọi $F = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} F \in BC \subset (MBC) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MBC) \cap (SAD)$

Và $M \in (MBC) \cap (SAD) \Rightarrow FM = (MBC) \cap (SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$, ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNP).

Lời giải



- $P \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow P \in (BCD)$
- $P \in (BCD)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của (BCD) và (MNP)

Trong mp (ABC), gọi $E = MN \cap BC$

- $E \in BC$ mà $BC \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$
- $E \in MN$ mà $MN \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của (BCD) và (MNP)

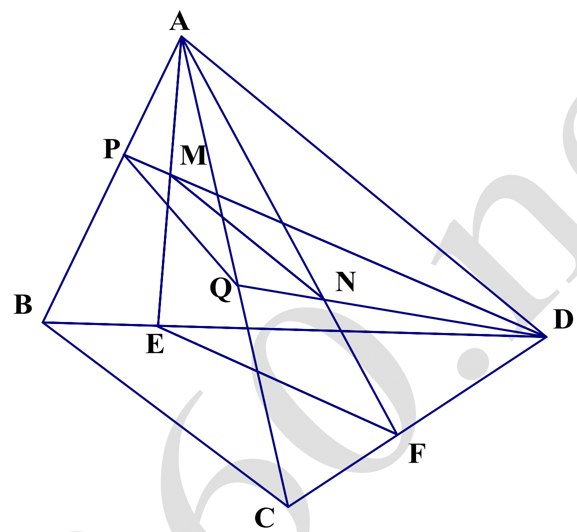
Vậy PE là giao tuyến của (BCD) và (MNP).

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mp sau

a) (AMN) và (BCD)

b) (DMN) và (ABC)

Lời giải



a) Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Trong (ABD), gọi $E = AM \cap BD$

- $E \in AM$ mà $AM \subset (AMN) \Rightarrow E \in (AMN)$
- $E \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của (AMN) và (BCD)

Trong (ACD), gọi $F = AN \cap CD$

- $F \in AN$ mà $AN \subset (AMN) \Rightarrow F \in (AMN)$
- $F \in CD$ mà $CD \subset (BCD) \Rightarrow F \in (BCD)$

$\Rightarrow F$ là điểm chung của (AMN) và (BCD)

Vậy EF là giao tuyến của (AMN) và (BCD)

b) Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Trong (ABD), gọi $P = DM \cap AB$

- $P \in DM$ mà $DM \subset (DMN) \Rightarrow P \in (DMN)$
- $P \in AB$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow P \in (ABC)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của (DMN) và (ABC)

Trong (ACD), gọi $Q = DN \cap AC$

- $Q \in DN$ mà $DN \subset (DMN) \Rightarrow Q \in (DMN)$
- $Q \in AC$ mà $AC \subset (ABC) \Rightarrow Q \in (ABC)$

$\Rightarrow Q$ là điểm chung của (DMN) và (ABC)

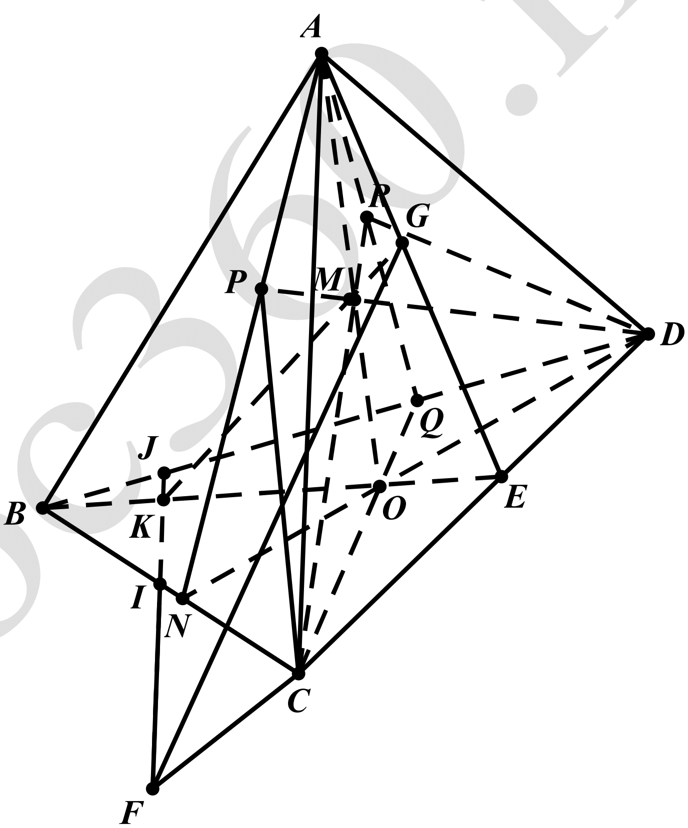
Vậy PQ là giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng $(ABC),(ABD)$.

b) Gọi I, J là các điểm tương ứng trên các cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

Lời giải



a) Trong (BCD) gọi $N = DO \cap BC$, trong (ADN) gọi $P = DM \cap AN$

$$\Rightarrow \begin{cases} P \in DM \subset (CDM) \\ P \in AN \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow P \in (CDM) \cap (ABC)$$

Lại có $C \in (CDM) \cap (ABC) \Rightarrow PC = (CDM) \cap (ABC)$.

Tương tự, trong (BCD) gọi $Q = CO \cap BD$, trong (ACQ) gọi $R = CM \cap AQ$

$\Rightarrow \begin{cases} R \in CM \subset (CDM) \\ R \in AQ \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow R \in (CDM) \cap (ABD)$

$\Rightarrow D$ là điểm chung thứ hai của (MCD) và (ABD) nên $DR = (CDM) \cap (ABD)$.

b) Trong (BCD) gọi $E = BO \cap CD, F = IJ \cap CD$, $K = BE \cap IJ$;

trong (ABE) gọi $G = KM \cap AE$.

Ta có:

$\begin{cases} F \in IJ \subset (IJM) \\ F \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJM) \cap (ACD)$,

$\begin{cases} G \in KM \subset (IJM) \\ G \in AE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow G \in (IJM) \cap (ACD)$.

Vậy $FG = (IJM) \cap (ACD)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AB // CD)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

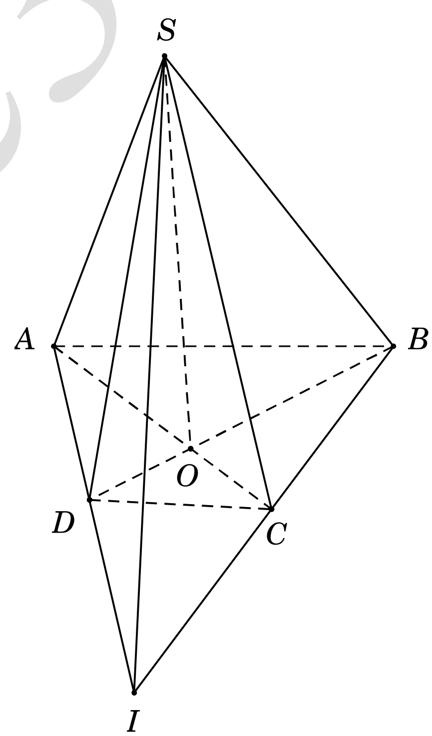
B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

Lời giải

Chọn D



- Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên: $(SAB),(SBC),(SCD),(SAD)$. Do đó A đúng.
- S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\begin{cases} O\in AC\subset(SAC)\Rightarrow O\in(SAC) \\ O\in BD\subset(SBD)\Rightarrow O\in(SBD) \end{cases}\Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\longrightarrow(SAC)\cap(SBD)=SO.$ Do đó B đúng.

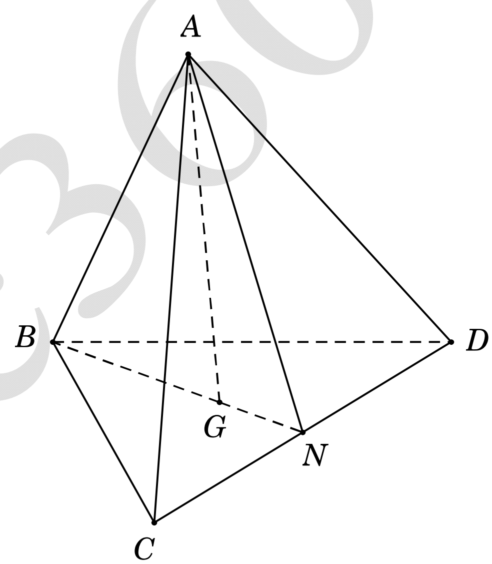
- Tương tự, ta có $(SAD)\cap(SBC)=SI$. Do đó C đúng.
- $(SAB)\cap(SAD)=SA$ mà SA không phải là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Do đó D sai.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

A. AM (M là trung điểm của AB).
B. AN (N là trung điểm của CD).
C. AH (H là hình chiếu của B trên CD).
D. AK (K là hình chiếu của C trên BD).

Lời giải

Chọn B



- A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).
- Ta có $BG\cap CD=N\longrightarrow\begin{cases} N\in BG\subset(ABG)\Rightarrow N\in(ABG) \\ N\in CD\subset(ACD)\Rightarrow N\in(ACD) \end{cases}\Rightarrow N$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

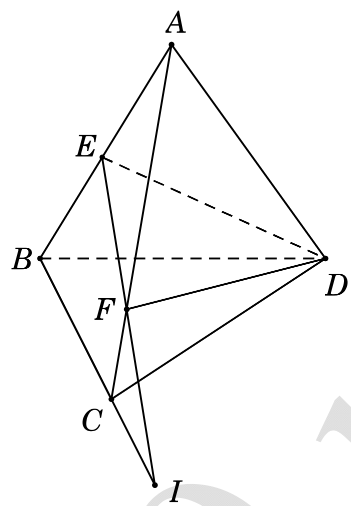
Vậy $(ABG)\cap(ACD)=AN$.

Ví dụ 3: Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC. Khi EF và BC cắt nhau tại I, thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

A. (BCD) và (DEF). **B.** (BCD) và (ABC). **C.** (BCD) và (AEF). **D.** (BCD) và (ABD).

Lời giải

Chọn D



Điểm I là giao điểm của EF và BC mà $\begin{cases} EF \subset (DEF) \\ EF \subset (ABC) \\ EF \subset (AEF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = (BCD) \cap (DEF) \\ I = (BCD) \cap (ABC) \\ I = (BCD) \cap (AEF) \end{cases}.$

Ví dụ 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là:

A. đường thẳng MN.

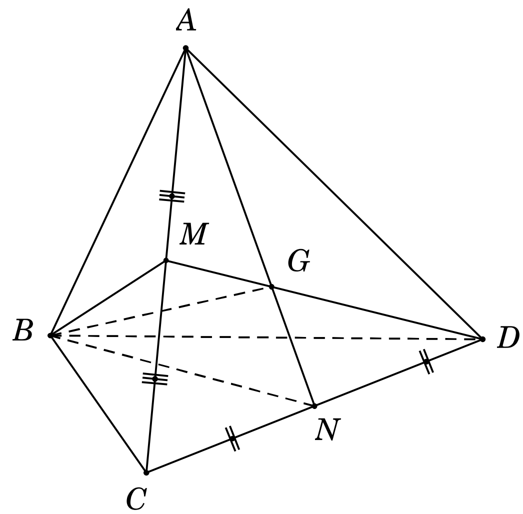
B. đường thẳng AM.

C. đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).

D. đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).

Lời giải

Chọn C



- B là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).
- Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD nên suy ra AN, DM là hai trung tuyến của tam giác ACD. Gọi $G = AN \cap DM$

$\Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow G$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).

Vậy $(ABN) \cap (MBD) = BG$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

A. SD.

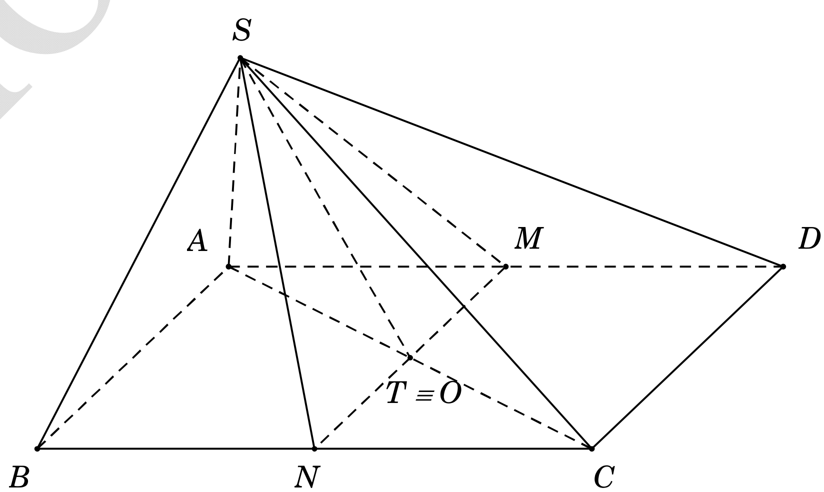
B. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).

C. SG (G là trung điểm AB).

D. SF (F là trung điểm CD).

Lời giải

Chọn B



- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).
- Gọi $O = AC \cap BD$ là tâm của hình hình hành.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $T = AC \cap MN$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in MN \subset (SMN) \Rightarrow O \in (SMN) \end{cases} \Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).

Vậy $(SMN) \cap (SAC) = SO.$

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $IJCD$ là hình thang.

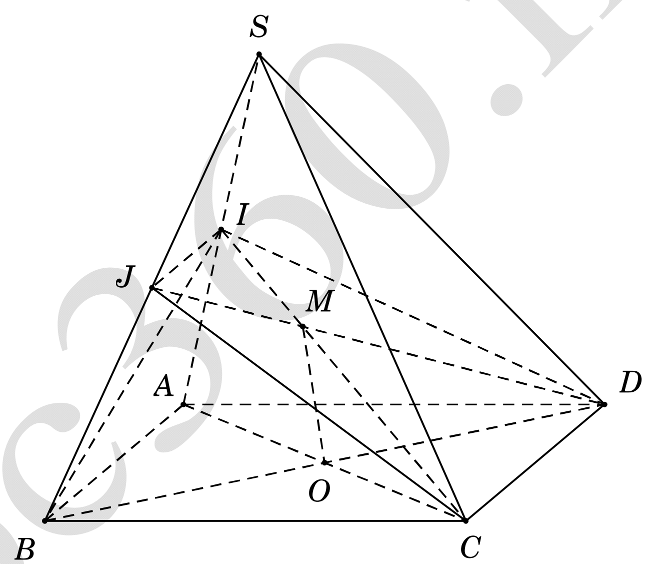
B. $(SAB) \cap (IBC) = IB.$

C. $(SBD) \cap (JCD) = JD.$

D. $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm $ABCD$).

Lời giải

Chọn D



- Ta có IJ là đường trung bình của tam giác SAB $\Rightarrow IJ \,//\, AB \,//\, CD \Rightarrow IJ \,//\, CD$

$\Rightarrow IJCD$ là hình thang. Do đó A đúng.

- Ta có $\begin{cases} IB \subset (SAB) \\ IB \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (IBC) = IB.$ Do đó B đúng.
- Ta có $\begin{cases} JD \subset (SBD) \\ JD \subset (JBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \cap (JBD) = JD.$ Do đó C đúng.
- Trong mặt phẳng $(IJCD)$, gọi $M = IC \cap JD \Rightarrow (IAC) \cap (JBD) = MO.$ Do đó D sai.

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AD \,//\, BC)$. Gọi M là trung điểm CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

A. SI (I là giao điểm của AC và BM).

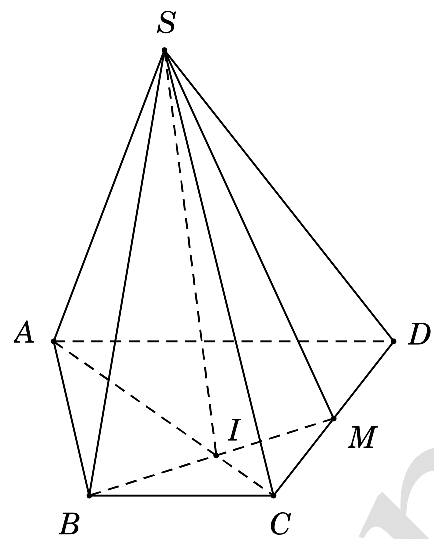
B. SJ (J là giao điểm của AM và BD).

C. SO (O là giao điểm của AC và BD).

D. SP (P là giao điểm của AB và CD).

Lời giải

Chọn A



- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MSB) và (SAC).
- Ta có $\begin{cases} I \in BM \subset (SBM) \Rightarrow I \in (SBM) \\ I \in (AC) \in (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow I$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MSB)

và (SAC).

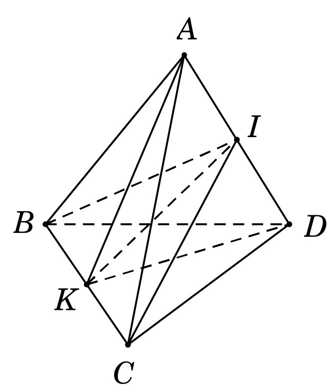
Vậy $(MSB) \cap (SAC) = SI$.

Ví dụ 8: Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là:

A. IK. **B.** BC. **C.** AK. **D.** DK.

Lời giải

Chọn A



Điểm K là trung điểm của BC suy ra $K \in (IBC) \Rightarrow IK \subset (IBC)$.

Điểm I là trung điểm của AD suy ra $I \in (KAD) \Rightarrow IK \subset (KAD)$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) là IK.

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB\,//\,CD$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Trên cạnh SB lấy điểm M. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SAC).

A. SI.

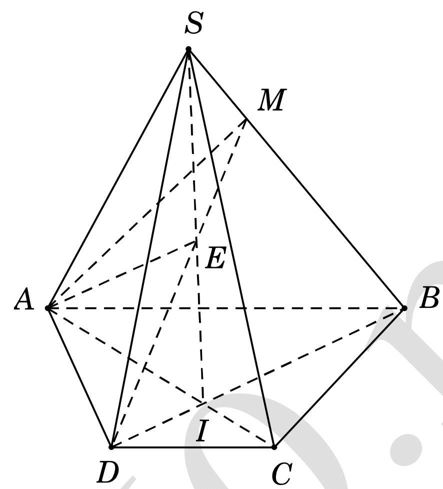
B. AE (E là giao điểm của DM và SI).

C. DM.

D. DE (E là giao điểm của DM và SI).

Lời giải

Chọn B



Ta có A là điểm chung thứ nhất của (ADM) và (SAC).

Trong mặt phẳng (SBD), gọi $E = SI \cap DM$.

Ta có:

- $E \in SI$ mà $SI \subset (SAC)$ suy ra $E \in (SAC)$.
- $E \in DM$ mà $DM \subset (ADM)$ suy ra $E \in (ADM)$.

Do đó E là điểm chung thứ hai của (ADM) và (SAC).

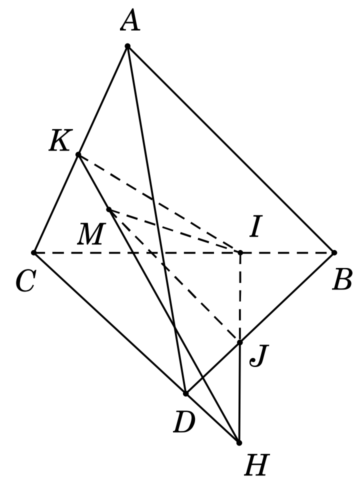
Vậy AE là giao tuyến của (ADM) và (SAC).

Ví dụ 10: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD. Gọi I và J lần lượt là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của IJ với CD của MH và AC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (IJM) là:

A. KI. **B.** KJ. **C.** MI. **D.** MH.

Lời giải

Chọn A



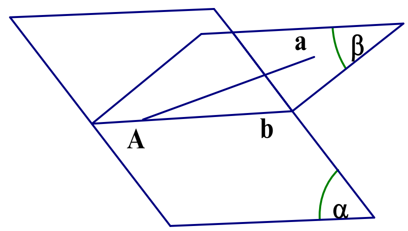
Trong mặt phẳng (BCD), IJ cắt CD tại $H \Rightarrow H \in (ACD)$.

Điểm $H \in IJ$ suy ra bốn điểm M, I, J, H đồng phẳng.

Nên trong mặt phẳng (IJM), MH cắt IJ tại H và $MH \subset (IJM)$.

Mặt khác $\begin{cases} M \in (ACD) \\ H \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow MH \subset (ACD)$. Vậy $(ACD) \cap (IJM) = MH$.

Dạng 2 : Xác định giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (α)



Phương pháp : **Cách 1:**

• Tìm đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (α)

• Giao điểm I của a và b là giao đt I của a và mặt phẳng (α)

Cách 2:

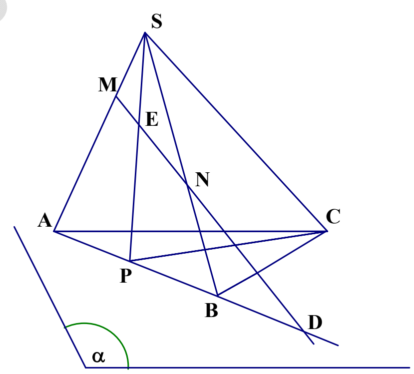
- Chọn mp phụ (β) chứa đường thẳng a sao cho giao tuyến của mp (α) và mp (β) dể xác định
- Tìm giao tuyến b của mp (α) và mp (β)
- b cắt a tại I, khi đó I là giao điểm của a và mặt phẳng (α)

Ví dụ :

1. Trong mp (α) cho tam giác ABC . Một điểm S không thuộc (α) . Trên cạnh AB lấy một điểm P và trên các đoạn thẳng SA, SB ta lấy lần lượt hai điểm M, N sao cho MN không song song với AB .

a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SPC)

b. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (α)



Giải

a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SPC)

Cách 1 : Trong (SAB) , gọi $E = SP \cap MN$

• $E \in SP$ mà $SP \subset (SPC) \Rightarrow E \in (SPC)$

• $E \in MN$

Vậy : $E = MN \cap (SPC)$

Cách 2 : • Chọn mp phụ $(SAB) \supset MN$

• $(SAB) \cap (SPC) = SP$

• Trong (SAB), gọi $E = MN \cap SP$

$E \in MN$

$E \in SP$ mà $SP \subset (SPC)$

Vậy : $E = MN \cap (SPC)$

b. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mp (α)

Cách 1: Trong (SAB) , MN không song song với AB

Gọi $D = AB \cap MN$

• $D \in AB$ mà $AB \subset (\alpha) \Rightarrow D \in (\alpha)$

• $D \in MN$

Vậy: $D = MN \cap (\alpha)$

Cách 2 : • Chọn mp phụ $(SAB) \supset MN$

• $(SAB) \cap (\alpha) = AB$

• Trong (SAB) , MN không song song với AB

Gọi D = MN $\cap$ AB

D $\in$ AB mà AB $\subset (\alpha) \Rightarrow$ D $\in (\alpha)$

D $\in$ MN

Vậy : D = MN $\cap (\alpha)$

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$.Trên hai đoạn AB và AC lấy hai điểm M, N sao cho $\dfrac{AM}{BM}=1$ và $\dfrac{AN}{NC}=2$. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (DMN).

A.Là giao điểm của BC và DN.

B. Là giao điểm của BC và MN.

C. Là giao điểm của BC và DM.

D. Là giao điểm của BN và CM.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC và G là trọng tâm tam giác ABC. Giao điểm của đường thẳng GM và mặt phẳng (BCD) là

A.Giao điểm của GM và ND.

B.Giao điểm của GD và MN.

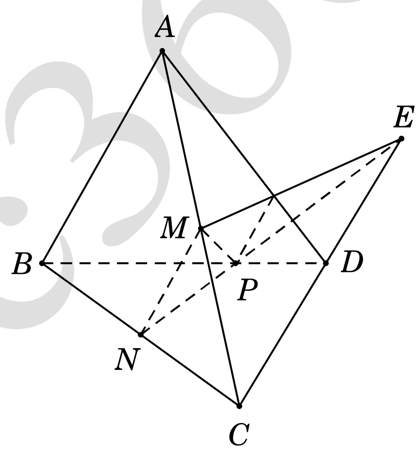
C.Giao điểm của GM và BC.

D.Giao điểm của GM và CD.

Câu 21. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

A. CD và NP. **B.** CD và MN. **C.** CD và MP. **D.** CD và AP.

Lời giải.



Cách 1. Xét mặt phẳng BCD chứa CD.

Do NP không song song CD nên NP cắt CD tại E.

Điểm $E \in NP \Rightarrow E \in (MNP)$. Vậy $CD \cap (MNP)$ tại E. **Chọn A.**

Cách 2. Ta có $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$ suy ra NP, CD đồng phẳng.

Gọi E là giao điểm của NP và CD mà $NP \subset (MNP)$ suy ra $CD \cap (MNP) = E$.

Vậy giao điểm của CD và $mp(MNP)$ là giao điểm E của NP và CD.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

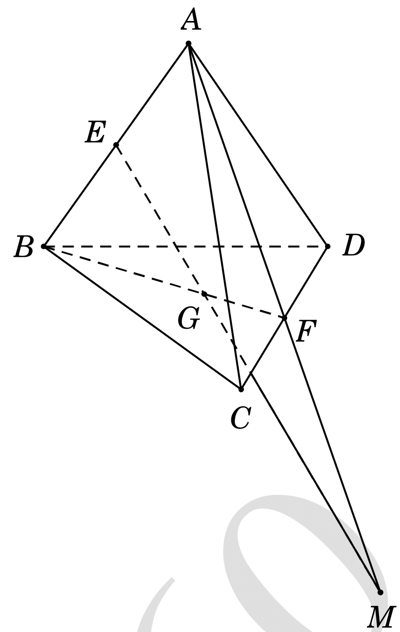
A. điểm F.

B. giao điểm của đường thẳng EG và AF.

C. giao điểm của đường thẳng EG và AC.

D. giao điểm của đường thẳng EG và CD.

Lời giải.



Vì G là trọng tâm tam giác BCD, F là trung điểm của $CD \Rightarrow G \in (ABF)$.

Ta có E là trung điểm của $AB \Rightarrow E \in (ABF)$.

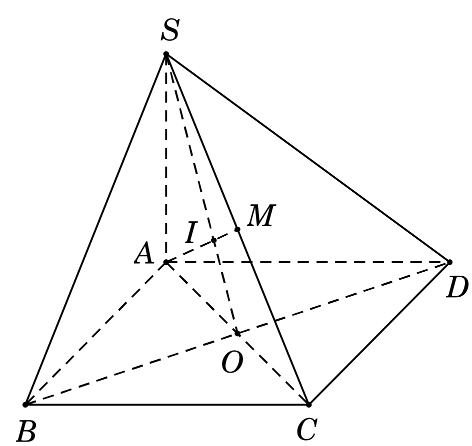
Gọi M là giao điểm của EG và AF mà $AF \subset (ACD)$ suy ra $M \in (ACD)$.

Vậy giao điểm của EG và $mp\,(ACD)$ là giao điểm $M = EG \cap AF$. **Chọn B.**

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC. Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM}$. **B.** $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IM}$. **C.** $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM}$. **D.** $IA = 2,5IM$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm của AC.

Nối AM cắt SO tại I mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $I = AM \cap (SBD)$.

Tam giác SAC có M, O lần lượt là trung điểm của SC, AC.

Mà $I = AM \cap SO$ suy ra I là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM \Leftrightarrow IA = 2IM$.

Điểm I nằm giữa A và M suy ra $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{MI} = -2\overrightarrow{IM}$. **Chọn A.**

Câu 24. Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C. Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là

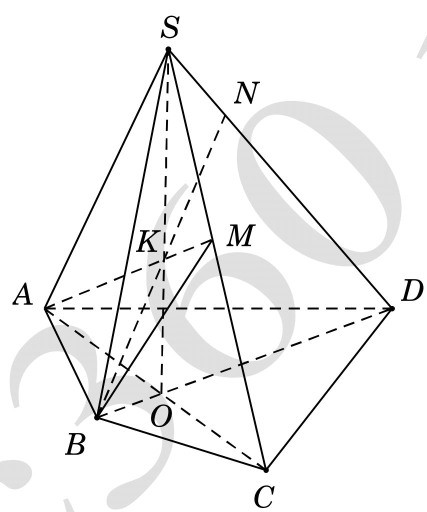
A. giao điểm của SD và AB.

B. giao điểm của SD và AM.

C. giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$).

D. giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).

Lời giải.



● Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD.

● Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (ABM).

Ta có B là điểm chung thứ nhất của (SBD) và (ABM).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$. Trong mặt phẳng (SAC), gọi $K = AM \cap SO$. Ta có:

- $K \in SO$ mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $K \in (SBD)$.
- $K \in AM$ mà $AM \subset (ABM)$ suy ra $K \in (ABM)$.

Suy ra K là điểm chung thứ hai của (SBD) và (ABM).

Do đó $(SBD) \cap (ABM) = BK$.

● Trong mặt phẳng (SBD), gọi $N = SD \cap BK$. Ta có:

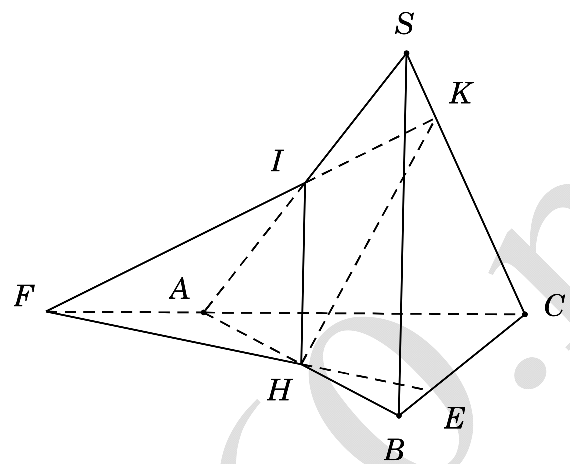
- $N \in BK$ mà $BK \subset (ABM)$ suy ra $N \in (ABM)$.
- $N \in SD$.

Vậy $N = SD \cap (ABM)$. **Chọn C.**

Câu 25. Cho bốn điểm A, B, C, S không cùng ở trong một mặt phẳng. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB. Trên SC lấy điểm K sao cho IK không song song với AC (K không trùng với các đầu mút). Gọi E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. E nằm ngoài đoạn BC về phía B.
B. E nằm ngoài đoạn BC về phía C.
C. E nằm trong đoạn BC.
D. E nằm trong đoạn BC và $E \neq B, E \neq C$.

Lời giải.



● Chọn mặt phẳng phụ (ABC) chứa BC.

● Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (IHK).

Ta có H là điểm chung thứ nhất của (ABC) và (IHK).

Trong mặt phẳng (SAC), do IK không song song với AC nên gọi $F = IK \cap AC$. Ta có

- $F \in AC$ mà $AC \subset (ABC)$ suy ra $F \in (ABC)$.
- $F \in IK$ mà $IK \subset (IHK)$ suy ra $F \in (IHK)$.

Suy ra F là điểm chung thứ hai của (ABC) và (IHK).

Do đó $(ABC) \cap (IHK) = HF$.

● Trong mặt phẳng (ABC), gọi $E = HF \cap BC$. Ta có

- $E \in HF$ mà $HF \subset (IHK)$ suy ra $E \in (IHK)$.
- $E \in BC$.

Vậy $E = BC \cap (IHK)$. **Chọn D.**

Dạng 3 : Tìm thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (α) :

Thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P) là đa giác giới hạn bởi các giao tuyến của (P) với các mặt hình chóp .

Phương pháp :

Xác định lần lượt các giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp theo các bước sau :

- Từ điểm chung có sẵn , xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của hình chóp (Có thể là mặt trung gian)

- Cho giao tuyến này cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp ta sẽ được các điểm chung mới của (P) với các mặt khác . Từ đó xác định được các giao tuyến mới với các mặt này .
- Tiếp tục như thế cho tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện .

Chú ý : Mặt phẳng (α) có thể chỉ cắt một số mặt của hình chóp

Ví dụ:

Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O .Gọi M, N , I là ba điểm lấy trên AD , CD , SO . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI) ?

Giải

Trong (ABCD), gọi J = BD $\cap$ MN

K = MN $\cap$ AB

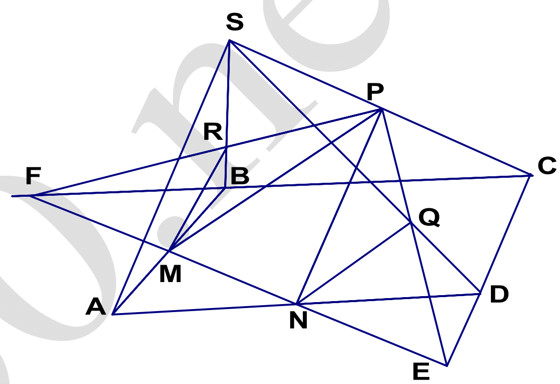
H = MN $\cap$ BC

Trong (SBD), gọi Q = IJ $\cap$ SB

Trong (SAB), gọi R = KQ $\cap$ SA

Trong (SBC), gọi P = QH $\cap$ SC

Vậy : thiết diện là ngũ giác MNPQR



7. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A’, B’ , C’ là ba điểm lấy trên các cạnh SA, SB, SC . Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (A’B’C’)

Giải

Trong (ABCD), gọi O = AC $\cap$ BD

Trong (SAC), gọi O’ = A’C’ $\cap$ SO

Trong (SBD), gọi D’ = B’O’ $\cap$ SD

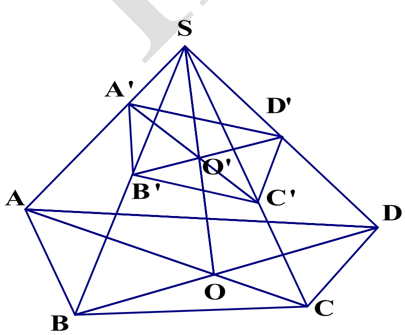
Có hai trường hợp :

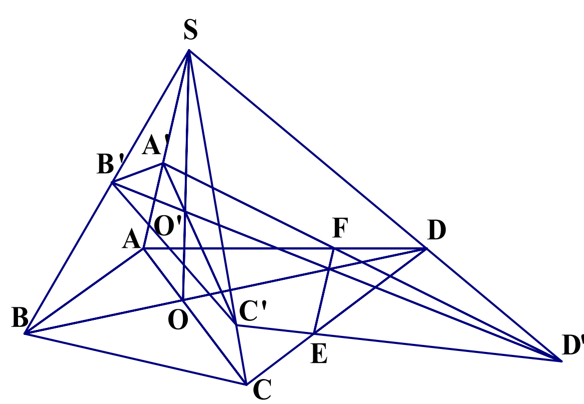
- Nếu D’ thuộc cạnh SD thì thiết diện là tứ giác A’B’C’D’
- Nếu D’ thuộc không cạnh SD thì

Gọi E = CD $\cap$ C’D’

F = AD $\cap$ A’D’

$\Rightarrow$ thiết diện là tứ giác A’B’C’EF





Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

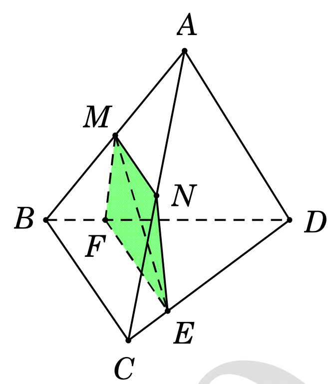
A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

Lời giải.



Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow MN // BC$.

Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF // BC$.

Do đó $MN // EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm. **Chọn D.**

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Trên đường thẳng CD lấy điểm M nằm ngoài đoạn CD. Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) là:

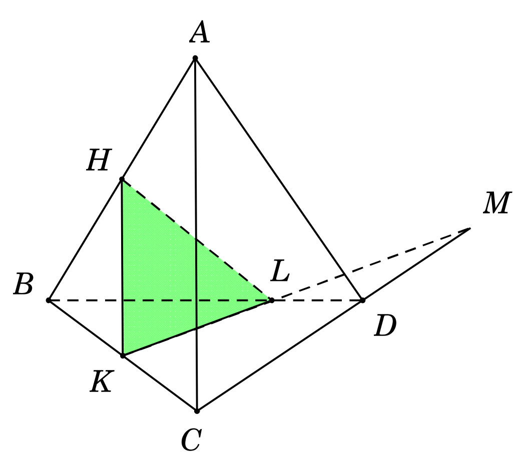
A. Tứ giác $HKMN$ với $N \in AD$.

B. Hình thang $HKMN$ với $N \in AD$ và $HK // MN$.

C. Tam giác HKL với $L = KM \cap BD$.

D. Tam giác HKL với $L = HM \cap AD$.

Lời giải.



Ta có HK, KM là đoạn giao tuyến của (HKM) với (ABC) và (BCD).

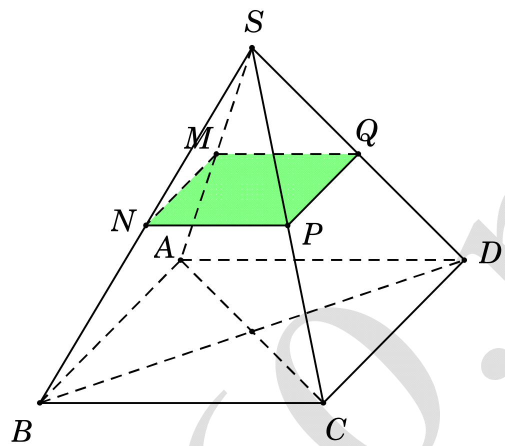
Trong mặt phẳng (BCD), do KM không song song với BD nên gọi $L = KM \cap BD$.

Vậy thiết diện là tam giác HKL. **Chọn C.**

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a $(a > 0)$. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng:

A. a^2. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{4}$. **D.** $\frac{a^2}{16}$.

Lời giải.



Gọi Q là trung điểm của SD.

Tam giác SAD có M, Q lần lượt là trung điểm của SA, SD suy ra $MQ // AD$.

Tam giác SBC có N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC suy ra $NP // BC$.

Mặt khác $AD // BC$ suy ra $MQ // NP$ và $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

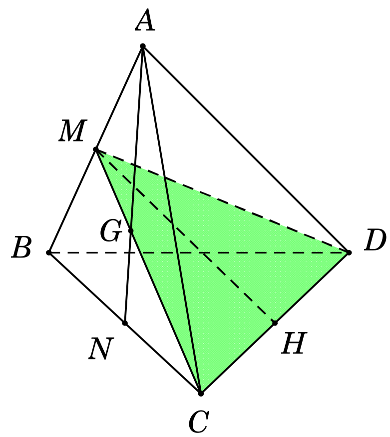
Khi đó M, N, P, Q đồng phẳng $\Rightarrow (MNP)$ cắt SD tại Q và $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với $mp\,(MNP)$.

Vậy diện tích hình vuông $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{a^2}{4}$. **Chọn C.**

Câu 29. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC suy ra $AN \cap MC = G$.

Dễ thấy mặt phẳng (GCD) cắt đường thẳng AB tại điểm M.

Suy ra tam giác MCD là thiết diện của mặt phẳng (GCD) và tứ diện $ABCD$.

Tam giác ABD đều, có M là trung điểm AB suy ra $MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều, có M là trung điểm AB suy ra $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow MH \perp CD \Rightarrow S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}.MH.CD$

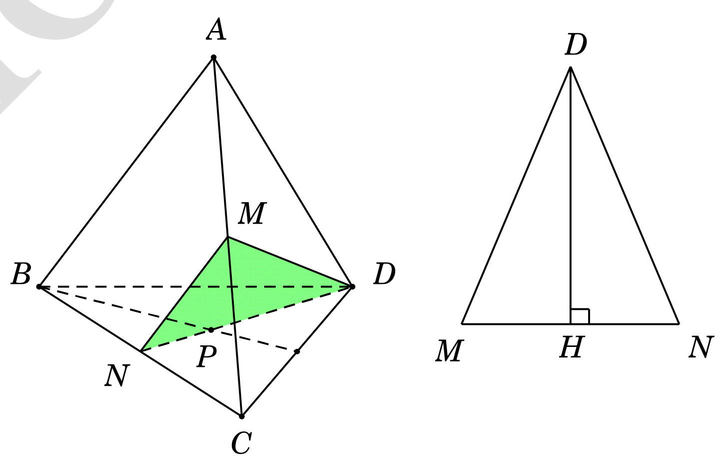
Với $MH = \sqrt{MC^2 - HC^2} = \sqrt{MC^2 - \frac{CD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **Chọn B.**

Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC; P là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Trong tam giác BCD có: P là trọng tâm, N là trung điểm BC. Suy ra N, P, D thẳng hàng.

Vậy thiết diện là tam giác MND.

Xét tam giác MND, ta có $MN = \frac{AB}{2} = a$; $DM = DN = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó tam giác MND cân tại D.
Gọi H là trung điểm MN suy ra $DH \perp MN$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta MND} = \frac{1}{2}MN.DH = \frac{1}{2}MN.\sqrt{DM^2 - MH^2} = \frac{a^2\sqrt{11}}{4}$. **Chọn C.**

Dạng 4: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

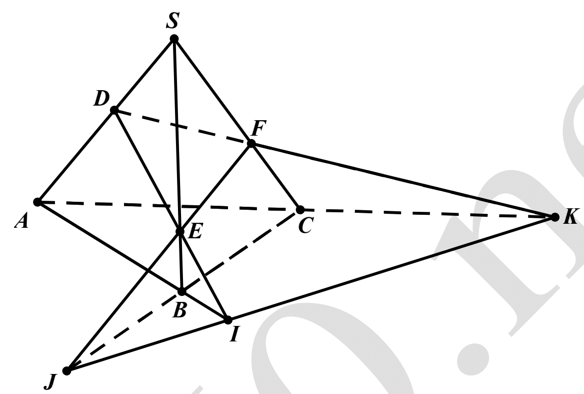
Phương pháp giải:

Để chứng minh ba điểm (hay nhiều điểm) thẳng hàng ta chứng minh chúng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt, khi đó chúng nằm trên đường thẳng giao tuyên của hai mặt phẳng nên thẳng hàng.

Ví dụ điển hình

Ví dụ 1. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA,SB và SC lấy các điểm D,E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I,J,K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$ (1).

Tương tự :

$$J = EF \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in EF \in (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases} \quad (2)$$

$$K = DF \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases} \quad (3)$$

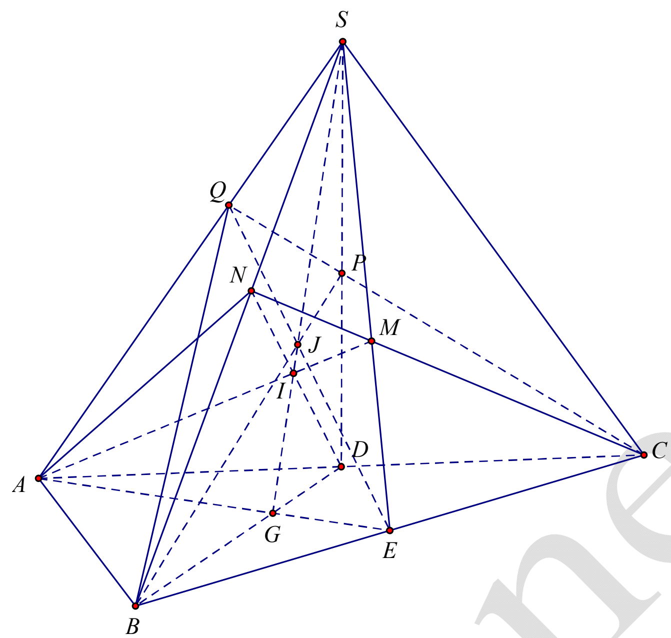
Từ (1),(2) và (3) ta có I,J,K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $S.ABC$ có D,E lần lượt là trung điểm của AC,BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (α) đi qua AC cắt SE,SB lần lượt tại M,N. Một mặt phẳng (β) đi qua BC cắt SD,SA tương ứng tại P và Q.

a) Gọi $I = AM \cap DN, J = BP \cap EQ$. Chứng minh S,I,J,G thẳng hàng.

b) Giả sử $K = AN \cap DM, L = BQ \cap EP$. Chứng minh S,K,L thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có:

$S \in (SAE) \cap (SBD)$, (1)

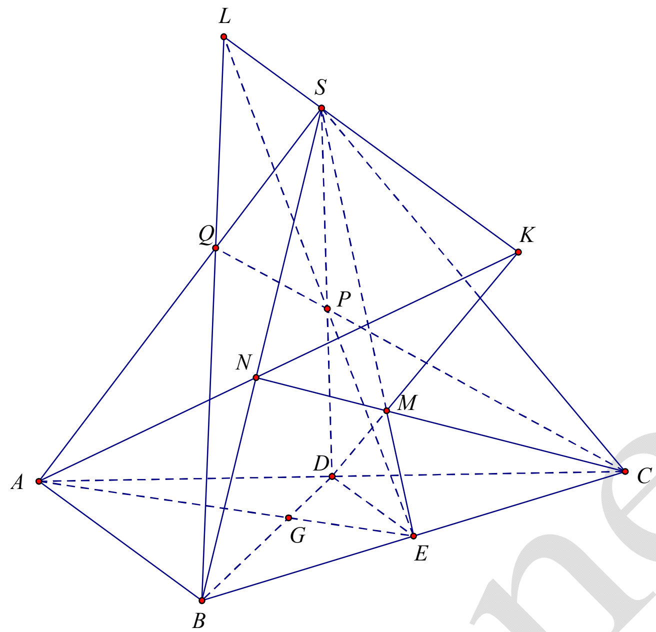
$$G = AE \cap BD \Rightarrow \begin{cases} G \in AE \subset (SAE) \\ G \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G \in (SAE) \\ G \in (SBD) \end{cases} \quad (2)$$

$$I = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in DN \subset (SBD) \\ I \in AM \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{I} \in (\mathrm{SBD}) \\ \mathrm{I} \in (\mathrm{SAE}) \end{cases} \quad (3)$$

$$J = BP \cap EQ \Rightarrow \begin{cases} J \in BP \subset (SBD) \\ J \in EQ \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SBD) \\ J \in (SAE) \end{cases} \quad (4)$$

Từ (1),(2),(3) và (4) ta có S, I, J, G là điểm chung của hai mặt phẳng (SBD) và (SAE) nên chúng thẳng hàng.

b)



Ta có:

$S \in (SAB) \cap (SDE)$

$K = AN \cap DM \Rightarrow \begin{cases} K \in AN \subset (SAB) \\ K \in DM \subset (SDE) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAB) \cap (SDE)$

$L = BQ \cap EP \Rightarrow \begin{cases} L \in BQ \subset (SAB) \\ L \in EP \subset (SDE) \end{cases} \Rightarrow L \in (SAB) \cap (SDE)$

Vậy S, K, L là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SDE) nên chúng thẳng hàng.

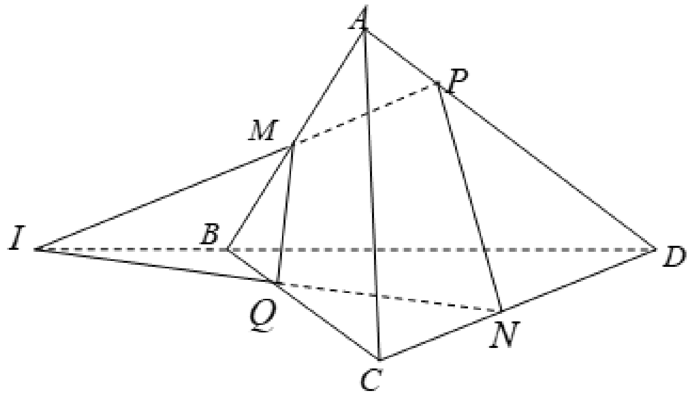
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD và BC lần lượt tại P, Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C. **B.** I, B, D. **C.** I, A, B. **D.** I, C, D.

Lời giải

Chọn B.



Ta có MP cắt NQ tại $I \Rightarrow \begin{cases} I \in MP \\ I \in NQ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (ABD) \\ I \in (CBD) \end{cases}$.

$\Rightarrow I \in (ABD) \cap (CBD)$.

$\Rightarrow I \in BD$.

Vậy I, B, D thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AD€\ BC)$. Gọi I là giao điểm của AB và DC, M là trung điểm SC. DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. S, I, J thẳng hàng.

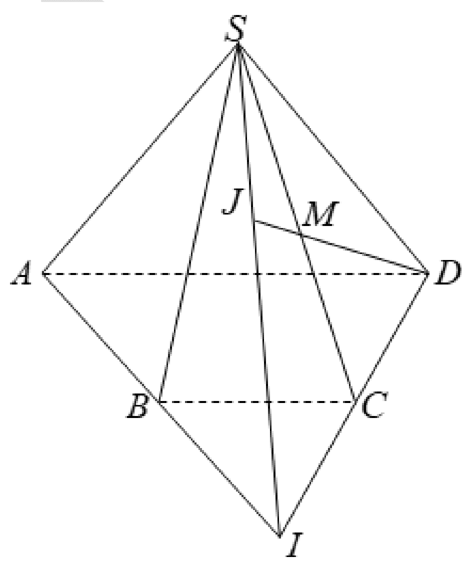
B. $DM \subset mp(SCI)$.

C. $JM \subset mp(SAB)$.

D. $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Lời giải

Chọn C.



- S, I, J thẳng hàng vì ba điểm cùng thuộc hai mp (SAB) và (SCD) nên A đúng.
- $M \in SC \Rightarrow M \in (SCI)$ nên $DM \subset mp(SCI)$ vậy B đúng.
- $M \notin (SAB)$ nên $JM \not\subset mp(SAB)$ vậy C sai.
- Hiển nhiên D đúng theo giải thích A.

Ví dụ 3: Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB và SC lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Ba điểm B, J, K thẳng hàng

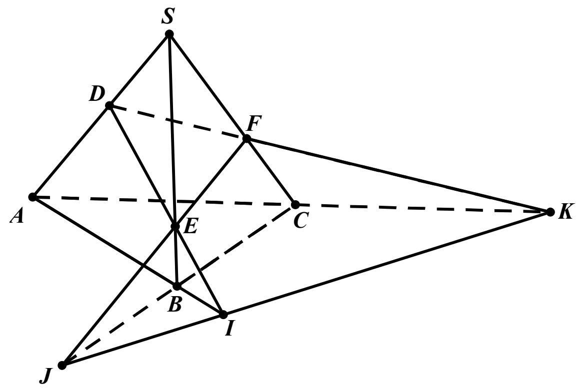
B. Ba điểm I, J, K thẳng hàng

C. Ba điểm I, J, K không thẳng hàng

D. Ba điểm I, J, C thẳng hàng

Lời giải

Chọn B.



Ta có $I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$ (1).

Tương tự $J = EF \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in EF \in (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases}$ (2)

$K = DF \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases}$ (3)

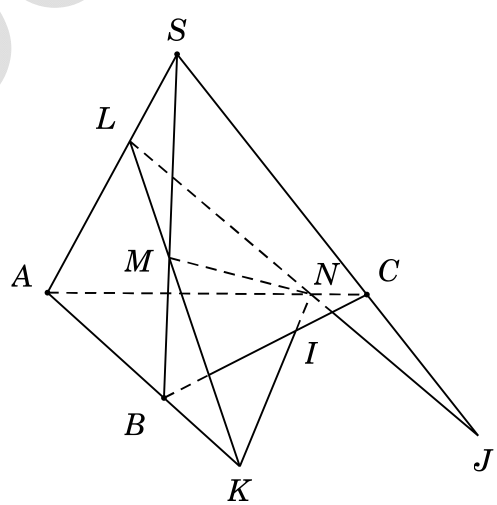
Từ (1),(2) và (3) ta có I, J, K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 4: Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC. Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. K, I, J. **B.** M, I, J. **C.** N, I, J. **D.** M, K, J.

Lời giải

Chọn B.



Ta có

- $M \in SB$ suy M là điểm chung của (LMN) và (SBC).
- I là điểm chung của (LMN) và (SBC).
- J là điểm chung của (LMN) và (SBC).

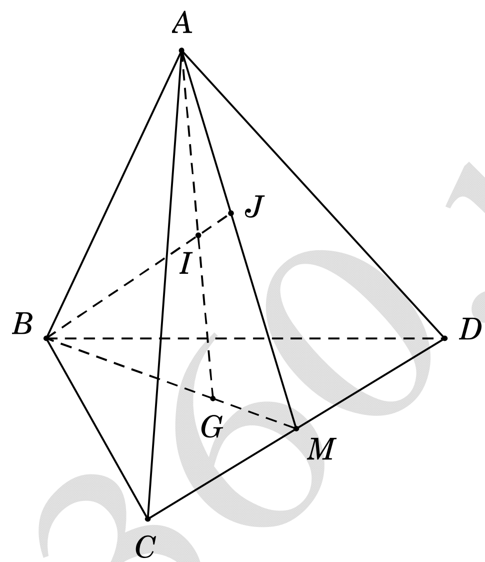
Vậy M, I, J thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của (LMN) và (SBC).

Ví dụ 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD, I là điểm ở trên đoạn thẳng AG, BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $AM = (ACD) \cap (ABG)$.
B. A, J, M thẳng hàng.
C. J là trung điểm của AM.
D. $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Do $BG \cap CD = M \Rightarrow \begin{cases} M \in BG \subset (ABG) \Rightarrow M \in (ABG) \\ M \in CD \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow M$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

$\Rightarrow (ABG) \cap (ACD) = AM \longrightarrow$ A đúng.

Ta có $\begin{cases} BI \subset (ABG) \\ AM \subset (ABM) \\ (ABG) \equiv (ABM) \end{cases} \Rightarrow AM, BI$ đồng phẳng.

$\Rightarrow J = BI \cap AM \Rightarrow A, J, M$ thẳng hàng $\longrightarrow$ B đúng.

Ta có $\begin{cases} DJ \subset (ACD) \\ DJ \subset (BDJ) \end{cases} \Rightarrow DJ = (ACD) \cap (BDJ) \longrightarrow$ D đúng.

Điểm I di động trên AG nên J có thể không phải là trung điểm của AM
$\longrightarrow$ C sai.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N, P tương ứng trên SA, SB, SC sao cho MN, NP và PM cắt mặt phẳng (ABC) tương ứng tại các điểm D, E, F. Khi đó có thể kết luận gì về ba điểm D, E, F

A. D, E, F thẳng hàng.

B. D, E, F tạo thành tam giác.

C. D, E, F cùng thuộc một mặt phẳng.

D. D, E, F không cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn A.

Ví dụ 7: Cho $ABCD$ và $AMCN$ là hai hình bình hành có chung đường chéo AC. Khi đó có thể kết luận gì về bốn điểm B, M, D, N?

A. B, M, D, N tạo thành tứ diện.

B. B, M, D, N tạo thành tứ giác.

C. B, M, D, N thẳng hàng.

D. Chỉ có ba trong số bốn điểm B, M, D, N thẳng hàng.

Lời giải

Chọn B.

Dạng 5: Chứng minh 3 đường thẳng đồng quy .

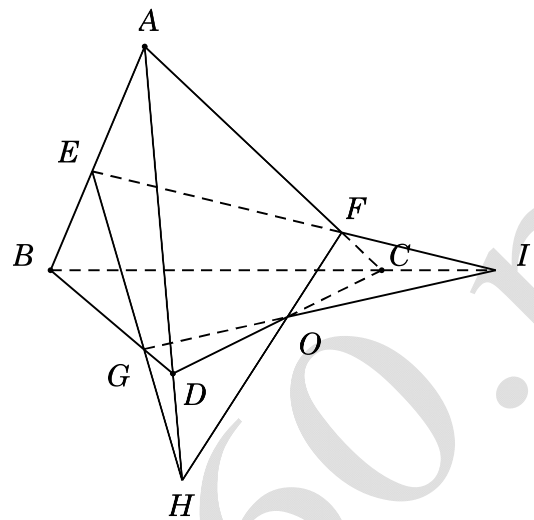
Phương pháp :

Muốn chứng minh 3 đường thẳng đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba

Ví dụ : Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, cắt EG tại H. Ba đường nào sau đây đồng quy?

A. CD, EF, EG. **B.** CD, IG, HF. **C.** AB, IG, HF. **D.** AC, IG, BD.

Lời giải.



Phương pháp: Để chứng minh ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β); đồng thời d_3 là giao tuyến (α) và (β).

Gọi $O = HF \cap IG$. Ta có

- $O \in HF$ mà $HF \subset (ACD)$ suy ra $O \in (ACD)$.
- $O \in IG$ mà $IG \subset (BCD)$ suy ra $O \in (BCD)$.

Do đó $O \in (ACD) \cap (BCD)$. (1)

Mà $(ACD) \cap (BCD) = CD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in CD$.

Vậy ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy. **Chọn B.**

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M. Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB). Mệnh đề nào sau đây đúng?

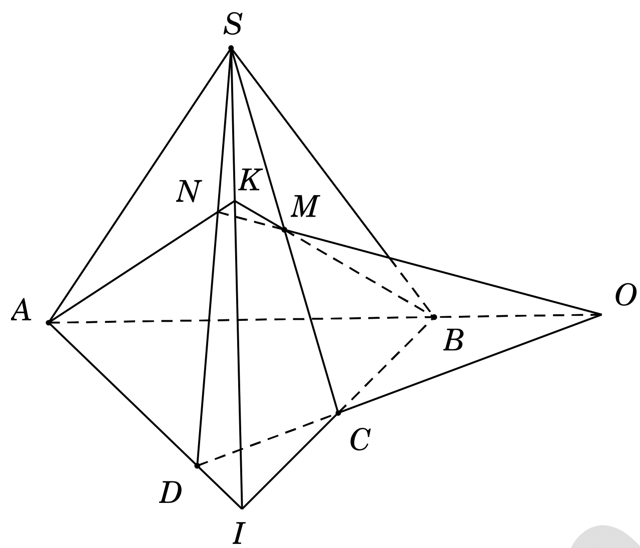
A. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một song song.

B. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một cắt nhau.

C. Ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

D. Ba đường thẳng AB, CD, MN cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải.



Gọi $I = AD \cap BC$. Trong mặt phẳng (SBC), gọi $K = BM \cap SI$. Trong mặt phẳng (SAD), gọi $N = AK \cap SD$.
Khi đó N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB).

Gọi $O = AB \cap CD$. Ta có:

- $O \in AB$ mà $AB \subset (AMB)$ suy ra $O \in (AMB)$.
- $O \in CD$ mà $CD \subset (SCD)$ suy ra IJ, MN, SE.

Do đó $O \in (AMB) \cap (SCD)$. $\quad (1)$

Mà $(AMB) \cap (SCD) = MN$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $O \in MN$. Vậy ba đường thẳng $AB,\ CD,\ MN$ đồng quy. **Chọn C.**

Bài 3. Cho chóp S.ABCD có AB không song song với CD, M trung điểm SC.
a) Tìm giao điểm N của SD và (ABM)
b) O = AC ∩ BD. CMR: SO, AM, BN đồng quy
Bài 4. Cho chóp S.ABCD có AB ∩ CD = E và I, J là trung điểm SA, SB; lấy N tùy ý trên SD.
a) Tìm giao điểm M của SC và (IJN)
b) CMR: IJ, MN, SE đồng quy

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG
NHẬN BIẾT
Câu 1: Kí hiệu nào sau đây là tên của mặt phẳng
A. a B. mpQ <u>C.</u> (P) D. mp AB
Câu 2: Cho điểm A thuộc mặt phẳng (P), mệnh đề nào sau đây đúng :
A. $A \in P$ B. $A \in (P)$ C. $A \subset mp(P)$ <u>D.</u> $A \subset mpP$
Câu 3: Khi điểm M thuộc đường thẳng d, mệnh đề nào sau đây đúng :
A. $M \subset d$ B. $M \notin d$ C. $M \in d \not\subset (P) \Rightarrow M \notin (P)$ <u>D.</u> $M \in d$
Câu 3: Cho đường thẳng a thuộc mặt phẳng (Q), khi đó mệnh đề nào sau đây sai ?
A. $a \subset (Q)$ B. $M \in a \subset (Q) \Rightarrow M \subset (Q)$
<u>C.</u> $a \in mp(Q)$ D. a và (Q) có vô số điểm chung
Câu 4: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai :

A. Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng
B. Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
C. Dùng nét đứt để biểu diễn cho đường bị che khuất
D. Hình biểu diễn của hai đường cắt nhau có thể là hai đường song song nhau

Câu 5: Cho mp(P) và đường thẳng $d \subset (P)$. Mệnh đề nào sau đây đúng :

A. Nếu $A \notin d$ thì $A \notin (P)$

B. Nếu $A \in (P)$ thì $A \in d$

C. $\forall A, A \in d \Rightarrow A \in (P)$

D. Nếu 3 điểm A,B,C $\in (P)$ và A,B,C thẳng hàng thì A,B,C $\in d$

Câu 6: Cho tam giác ABC. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tam giác ABC?

A. 1 B. 2 C. 3 D.4

Câu 7: Có bao nhiêu cách xác định một mặt phẳng?

A. 1 B. 2 C. 3 D.4

Câu 8: Tìm phát biểu sai trong các phát biểu sau?

A. Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi nó đi qua 3 điểm.
B. Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một đường thẳng.
C. Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau
D. Cả A, B, C đều sai.

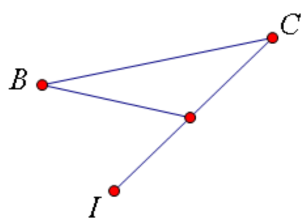
Câu 9: Trong không gian cho 4 điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

A. 6 B. 4 C. 3 D.2

Câu 10: Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất ?

A. Ba điểm B. Một điểm và một đường thẳng
C. Hai đường thẳng cắt nhau D. Bốn điểm

Câu 11: Cho tam giác ABC, lấy điểm I trên cạnh AC kéo dài (hình bên)



Các mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai ?

A. $A \in (ABC)$ B. $I \in (ABC)$ C. $(ABC) \equiv (BIC)$ D. $BI \subset (ABC)$

Câu 12: Trong các cách viết dưới đây, cách nào viết sai ?

A. $(A \in (P)$ và $B \notin (P)) \Rightarrow AB \not\subset (P)$ B. $a \cap (P) = \{A\} \Rightarrow a \not\subset (P)$

C. $(P) \cap (Q) = \{A\} \Rightarrow (P) \cap (Q) = a$ D. $(P) \subset (Q) \Rightarrow (P) \equiv (Q)$

Câu 13: Cho hình chóp S.ABCD với đáy là tứ giác ABC có các cạnh đối không song song. Giả sử $AC \cap BD = O, AD \cap BC = I$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là

A. SC B. SB C. SO D. SI

Câu 14: Cho hình chóp S. ABCD với ABCD là hình bình hành tâm O. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) là :

A. AC B. BC C. AB D. BD

Câu 15: Cho hình chóp S. ABCD với ABCD là hình bình hành tâm O. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SBD) là :

A. SA B. SB C. SC D. SO

Câu 16: Cho hình chóp S. ABCD với ABCD là hình bình hành tâm O. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là :

A. SA B. SB C. SC D. SO

Câu 17: Cho S là một điểm không thuộc mặt hình thang ABCD (AB//CD và AB > CD). Gọi I là điểm của AD và BC. Khi đó giao tuyến của hai mp (SAD) và (SCD) là

A. SC B. SD C. SI D. BI

Câu 18: Cho 4 điểm A,B,C,D không đồng . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên BC lấy điểm P sao cho BP = 2 PD. Gọi Q là giao điểm của CD và NP . Khi đó giao điểm của CD và (MNP) là ?

A. P B. D C. M D. Q

Câu 19: Cho 4 điểm A,B,C,D không đồng . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên BC lấy điểm P sao cho BP = 2 PD. Gọi Q là giao điểm của CD và NP . Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD) là ?

A. MP B. MQ C. CQ D. NQ

Câu 20: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng mà hai đường thẳng này lần lượt nằm trên hai mặt phẳng cắt nhau

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước.

C. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.

D. Ba điểm không thẳng hàng cùng thuộc một mặt phẵng duy nhất.

Thông hiểu:

Trong mp (α), Cho tứ giác ABCD có AB cắt C tại E, AC cắt B tại F, S là điểm không thuộc (α)

Câu 21: Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là:

A. SE B. SD C. CD D. AC

Câu 22: Giao tuyến của (SAC) và (SBD) là:

A. SC B. AE C. SF D. SE

Câu 23: Gọi M, N lần lượt là giao điểm của EF với AD và BC. Giao tuyến của (SEF) với (SAD) là:

A. SN B. SM C. MN D. DN

Câu 24: Gọi M, N lần lượt là giao điểm của EF với AD và BC. Giao tuyến của (SEF) với (SBC) là:

A. SN B. SM C. MN D. DN

Trong mặt phẳng (α), cho hình bình hành ABCD tâm O, S là một điểm không thuộc (α). Gọi M,N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD và SO. Đường thẳng MN cắt AB, AC và AD tạ M_1, N_1 và O_1. Nối O_1P cắt SA tại P_1, nối M_1P_1 cắt SB tại M_2, nối N_1P_1 cắt SD tại N_2.

Câu 25: Khi đó giao tuyến của (MNP) với (SAB) là

A. P_1N_2 B. P_1M_2 C. P_1C D. M_1N_1

Câu 26: Khi đó giao tuyến của (MNP) với (SAD) là ?

A. P_1N_2 B. P_1N_1 C. MN_2 D. PN_2

Câu 27: Khi đó giao tuyến của (MNP) với (SCD) là ?

A. P_1N B. P_1N_1 C. MN_2 D. NN_2

Câu 28: Khi đó thiết diện của mặt phẳng (MNP) với hình chóp S.ABCD là

A. tam giác MNP B. Tứ giác BM_2N_2N C. Ngũ giác $NMM_2P_1N_2$ D. Tam giác $P_1M_1N_1$

Câu 29: Cho tứ iện ABCD, M là trung điểm của AB, N là điểm trên AC mà $AN = \frac{1}{4}AC$, P là điểm trên đoạn AD mà $AP = \frac{2}{3}AD$. Gọi E là giao điểm của MP và BD, F là giao điểm của MN và BC. Khi đó giao tuyến của (BCD) và (CMP) là :

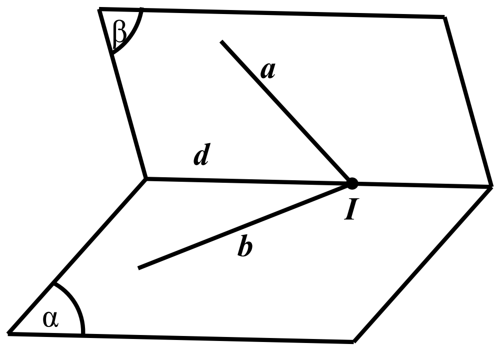
A. CP B. CE C. MF D. NE

Câu 30: Cho tứ iện ABCD, M là trung điểm của AB, N là điểm trên AC mà $AN = \frac{1}{4}AC$, P là điểm trên đoạn AD mà $AP = \frac{2}{3}AD$. Gọi E là giao điểm của MP và BD, F là giao điểm của MN và BC. Khi đó giao tuyến của (BCD) và (BCD) là :

A. NE B. EF C. ME D. NE

Dạng 6: Bài toán quỹ tích: Tìm giao điểm của hai đường thẳng di động

Phương pháp giải



Để tìm tập hợp giao điểm I của hai đường thẳng thay đổi a, b ta chọn hai mặt phẳng cố định (α) và (β) cắt nhau lần lượt chứa a, b, khi đó $I = a \cap b \Rightarrow \begin{cases} I \in a \subset (\alpha) \\ I \in b \subset (\beta) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in d = (\alpha) \cap (\beta)$

Vậy điểm I thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

Để chứng minh đường thẳng d đi qua một điểm cố định ta thực hiện theo các bước sau

- Chọn một điểm cố định J thuộc hai mặt phẳng (δ) và (γ)

- Chứng minh d là giao tuyến của hai mặt phẳng (δ) và (γ), khi đó d đi qua điểm cố định J.

Ví dụ điển hình

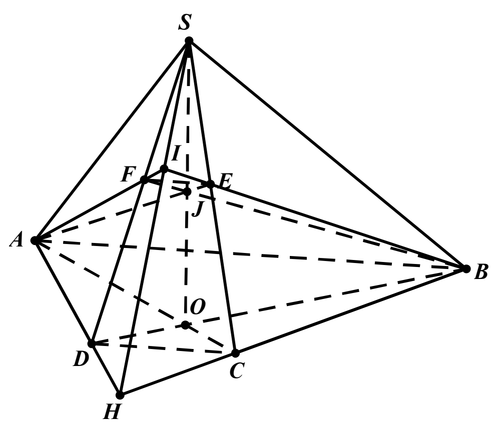
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB. Một mặt phẳng (P) quay quanh AB cắt các cạnh SC, SD tại các điểm tương ứng E, F.

a) Tìm tập hợp giao điểm I của AF và BE.

b) Tìm tập hợp giao điểm J của AE và BF.

Lời giải.

a) ***Phần thuận:***



Ta có $I = AF \cap BE \Rightarrow \begin{cases} I \in AF \\ I \in BE \end{cases}, \begin{cases} AF \subset (SAD) \\ BE \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC)$.

Trong $(ABCD)$ gọi $H = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} H \in AD \\ H \in BC \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} H \in (SAD) \\ H \in (SBC) \end{cases}$.

$\Rightarrow SH = (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow I \in SH$.

Giới hạn:

Khi E chạy đến C thì F chạy đến D và I chạy đến H.

Khi E chạy đến S thì F chạy đến S và I chạy đến S.

Phần đảo:

Lấy điểm I bất kì thuộc đoạn SH, trong (SAH) gọi $F = SD \cap AI$, trong (SBH) gọi $E = SH \cap BI$ khi đó $(ABEF)$ là mặt phẳng quay quanh AB cắt các cạnh SC, SD tại E, F và I là giao điểm của AF và BE.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn SH.

b) Ta có $J = AE \cap BF \Rightarrow \begin{cases} J \in AE \\ J \in BF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SAC) \\ J \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAC) \cap (SBD)$

Nhưng $SO = (SAC) \cap (SBD)$ nên $J \in SO$.

Khi E chạy đến chạy đến C thì F chạy đến D và J chạy đến O.

Khi E chạy đến S thì F chạy đến S và J chạy đến S.

Lập luận tương tự trên ta có tập hợp điểm J là đoạn SO.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABDC$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định.

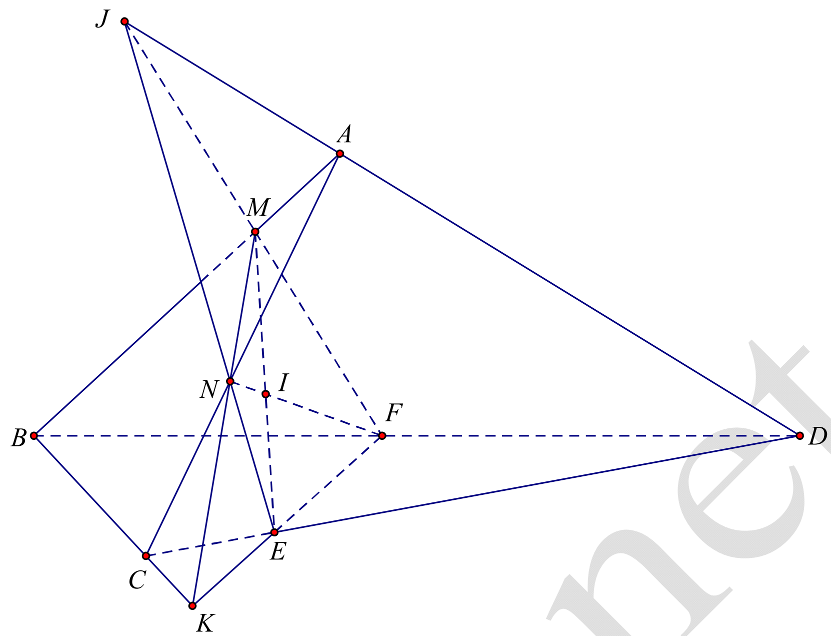
b) Tìm tập hợp giao điểm I của ME và NF.

c) Tìm tập hợp giao điểm J của MF và NE.

Lời giải.

a) Trong (ABC) gọi $K = MN \cap BC$ thì K cố định và $\begin{cases} K \in MN \\ K \in BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \in (MNP) \\ K \in (BCD) \end{cases}$

Lại có $EF = (P) \cap (BCD) \Rightarrow K \in EF$ Vậy EF luôn đi qua điểm K cố định



b) ***Phần thuận:***

Trong (P) gọi $I = ME \cap NF \Rightarrow \begin{cases} I \in ME \subset (MCD) \\ I \in NF \subset (NBD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (MCD) \cap (NBD)$.

Gọi $O = CM \cap BN \Rightarrow OD = (MCD) \cap (NBD) \Rightarrow I \in OD$

Giới hạn:

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và I chạy đến O

Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và I chạy đến D

Phần đảo:

Gọi I là điểm bất kì trên đoạn OD, trong (MCD) gọi $E = MI \cap CD$, trong (NBD) gọi $F = NI \cap BD$ suy ra $(MNEF)$ là mặt phẳng quay quanh MN cắt các cạnh DB, DC tại các điểm E, F và $I = ME \cap NF$.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn OD.

c) Gọi $J = MF \cap NE \Rightarrow \begin{cases} J \in MF \subset (ADB) \\ J \in NE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow J \in (ADB) \cap (ACD)$.

Mà $AD = (ADC) \cap (ADB)$.

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và J chạy đến A

Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và J chạy đến D

Từ đó ta có tập hợp điểm J là đường thẳng AD trừ các điểm trong của đoạn AD.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi, hai cạnh bên AB và CD kéo dài cắt nhau tại E. Các điểm M, N di động tương ứng trên các cạnh SB và SC sao cho AM cắt DN tại I. Khi đó có thể kết luận gì về điểm I?

A. I chạy trên một đường thẳng.
B. I chạy trên tia SE.
C. I chạy trên đoạn thẳng SE.
D. I chạy trên đường thẳng SE.

Lời giải

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi và $AD \cap BC = E$. Các điểm M, N tương ứng thuộc các cạnh SA và SB sao cho $DM \cap CN = I$. Khi M, N tương ứng di động trên các đường thẳng SA và SB thì ta có thể kết luận được gì về điểm I?

A. Cố định.
B. Di động trên đoạn thẳng SE.
C. Di động trên đường thẳng SE.
D. Di động tùy ý trong không gian.

Lời giải

Chọn C.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NAD)

b) Gọi E,F là các điểm lần lượt trên các cạnh AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (DEF).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là tứ giác $ABCD$, AB cắt CD tại E, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAB) và (SCD); (SAC) và (SBD).

b) (SEF) với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm thuộc miền trong tam giác ABD, N một điểm thuộc miền trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (BCD) và (AMN).

b) (ABC) và (DMN).

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP=3PD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (MNP).

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, M và N là các điểm lần lượt trên các cạnh SC,BC.

a) Tìm giao điểm của AM với (SBD).

b) Tìm giao điểm của SD với (SMN).

Bài 6. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O, A,B là hai điểm nằm ngoài (α) sao cho AB cắt (α)với (α). Một mặt phẳng (β) quay quanh AB cắt d và d' lần lượt tại M,N.

a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi $I=AM\cap BN$, chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định.

c) Gọi $J=AN\cap BM$, chứng minh J thuộc một đường thẳng cố định.

d) Chứng minh IJ đi qua một điểm cố định.

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK=2KD$.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng CD với (IJK) và chứng minh $DE=DC$.

b) Xác định giao điểm F của đương thẳng AD với (IJK) và chứng minh $FA=2FD$.

c) Chứng minh $FK \parallel AB$.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm E của AM với (SBD). Tính $\frac{EM}{EA}$.

b) Tìm giao điểm F của SD với (MAB) và chứng minh F là trung điểm của SD.

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD.

a) Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh I,C,D thẳng hàng và $IC = 2ID$.

b) Tìm giao điểm J của AD với (MOG). Tính $\frac{JD}{JA}$.

c) Tìm giao điểm K của SA với (MOG). Tính $\frac{KS}{KA}$.

Bài 10. Cho mặt phẳng (α) xác định bởi hai đường thẳng a,b cắt nhau ở O và c là đường thẳng cắt (α) tại I $(I \neq O)$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và $mp(O,c)$

b) Gọi M là một điểm trên c và không trùng với I. Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (M,a) và (M,b) và chứng minh Δ luôn nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di động trên c.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB và SC.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AMN)

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN).

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I,J lần lượt là các điểm cố định trên các cạnh SA và SC (IJ không song song với AC).

Một mặt phẳng (α) quay quanh IJ cắt SB tại M và cắt SD tại N.

a) Chứng minh các đường thẳng MN, IJ, SO đồng qui

b) Giả sử $AD \cap BC = E, IN \cap JM = F$. Chứng minh S,E,F thẳng hàng.

c) Gọi $P = IN \cap AD, Q = JM \cap BC$. Chứng minh đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi (α) di động.

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh AB, BC, CS lấy các điểm M,N,P sao cho MN và AC không song song với nhau.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

b) Gỉa sử $I = MP \cap NQ$, chứng minh I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi P chạy trên cạnh SC.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là một điểm trên cạnh SD sao cho $SM = \frac{1}{3}SD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng BM với (SAC).

b) N là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Xác định giao tuyến d của (SBC) và (AMN). Chứng minh d luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Xác định thiết diện của hình chóp với (MNG).

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC tương ứng tại các điểm A', B', C'. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Tìm giao điểm D' của (α) với SD.

b) Chứng minh $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, J là hai điểm trên các cạnh AD và SB.

a) Tìm giao các điểm K, L của các đường thẳng IJ và DJ với (SAC).

b) Giả sử $O = AD \cap BC, M = OJ \cap SC$. Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD, $AB = 2CD$. Gọi I là trung điểm của SA, J là một điểm trên cạnh SC với $JS > JC$. Gọi (α) là mặt phẳng quay quanh IJ, cắt các cạnh SD, SB tại M, N. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

Bài 18. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q. Tìm tập hợp giao điểm của MP và NQ.