

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A) CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

D) CÁC ĐỊNH NGHĨA

1) Vectơ, giá và độ dài của vectơ

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Kí hiệu \overline{AB} chỉ vectơ có điểm đầu là A điểm cuối là B. Vectơ còn được kí hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$

Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Ngược lại hai vectơ có giá cắt nhau được gọi là hai vectơ không cùng phương. Hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc khác hướng.

Độ dài của vectơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Vectơ có độ dài bằng 1 được gọi là vectơ đơn vị. Ta kí hiệu độ dài vectơ là $|\vec{a}|, |\vec{x}|, |\vec{u}|, |\overline{AB}|$. Như vậy $|\overline{AB}| = AB$.

2) Hai vectơ bằng nhau, vectơ - không

Hai vectơ \vec{a} và \vec{b} được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Khi đó ta kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

Vectơ - không là một vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, nghĩa là với mọi điểm A tùy ý ta có $\overline{AA} = \vec{0}$ và khi đó mọi đường thẳng đi qua điểm A đều chứa vectơ \overline{AA} . Do đó ta quy ước mọi vectơ $\vec{0}$ đều bằng nhau, có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ. Do đó ta viết $\overline{AA} = \overline{BB}$ với mọi điểm A, B tùy ý.

II) PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ VECTƠ

1) Định nghĩa:

• Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Trong không gian lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$. Vectơ \overline{AC} được gọi là tổng của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} , đồng thời được kí hiệu $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

• Vectơ \vec{b} là vectơ đối của \vec{a} nếu $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và \vec{a}, \vec{b} ngược hướng nhau, kí hiệu $\vec{b} = -\vec{a}$.

• $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

2) Tính chất

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán).

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp).

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$

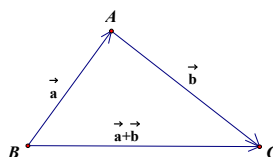
3) Các quy tắc cần nhớ khi tính toán

a) Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C bất kì ta có:

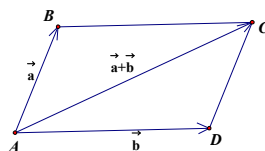
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

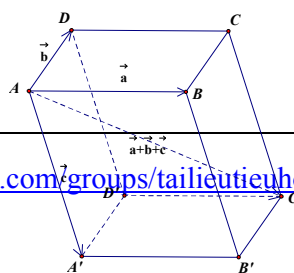


b) Quy tắc hình bình hành

Với ABCD là hình bình hành ta có: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$



c) Quy tắc hình hộp



Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với AB, AD, AA' là ba cạnh có chung đỉnh A và AC' là đường chéo, ta có: $\overline{AC'} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'}$

d) Mở rộng quy tắc ba điểm

Cho n điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ bất kì, ta có:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}$$

III). PHÉP NHÂN VEC TƠ VỚI MỘT SỐ

1) Định nghĩa

Cho số $k \neq 0$ và vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vector \vec{a} là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với vector \vec{a} khi $k > 0$, ngược hướng với vector \vec{a} khi $k < 0$ và có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$

2). Tính chất

Với mọi vec tơ \vec{a}, \vec{b} với mọi số m, n ta có:

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$$

$$(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

$$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$$

$$1.\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

$$0.\vec{a} = \vec{0}; k.\vec{0} = \vec{0}$$

IV). ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẪNG CỦA BA VEC TƠ

1). Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vec tơ trong không gian

Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$ trong không gian. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overline{OA} = \vec{a}, \overline{OB} = \vec{b}, \overline{OC} = \vec{c}$. Khi đó xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp các đường thẳng OA,OB,OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, ta nói ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Trường hợp các đường thẳng OA,OB,OC cùng nằm trong một mặt phẳng, ta nói ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

2). Định nghĩa

Trong không gian ba vector được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

3). Điều kiện để ba vector đồng phẳng:

Định lí 1: Trong không gian cho hai vector không cùng phương \vec{a} và \vec{b} và một vector \vec{c} . Khi đó ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

4). Phân tích (biểu thị) một vector theo ba vec tơ không đồng phẳng.

Định lí 2:

Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vector không đồng phẳng. Với mọi vector \vec{x} trong không gian ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất.

Cụ thể $\overline{OX} = \vec{x}, \overline{OA} = \vec{a}, \overline{OB} = \vec{b}, \overline{OC} = \vec{c}$ và $\overline{OX} = \overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'}$ với $\overline{OA'} = m\vec{a}, \overline{OB'} = n\vec{b}, \overline{OC'} = p\vec{c}$. Khi đó $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

B) PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh đẳng thức vector

PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp để biến đổi về này thành về kia và ngược lại.
Sử dụng các tính chất của phép toán về vec tơ và các tính chất hình học của hình đã cho.

Câu 1: Cho hình hộp ABCD.EFGH. Chứng minh $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AG}$

LỜI GIẢI

Theo tính chất hình hộp:

$$\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} = \overline{AG}$$

Dựa vào quy tắc hình hộp ta có thể viết ngay kết quả:

$$\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AG}$$

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng $\overline{SA} + \overline{SC} = \overline{SB} + \overline{SD}$

LỜI GIẢI

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

Ta có $\overline{SA} + \overline{SC} = 2\overline{SO}$ (1) và $\overline{SB} + \overline{SD} = 2\overline{SO}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{SA} + \overline{SC} = \overline{SB} + \overline{SD}$

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Chứng minh:
 $\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{SD}^2$

LỜI GIẢI

Gọi O là tâm của hình chữ nhật ABCD.

Ta có $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = |\overline{OD}|$

$$\overline{SA}^2 = (\overline{SO} + \overline{OA})^2 = \overline{SO}^2 + \overline{OA}^2 + 2\overline{SO} \cdot \overline{OA}$$

$$\overline{SC}^2 = (\overline{SO} + \overline{OC})^2 = \overline{SO}^2 + \overline{OC}^2 + 2\overline{SO} \cdot \overline{OC}$$

$$\Rightarrow \overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = 2\overline{SO}^2 + \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 + 2\overline{SO} \cdot (\overline{OA} + \overline{OC})$$

Mà $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{0}$ nên $\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = 2\overline{SO}^2 + \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được: $\overline{SB}^2 + \overline{SD}^2 = 2\overline{SO}^2 + \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2$

Từ đó suy ra $\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{SD}^2$

Câu 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh:
a). $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$
b). Điểm G là trọng tâm của tứ diện khi và chỉ khi: $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \overline{0}$

LỜI GIẢI

a). Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN} \quad (1) \quad \text{và} \quad \overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN} \quad (2).$$

Cộng (1) và (2) về theo về, ta có:

$$2\overline{MN} = \underbrace{\overline{MA} + \overline{MB}}_0 + \overline{AD} + \overline{BC} + \underbrace{\overline{DN} + \overline{CN}}_0 \Leftrightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}).$$

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được: $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD}).$

b). Theo tính chất trung điểm có:

$$\overline{GA} + \overline{GB} = 2\overline{GM} \text{ và } \overline{GC} + \overline{GD} = 2\overline{GN}$$

Do đó $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overline{GM} + 2\overline{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{GM} + \overline{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow G$ là trung điểm $MN \Leftrightarrow G$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$

- Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overline{SA} + \overline{SC} = \overline{SB} + \overline{SD}$. Điều ngược lại có đúng không?
- Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overline{SA} + \overline{SC} + \overline{SB} + \overline{SD} = 4\overline{SO}$.

LỜI GIẢI

- Ta có $\overline{SA} + \overline{SC} = \overline{SB} + \overline{SD} \Leftrightarrow \overline{SA} - \overline{SB} = \overline{SD} - \overline{SC} \Leftrightarrow \overline{BA} = \overline{CD}$.

Vậy với hình chóp $S.ABCD$ thì đáy $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overline{SA} + \overline{SC} = \overline{SB} + \overline{SD}$.

- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD thì:

$$\overline{OA} + \overline{OC} = 2\overline{OM} \text{ và } \overline{OB} + \overline{OD} = 2\overline{ON}$$

Theo đề bài có $\overline{SA} + \overline{SC} + \overline{SB} + \overline{SD} = 4\overline{SO}$

$$\Leftrightarrow \overline{SO} + \overline{OA} + \overline{SO} + \overline{OB} + \overline{SO} + \overline{OC} + \overline{SO} + \overline{OD} = 4\overline{SO}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overline{OM} + \overline{ON}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{OM} + \overline{ON} = \vec{0}$$

Điều này chứng tỏ ba điểm O, M, N thẳng hàng và O trung điểm của MN . Mặt khác $M \in AC, N \in BD, O = AC \cap BD \Rightarrow O \equiv M \equiv N$, có nghĩa O trung điểm của AC và BD , hay $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O . Chứng minh:

- $\overline{AC'} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'}$
- $\overline{AB} + \overline{B'C'} + \overline{D'D} = \overline{AD} + \overline{D'C'} + \overline{B'B} = \overline{A'C}$
- $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'} + \overline{OD'} = \vec{0}$

LỜI GIẢI

- Ta có $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là các hình bình hành, nên:

$$\overline{AC'} = \overline{AC} + \overline{AA'} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'}$$

- Ta có:

$$\overline{AB} + \overline{B'C'} + \overline{D'D} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{C'C} = \overline{AC} + \overline{C'C} = \overline{A'C'} + \overline{C'C} = \overline{A'C}$$

Vì $\overline{AD} = \overline{B'C'}$; $\overline{D'C'} = \overline{AB}$; $\overline{B'B} = \overline{D'D}$ nên:

$$\overline{AB} + \overline{B'C'} + \overline{D'D} = \overline{AD} + \overline{D'C'} + \overline{B'B} = \overline{A'C}$$

- Vì O là tâm nên O là trung điểm của các đường chéo AC', BD', CA' , do đó:

$$\begin{aligned} & \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'} + \overline{OD'} \\ &= \underbrace{\overline{OA} + \overline{OC'}}_0 + \underbrace{\overline{OB} + \overline{OD'}}_0 + \underbrace{\overline{OC} + \overline{OA'}}_0 + \underbrace{\overline{OD} + \overline{OB'}}_0 = \vec{0} \end{aligned}$$

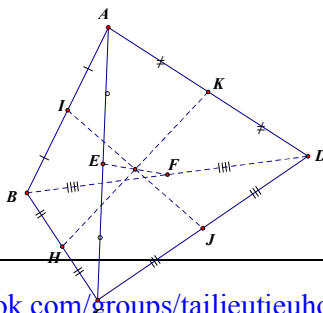
Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, H, K, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD . Chứng minh:

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2)$$

LỜI GIẢI

Ta có:

- $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AI} + \overline{IJ} + \overline{JD} + \overline{BI} + \overline{IJ} + \overline{JC} = 2\overline{IJ}$
 $\Rightarrow 4IJ^2 = AD^2 + BC^2 + 2\overline{AD} \cdot \overline{BC} \quad (1)$
- $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FB} + \overline{CE} + \overline{EF} + \overline{FD} = 2\overline{EF}$



$$\Rightarrow 4EF^2 = AB^2 + CD^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{CD} \quad (2)$$

$$\bullet \overline{AC} + \overline{DB} = \overline{AK} + \overline{KH} + \overline{HC} + \overline{DK} + \overline{KH} + \overline{HB} = 2\overline{KH}$$

$$\Rightarrow 4KH^2 = AC^2 + DB^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{DB} \quad (3)$$

Lấy (1), (2), (3) về cộng theo vế được: $4(IJ^2 + HK^2 + EF^2)$

$$= AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 + 2(\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB})$$

$$\text{Mà: } \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} = (\overline{AB} + \overline{BD})\overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB}$$

$$= \overline{AB}(\overline{BC} + \overline{CD}) + \overline{BD}(\overline{BC} + \overline{CA}) = \overline{AB} \cdot \overline{BD} + \overline{BD} \cdot \overline{BA} = \overline{BD}(\overline{AB} + \overline{BA}) = \vec{0}$$

$$\text{Do đó: } AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2)$$

Câu 8: Chứng minh rằng tứ diện ABCD và A'B'C'D' có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} = \vec{0}$

LỜI GIẢI

Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện ABCD và A'B'C'D'. Theo tính chất trọng tâm có:

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \vec{0} \quad \text{và} \quad \overline{G'A'} + \overline{G'B'} + \overline{G'C'} + \overline{G'D'} = \vec{0}$$

Sử dụng quy tắc ba điểm: $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overline{AG} + \overline{GG'} + \overline{G'A'} + \overline{BG} + \overline{GG'} + \overline{G'B'} + \overline{CG} + \overline{GG'} + \overline{G'C'} + \overline{DG} + \overline{GG'} + \overline{G'D'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG} + \overline{DG}}_0 + \underbrace{\overline{G'A'} + \overline{G'B'} + \overline{G'C'} + \overline{G'D'}}_0 + 4\overline{GG'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{GG'} = \vec{0} \Leftrightarrow G \equiv G' \text{ (đpcm).}$$

Câu 9: Cho tứ diện ABCD. Hãy xác định hai điểm E và F thỏa:

$$\text{a). } \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} \quad \text{b). } \overline{AF} = \overline{AB} + \overline{AC} - \overline{AD}$$

LỜI GIẢI

a) Gọi G trọng tâm tam giác BCD. Theo tính chất trọng tâm có

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} = 3\overline{AG} \Rightarrow \overline{AE} = 3\overline{AG}.$$

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD. Thì:

$$\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{AD} = 2\overline{AI} - 2\overline{AJ} = 2(\overline{AI} - \overline{AJ}) = 2\overline{JI} \Rightarrow \overline{AF} = 2\overline{JI}.$$

Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh:

$$\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC} = 3\overline{DG}$$

LỜI GIẢI

$$\text{Ta có: } \overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC} = \overline{DG} + \overline{GA} + \overline{DG} + \overline{GB} + \overline{DG} + \overline{GC} = 3\overline{DG} + \underbrace{\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}}_0$$

$$\text{Vậy } \overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC} = 3\overline{DG}.$$

Câu 10: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN, và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Chứng minh:

$$\text{a). } \overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} + \overline{ID} = \vec{0}$$

$$\text{b). } \overline{PI} = \frac{1}{4}(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}).$$

LỜI GIẢI

a). Theo tính chất trung điểm có: $\overline{MA} + \overline{MC} = \vec{0}$, $\overline{NB} + \overline{ND} = \vec{0}$, $\overline{IM} + \overline{IN} = \vec{0}$

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} + \overline{ID} = \overline{IM} + \overline{MA} + \overline{IN} + \overline{NB} + \overline{IM} + \overline{MC} + \overline{IN} + \overline{ND}$$

$$= 2 \left(\underbrace{\overline{IM} + \overline{IN}}_0 \right) + \underbrace{\overline{MA} + \overline{MC}}_0 + \underbrace{\overline{NB} + \overline{ND}}_0 = \vec{0}.$$

b). Theo câu a), ta chứng minh được: $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} + \overline{ID} = \vec{0}$. Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} + \overline{ID} = \overline{IP} + \overline{PA} + \overline{IP} + \overline{PB} + \overline{IP} + \overline{PC} + \overline{IP} + \overline{PD}$$

$$\Leftrightarrow 4\overline{IP} + (\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{PI} = \frac{1}{4}(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}).$$

DẠNG 2: TÍNH TOÁN VÀ BIỂU DIỄN

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overline{AA'} = \vec{a}$; $\overline{AB} = \vec{b}$; $\overline{AC} = \vec{c}$.

a). Hãy biểu diễn các véc tơ $\overline{B'C}$, $\overline{BC'}$ theo các véc tơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

b). Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Biểu thị véc tơ $\overline{AG'}$ qua \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

LỜI GIẢI

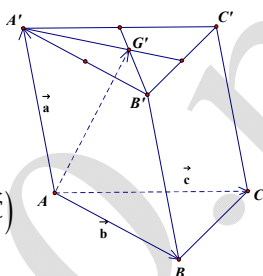
a). Ta có:

$$\bullet \overline{B'C} = \overline{B'B} + \overline{B'C'} = -\overline{AA'} + \overline{A'C'} - \overline{A'B'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\bullet \overline{BC'} = \overline{BB'} + \overline{BC} = \overline{AA'} + \overline{AC} - \overline{AB} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

b). Vì G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, nên có:

$$\begin{aligned} \overline{AG'} &= \frac{1}{3}(\overline{AA'} + \overline{AB'} + \overline{AC'}) = \frac{1}{3}(\overline{AA'} + \overline{AA'} + \overline{AB} + \overline{AA'} + \overline{AC}) \\ &= \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$



Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overline{AB} = \vec{a}$; $\overline{AD} = \vec{b}$; $\overline{AA'} = \vec{c}$. Hãy biểu thị các véc tơ $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{CA'}$, $\overline{DB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{A'D}$ theo các véc tơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

LỜI GIẢI

$$\overline{AC'} = \overline{AA'} + \overline{AC} = \overline{AA'} + \overline{AB} + \overline{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

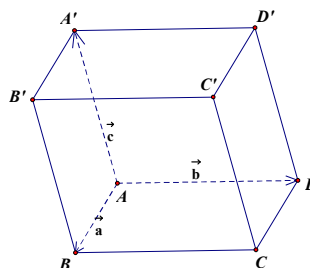
$$\overline{BD'} = \overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DD'} = -\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \overline{CA'} &= \overline{CC'} + \overline{CA} = \overline{AA'} - \overline{AC} = \overline{AA'} - (\overline{AB} + \overline{AD}) \\ &= \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}. \end{aligned}$$

$$\overline{DB'} = \overline{DA} + \overline{AB'} = -\overline{AD} + \overline{AA'} + \overline{AB} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\overline{BC'} = \overline{BB'} + \overline{BC} = \overline{AA'} + \overline{AD} = \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overline{A'D} = \overline{A'A} + \overline{A'D'} = -\overline{AA'} + \overline{AD} = \vec{b} - \vec{c}.$$



DẠNG 3: Chứng minh ba vector đồng phẳng.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dựa vào định nghĩa, chứng tỏ các vector \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} có giá song song với một mặt phẳng.

Ba vector \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} đồng phẳng \Leftrightarrow có cặp số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, trong đó \vec{a}, \vec{b} là hai vector không cùng phương.

Câu 1: a). Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $\overline{AM} = 3\overline{MD}$ và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overline{NB} = -3\overline{NC}$. Chứng minh rằng ba véc tơ \overline{AB} , \overline{DC} , \overline{MN} đồng phẳng.

b). Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABFE$ và K là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $BCGF$. Chứng minh ba véc tơ \overline{BD} , \overline{IK} , \overline{GF} đồng phẳng.

LỜI GIẢI

a). Theo giả thuyết có $\overline{AM} = 3\overline{MD}$ và $\overline{NB} = -3\overline{NC}$

Mặt khác $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN}$ (1).

Và $\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DC} + \overline{CN} \Rightarrow 3\overline{MN} = 3\overline{MD} + 3\overline{DC} + 3\overline{CN}$ (2).

Cộng đẳng thức (1) và (2) về theo về ta có:

$$4\overline{MN} = \underbrace{\overline{MA} + 3\overline{MD}}_0 + \overline{AB} + 3\overline{DC} + \underbrace{\overline{BN} + 3\overline{CN}}_0 \Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{DC}. \text{ Từ hệ thức này chứng tỏ ba véc tơ}$$

$\overline{AB}, \overline{DC}, \overline{MN}$ đồng phẳng.

b). Ta có $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = -\overline{GF} + (\overline{AD} - \overline{AC}) = -\overline{GF} - \overline{GF} - 2\overline{IK}$ (Vì $\overline{AC} = 2\overline{IK}$).

Vậy $\overline{BD} = -2\overline{GF} - 2\overline{IK}$. Từ hệ thức này chứng tỏ ba véc tơ $\overline{BD}, \overline{IK}, \overline{GF}$ đồng phẳng.

Câu 2: Trong không gian cho tam giác ABC.

a). Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc mp(ABC) thì có ba số x, y, z mà $x+y+z=1$ sao cho $\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}$ với mọi O.

b). Ngược lại có một điểm O trong không gian sao cho: $\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}$, trong đó $x+y+z=1$ thì điểm M thuộc mp(ABC).

LỜI GIẢI

a). Vì ABC là tam giác nên hai véc tơ $\overline{AB}, \overline{AC}$ không cùng phương. Điểm M thuộc (ABC) suy ra ba véc tơ $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AM}$ đồng phẳng, tức là có một cặp số y, z thỏa:

$$\overline{AM} = y\overline{AB} + z\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{OM} - \overline{OA} = y(\overline{OB} - \overline{OA}) + z(\overline{OC} - \overline{OA})$$

$$\Leftrightarrow \overline{OM} = (1-y-z)\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}$$

$$\text{Đặt } x = 1-y-z \Leftrightarrow x+y+z=1$$

$$\text{Khi đó ta có } \overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC} \quad (1) \quad \text{với } x+y+z=1 \quad (2).$$

b). Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho:

$$\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}, \text{ trong đó } x+y+z=1 \text{ thì } M \in (ABC)$$

Thật vậy từ (2) suy ra $x = 1-y-z$ thay vào (1) được:

$$\overline{OM} = (1-y-z)\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OM} = \overline{OA} + y(\overline{OB} - \overline{OA}) + z(\overline{OC} - \overline{OA})$$

$$\Rightarrow \overline{OM} - \overline{OA} = y(\overline{OB} - \overline{OA}) + z(\overline{OC} - \overline{OA})$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM} = y\overline{AB} + z\overline{AC} \quad (3).$$

Hệ thức (3) chứng tỏ ba véc tơ $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AM}$ đồng phẳng và có cùng gốc A suy ra $M \in (ABC)$.

Câu 3: Cho hình chóp S.ABC. Trên các tia SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' thỏa $SA = aSA', SB = bSB', SC = cSC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mp(A'B'C') đi qua trọng tâm của của tam giác ABC khi và chỉ khi $a+b+c=3$.

LỜI GIẢI

Vì A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = aSA', SB = bSB', SC = cSC'$, nên: $\overline{SA} = a\overline{SA'}, \overline{SB} = b\overline{SB'}, \overline{SC} = c\overline{SC'}$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, theo tính chất trọng tâm có:

$$\overline{SG} = \frac{1}{3}(\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC}) \Rightarrow \overline{SG} = \frac{a}{3}\overline{SA} + \frac{b}{3}\overline{SB} + \frac{c}{3}\overline{SC}.$$

Mặt phẳng (A'B'C') đi qua điểm G khi và chỉ khi bốn điểm G, A', B', C' đồng phẳng, nên theo ví dụ trên, điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = 1 \Leftrightarrow a + b + c = 3$.

Câu 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P và Q sao cho $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AD}$ và $\overline{BQ} = \frac{2}{3}\overline{BC}$. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

LỜI GIẢI

$$\text{Có } \overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NB} + \overline{BM} + \overline{MN} + \overline{NC} = 2\overline{MN} + \underbrace{\overline{AM} + \overline{BM}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overline{NB} + \overline{NC}}_{\vec{0}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD} + \overline{BC} = 2\overline{MN} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) \quad (1).$$

Vì $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AD} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{3}{2}\overline{AP}$ và $\overline{BQ} = \frac{2}{3}\overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{3}{2}\overline{BQ}$, từ đó (1) suy ra:

$$\overline{MN} = \frac{3}{4}(\overline{AP} + \overline{BQ}) = \frac{3}{4}(\overline{AM} + \overline{MP} + \overline{BM} + \overline{MQ}) = \frac{3}{4}(\overline{MP} + \overline{MQ}) \quad (\text{do } \overline{AM} + \overline{BM} = \vec{0})$$

Vậy $\overline{MN} = \frac{3}{4}(\overline{MP} + \overline{MQ})$ chứng tỏ ba véc tơ \overline{MN} , \overline{MP} , \overline{MQ} đồng phẳng, nên bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P và Q sao cho $\overline{PA} = k\overline{PD}$ và $\overline{QB} = k\overline{QC}$, ($k \neq 1$). Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

LỜI GIẢI

$$\text{Có } \overline{PA} = k\overline{PD} \Rightarrow \overline{MP} = \frac{\overline{MA} - k\overline{MD}}{1-k}; \quad \overline{QB} = k\overline{QC} \Rightarrow \overline{MQ} = \frac{\overline{MB} - k\overline{MC}}{1-k}$$

Có $\overline{MA} + \overline{MB} = \vec{0}$ và $\overline{MC} + \overline{MD} = 2\overline{MN}$. Do đó:

$$\overline{MP} + \overline{MQ} = \frac{\overline{MA} - k\overline{MD}}{1-k} + \frac{\overline{MB} - k\overline{MC}}{1-k} = \frac{\overline{MA} + \overline{MB} - k(\overline{MC} + \overline{MD})}{1-k} = \frac{2k}{1-k}\overline{MN}$$

$\Rightarrow \overline{MN} = \frac{2k}{1-k}\overline{MP} + \frac{2k}{1-k}\overline{MQ}$ chứng tỏ ba véc tơ \overline{MN} , \overline{MP} , \overline{MQ} đồng phẳng, nên bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overline{MS} = -2\overline{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overline{NB} = -\frac{1}{2}\overline{NC}$. Chứng minh rằng ba véc tơ \overline{AB} , \overline{MN} , \overline{SC} đồng phẳng.

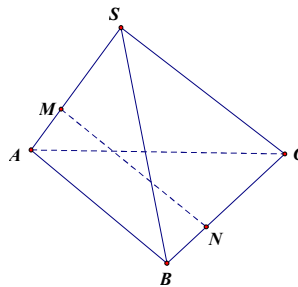
LỜI GIẢI

$$\text{Có } \overline{MN} = \overline{SN} - \overline{SM} = \overline{SC} + \overline{CN} - \frac{2}{3}\overline{SA}$$

$$= \overline{SC} + \frac{2}{3}\overline{CB} - \frac{2}{3}\overline{SA}$$

$$= \overline{SC} + \frac{2}{3}(\overline{SB} - \overline{SC}) - \frac{2}{3}(\overline{SB} + \overline{BA})$$

$$= \frac{1}{3}\overline{SC} + \frac{2}{3}\overline{AB}$$



Vậy $\overline{MN} = \frac{1}{3}\overline{SC} + \frac{2}{3}\overline{AB}$ chứng tỏ ba véc tơ \overline{AB} , \overline{MN} , \overline{SC} đồng phẳng.

Câu 7: Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Hai điểm M, N lần lượt thuộc BC, CD sao cho $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{4}$, $\frac{NC}{ND} = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, N, G đồng phẳng.

LỜI GIẢI

Có $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overline{MC} = -3\overline{MB} \Rightarrow 4\overline{AM} = \overline{AC} + 3\overline{AB}$ (1).

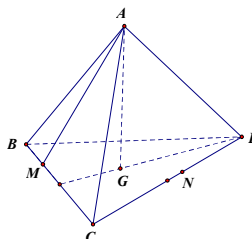
$\frac{NC}{ND} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\overline{NC} = -3\overline{ND} \Rightarrow 5\overline{AN} = 2\overline{AC} + 3\overline{AD}$ (2).

Lấy (1) cộng với (2) về theo về được:

$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} = \frac{4\overline{AM} + 5\overline{AN}}{3}$ (3)

Vì G trọng tâm $\triangle BCD$ nên $\overline{AG} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})$ (4).

Thay (3) vào (4) được: $\overline{AG} = \frac{4}{9}\overline{AM} + \frac{5}{9}\overline{AN}$, từ hệ thức này chứng tỏ ba véc tơ \overline{AG} , \overline{AM} , \overline{AN} đồng phẳng. Suy ra bốn điểm A, M, N, G đồng phẳng.



Câu 8: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BB' và A'C'. Điểm K thuộc B'C' sao cho $\overline{KC'} = -2\overline{KB'}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

LỜI GIẢI

Đặt $\overline{AA'} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AC} = \vec{c}$. Ta có:

$\overline{AI} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AB'}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b})$ (1).

$\overline{AJ} = \frac{1}{2}(\overline{AA'} + \overline{AC'}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{c})$ (2).

$\overline{AK} = \frac{\overline{AC'} + 2\overline{AB'}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{c} + 2(\vec{a} + \vec{b})}{3} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{3}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\overline{AK} = \frac{2}{3}(\overline{AI} + \overline{AJ})$ chứng tỏ ba véc tơ \overline{AK} , \overline{AI} , \overline{AJ} đồng phẳng, nên bốn điểm A, K, I, J cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 9: Cho tứ diện ABCD, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overline{MA} = -2\overline{MB}$, $\overline{ND} = -2\overline{NC}$. Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overline{IA} = k\overline{ID}$, $\overline{JM} = k\overline{JN}$, $\overline{KB} = k\overline{KC}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

LỜI GIẢI

Ta có $\overline{IJ} = \overline{IA} + \overline{AM} + \overline{MJ}$ (1).

$\overline{IJ} = \overline{ID} + \overline{DN} + \overline{NJ}$ (2).

Từ (2) có $k\overline{IJ} = k\overline{ID} + k\overline{DN} + k\overline{NJ} \Leftrightarrow k\overline{IJ} = \overline{IA} + k\overline{DN} + \overline{JM}$ (3).

Từ (1), (3) ta có: $(1-k)\overline{IJ} = \overline{AM} - k\overline{DN} \Rightarrow \overline{IJ} = \frac{1}{1-k}\overline{AM} - \frac{k}{1-k}\overline{DN}$

Chứng minh tương tự có: $\overline{JK} = \frac{1}{1-k}\overline{MB} - \frac{k}{1-k}\overline{NC}$ (*)

Mặt khác $\overline{MA} = -2\overline{MB}$, $\overline{ND} = -2\overline{NC}$ nên: $\overline{IJ} = \frac{2}{1-k}\overline{MB} - \frac{2k}{1-k}\overline{NC}$ (**)

Từ (*), (**) suy ra $\vec{IJ} = 2\vec{JK}$. Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Câu 10: Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{BN} = \frac{2}{3}\vec{BC}$, $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AD}$, $\vec{DP} = k\vec{DC}$. Hãy xác định k để bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

LỜI GIẢI

Ta có $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} \Rightarrow \vec{BM} = \frac{2}{3}\vec{BA}$ mặt khác $\vec{BN} = \frac{2}{3}\vec{BC}$ nên $MN \parallel AC$.

Nếu có k để các điểm M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng thì (MNQ) cắt (ACD) theo giao tuyến PQ nên $PQ \parallel AC$

Mặt khác $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AD}$ nên $\vec{DP} = \frac{1}{2}\vec{DC}$, Vậy $k = \frac{1}{2}$ thì các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 11: Cho hình tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD; M là điểm thuộc AC sao cho $\vec{MA} = k_1\vec{MC}$; N là điểm thuộc BD sao cho $\vec{NB} = k_2\vec{ND}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, M, N cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi $k_1 = k_2$.

LỜI GIẢI

Vi $\vec{MA} = k_1\vec{MC} \Rightarrow \vec{IM} = \frac{\vec{IA} - k_1\vec{IC}}{1 - k_1}$.

Tương tự, ta có: $\vec{IN} = \frac{\vec{IB} - k_2\vec{ID}}{1 - k_2} = \frac{-\vec{IA} - k_2\vec{ID}}{1 - k_2}$

Mặt khác có: $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{IC} + \vec{ID})$.

Để các điểm I, J, M, N cùng thuộc một mặt phẳng, điều kiện cần và đủ là ba véc tơ \vec{IM} , \vec{IN} , \vec{IJ} đồng phẳng. Rõ ràng là \vec{IN} và \vec{IJ} không cùng phương, nên điều khẳng định \vec{IM} , \vec{IN} , \vec{IJ} đồng phẳng tương đương với $\vec{IM} = p\vec{IN} + q\vec{IJ}$

Hay $\frac{\vec{IA} - k_1\vec{IC}}{1 - k_1} = p \cdot \frac{-\vec{IA} - k_2\vec{ID}}{1 - k_2} + q \cdot \frac{1}{2}(\vec{IC} + \vec{ID})$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 - k_1} + \frac{p}{1 - k_2}\right)\vec{IA} - \left(\frac{k_1}{1 - k_1} + \frac{q}{2}\right)\vec{IC} + \left(\frac{pk_2}{1 - k_2} - \frac{q}{2}\right)\vec{ID} = \vec{0}$

Do \vec{IA} , \vec{IC} , \vec{ID} không đồng phẳng nên đẳng thức trên tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{1}{1 - k_1} + \frac{p}{1 - k_2} = 0 \\ \frac{k_1}{1 - k_1} + \frac{q}{2} = 0 \\ \frac{pk_2}{1 - k_2} - \frac{q}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{k_1}{1 - k_1} = -\frac{pk_2}{1 - k_2} = \frac{k_2}{1 - k_1} \Rightarrow k_1 = k_2$$

DẠNG 4: Tính góc giữa hai vectơ hoặc giữa hai đường thẳng:

Áp dụng $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

Chú ý: Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

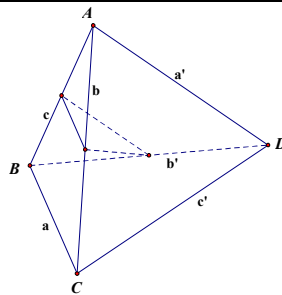
Nếu tính $(\widehat{AB, CD}) = \alpha < 90^\circ \Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng AB và CD là α

Nếu tính $(\widehat{AB, CD}) = \alpha > 90^\circ \Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng AB và CD là $180^\circ - \alpha$

Câu 1: Cho tứ diện ABCD có $AB = c, CD = c', AC = b, BD = b', BC = a, AD = a'$. Tính góc giữa hai véc tơ \overline{BC} và \overline{DA} .

LỜI GIẢI

$$\begin{aligned} \text{Có } \overline{BC} \cdot \overline{DA} &= \overline{BC}(\overline{DB} + \overline{BA}) = -\overline{BC} \cdot \overline{BD} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} \\ &= -\frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2} + \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2} \\ &= -\frac{a^2 + b'^2 - c'^2}{2} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \\ &= \frac{c^2 - b^2 - b'^2 + c'^2}{2}. \end{aligned}$$



$$\text{Có } \overline{BC} \cdot \overline{DA} = BC \cdot DA \cdot \cos(\overline{BC}, \overline{DA})$$

$$\Rightarrow \cos(\overline{BC}, \overline{DA}) = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DA}}{BC \cdot DA} = \frac{c^2 - b^2 - b'^2 + c'^2}{2a \cdot a'}$$

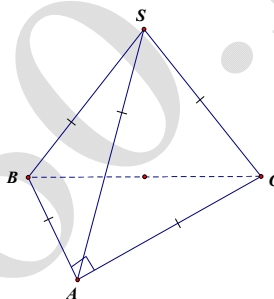
Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai véc tơ \overline{AB} và \overline{SC} .

LỜI GIẢI

$$\begin{aligned} \text{Có } \overline{AB} \cdot \overline{SC} &= \overline{AB}(\overline{SA} + \overline{AC}) = \overline{AB} \cdot \overline{SA} + \overline{AB} \cdot \overline{AC} \\ &= -\overline{AB} \cdot \overline{AS} + \overline{AB} \cdot \overline{AC} \\ &= -\frac{AB^2 + SA^2 - SB^2}{2} + \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = -\frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ngoài ra có } \cos(\overline{AB}, \overline{SC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{SC}}{AB \cdot SC} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a \cdot a} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\overline{AB}, \overline{SC}) = 120^\circ$$



Câu 3: Cho tứ diện có tất cả các cạnh bằng m. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

a). Tính độ dài MN.

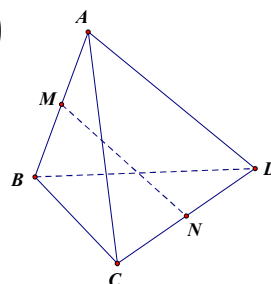
b). Tính góc giữa đường thẳng MN với các đường thẳng BC, AB và CD.

LỜI GIẢI

$$\text{a). } \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) \Rightarrow MN^2 = \frac{1}{4}(AD^2 + BC^2 + 2\overline{AD} \cdot \overline{BC})$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } \overline{AD} \cdot \overline{BC} &= (\overline{AB} + \overline{BD}) \cdot \overline{BC} = -\overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{BC} \\ &= -BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} + BD \cdot BC \cdot \cos \widehat{CBD} \\ &= -m \cdot m \cdot \cos 60^\circ + m \cdot m \cdot \cos 60^\circ = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } MN^2 = \frac{m^2}{2} \Rightarrow MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}$$



$$\text{b). Có } \overline{MN} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{AB} \cdot \overline{AD} - \overline{BC} \cdot \overline{BA})$$

$$= \frac{1}{2}(AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - BC \cdot BA \cdot \cos 60^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2}\right) = 0$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AB bằng 90° .

$$\text{Có } \overline{MN} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{BC}^2) = \frac{m^2}{2}$$

$$\text{Vậy } \cos(\overline{MN}, \overline{BC}) = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{BC}}{|\overline{MN}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{\frac{m^2}{2}}{\frac{m\sqrt{2}}{2} \cdot m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\overline{MN}, \overline{BC}) = 45^\circ. \text{ Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC}$$

bằng 45° .

Câu 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Biết $AB = CD = a$ và $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

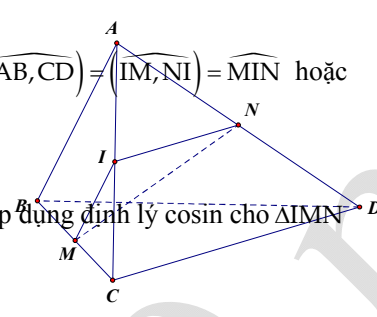
LỜI GIẢI

Gọi I trung điểm của AC. Có $\begin{cases} IM \parallel AB \\ IN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (\overline{AB}, \overline{CD}) = (\overline{IM}, \overline{NI}) = \widehat{MIN}$ hoặc $(180^\circ - \widehat{MIN})$.

Trong $\triangle IMN$ có $IM = IN = \frac{a}{2}$, $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Áp dụng định lý cosin cho $\triangle IMN$:

$$\cos \widehat{MIN} = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2 \cdot IM \cdot IN} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a^2}{4}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ$$

$$\text{Vậy } (\overline{AB}, \overline{CD}) = (180^\circ - \widehat{MIN}) = 60^\circ.$$

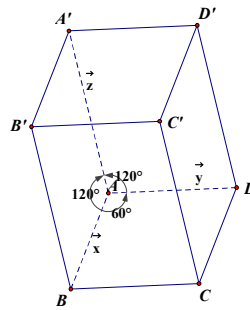


Câu 5: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^\circ$.
 a). Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB và A'D, AC' với B'D.
 b). Tính diện tích các hình A'B'CD và ACC'A'.
 c). Tính góc giữa đường thẳng AC' và các đường thẳng AB, AD, AA'.

LỜI GIẢI

Đặt $\overline{AB} = \vec{x}$, $\overline{AD} = \vec{y}$, $\overline{AA'} = \vec{z}$.

$$\text{Có } \begin{cases} \vec{x}^2 = a^2, \vec{y}^2 = a^2, \vec{z}^2 = a^2 \\ \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} \\ \vec{y} \cdot \vec{z} = |\vec{y}| \cdot |\vec{z}| \cos 120^\circ = a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} \\ \vec{x} \cdot \vec{z} = |\vec{x}| \cdot |\vec{z}| \cos 120^\circ = a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} \end{cases}$$



a).

• Trong $\triangle ADA'$ có $A'D = \sqrt{AA'^2 + AD^2 - 2AA' \cdot AD \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$

Ta có $\overline{AB} \cdot \overline{A'D} = \overline{AB} \cdot (\overline{A'D'} + \overline{A'A}) = \vec{x}(\vec{y} - \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{x} \cdot \vec{z} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2$.

$$\text{Vậy } \cos(\overline{AB}, \overline{A'D}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{A'D}}{|\overline{AB}| |\overline{A'D}|} = \frac{a^2}{a \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 \Rightarrow (\overline{AB}, \overline{A'D}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và A'D bằng $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

• Ta có $\overline{AC'} \cdot \overline{B'D} = (\overline{AB'} + \overline{B'C'}) \cdot (\overline{B'C'} + \overline{C'D})$

$$\begin{aligned}
 &= (\overline{AB} + \overline{AA'} + \overline{B'C'}) (\overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{C'C}) = (\overline{x} + \overline{z} + \overline{y}) (\overline{y} - \overline{x} - \overline{z}) \\
 &= \overline{x.y} - \overline{x^2} - \overline{x.z} + \overline{y.z} - \overline{xz} - \overline{z^2} + \overline{y^2} - \overline{x.y} - \overline{y.z} \\
 &= \frac{a^2}{2} - a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - a^2 + a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow \overline{AC'} \cdot \overline{B'D} = 0.
 \end{aligned}$$

Vậy góc giữa AC' và $B'D$ bằng 90° .

b).

• Có $AB \parallel A'B' \Rightarrow \cos(\widehat{AB, A'D}) = \cos(\widehat{A'B', A'D}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin(\widehat{A'B', A'D}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$S_{A'B'CD} = 2S_{\Delta DA'B'} = A'D \cdot A'B' \cdot \sin(\widehat{A'B', A'D}) = a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}.$$

• Có $\overline{AA'} \cdot \overline{AC} = \overline{AA'} (\overline{AB} + \overline{AD}) = \overline{z} (\overline{x} + \overline{y}) = \overline{x.z} + \overline{y.z} = -a^2$.

$$\cos(\widehat{AA', AC}) = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AA'}| |\overline{AC}|} = \frac{-a^2}{a \cdot a\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin(\widehat{AA', AC}) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$S_{ACC'A'} = 2S_{\Delta ACA'} = AC \cdot AA' \cdot \sin(\widehat{AA', AC}) = a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}.$$

c).

• Có $\overline{AC'} \cdot \overline{AB} = (\overline{AA'} + \overline{AC}) \overline{AB} = (\overline{z} + \overline{x} + \overline{y}) \overline{x} = \overline{x.z} + \overline{x^2} + \overline{xy} = a^2$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{AC', AB}) = \frac{\overline{AC'} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AC'}| |\overline{AB}|} = \frac{a^2}{a\sqrt{3} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 \Rightarrow (\widehat{AC', AB}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC' và AB bằng $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Có $\overline{AC'} \cdot \overline{AD} = (\overline{AA'} + \overline{AC}) \overline{AD} = (\overline{z} + \overline{x} + \overline{y}) \overline{y} = \overline{y.z} + \overline{y^2} + \overline{xy} = a^2$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{AC', AD}) = \frac{\overline{AC'} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AC'}| |\overline{AD}|} = \frac{a^2}{a\sqrt{3} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 \Rightarrow (\widehat{AC', AD}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

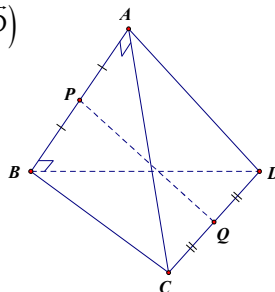
Vậy góc giữa hai đường thẳng AC' và AD bằng $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Có $\overline{AC'} \cdot \overline{AA'} = (\overline{AA'} + \overline{AC}) \overline{AA'} = (\overline{z} + \overline{x} + \overline{y}) \overline{z} = \overline{z^2} + \overline{xz} + \overline{zy} = 0 \Rightarrow$ Hai đường thẳng AC' và AA' vuông góc với nhau. Suy ra góc giữa chúng bằng 90° .

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$, biết $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng AB và CD vuông góc với nhau.

LỜI GIẢI

$$\begin{aligned}
 \overline{AB} \cdot \overline{PQ} &= \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} (\overline{PC} + \overline{PD}) = \overline{AB} \cdot \frac{1}{4} (\overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AD} + \overline{BD}) \\
 &= \frac{1}{4} (\underbrace{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}_0 + \overline{AB} \cdot (\overline{BC} + \overline{AD}) + \underbrace{\overline{AB} \cdot \overline{BD}}_0) \\
 &= \frac{1}{4} \overline{AB} [(\overline{AC} - \overline{AB}) + (\overline{BD} - \overline{BA})] \\
 &= \frac{1}{4} (\underbrace{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}_0 + \underbrace{\overline{AB} \cdot \overline{BD}}_0) = 0 \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{PQ}
 \end{aligned}$$



Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a .

a). Tính góc giữa AC và DA' .

b). Chứng minh rằng $BD \perp AC'$

LỜI GIẢI

a)

$$\begin{aligned} \text{Có } \overline{AC} \cdot \overline{DA'} &= (\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{DA} + \overline{DD'}) \\ &= \underbrace{\overline{AB} \cdot \overline{DA}}_0 + \underbrace{\overline{AB} \cdot \overline{DD'}}_0 + \overline{AD} \cdot \overline{DA} + \underbrace{\overline{AD} \cdot \overline{DD'}}_0 = -a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ngoài ra } \overline{AC} \cdot \overline{DA'} = |\overline{AC}| \cdot |\overline{DA'}| \cos(\overline{AC}, \overline{DA'})$$

$$\Rightarrow \cos(\overline{AC}, \overline{DA'}) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DA'}}{|\overline{AC}| \cdot |\overline{DA'}|} = \frac{-a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{\overline{AC}, \overline{DA'}} = 120^\circ$$

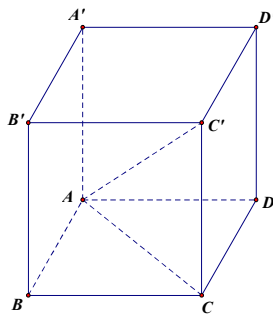
Vậy góc giữa AC và DA' là $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$$\text{b) Có } \overline{BD} \cdot \overline{AC'} = (\overline{BA} + \overline{BC})(\overline{AA'} + \overline{AB} + \overline{AD}) = (\overline{BA} + \overline{AD})(\overline{AA'} + \overline{AB} + \overline{AD})$$

$$= \underbrace{\overline{BA} \cdot \overline{AA'}}_0 + \overline{BA} \cdot \overline{AB} + \underbrace{\overline{BA} \cdot \overline{AD}}_0 + \underbrace{\overline{AD} \cdot \overline{AA'}}_0 + \underbrace{\overline{AD} \cdot \overline{AB}}_0 + \overline{AD}^2$$

$$= -\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = -a^2 + a^2 = 0$$

Chứng tỏ BD vuông góc với AC' .



hoc360.net