

CHUYÊN ĐỀ I: VECTO

VẤN ĐỀ I: VECTO

I LÝ THUYẾT

1. **Vector**: là 1 đoạn thẳng trong đó đã chỉ rõ điểm mút nào là *điểm đầu* và điểm mút nào là *điểm cuối*

2. **Vector – không**: Kí hiệu: $\vec{0}$

+ Vector $\vec{0}$ cùng phương với mọi vector $\vec{AA} = \vec{BB} = \dots = \vec{PP} = \vec{0}$

3. **Hai vector cùng phương**: là hai vector cùng nằm trên một đường thẳng hay trên hai đường thẳng song song

4. **Hai vector bằng nhau**: là hai vector cùng hướng và có độ dài bằng nhau

5. **Hai vector đối nhau**: là hai vector ngược hướng và có độ dài bằng nhau

VD: \vec{AB} có vector là vector \vec{BA} . Viết: $\vec{AB} = -\vec{BA}$

Chú ý: Tổng của 2 vector đối nhau thì bằng $\vec{0}$, tức là: $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$

6. **Phép cộng: Quy tắc 3 điểm (hay quy tắc tam giác)**:

$$\text{Ba điểm } A, B, C \text{ bất kì} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

7. **Quy tắc hình bình hành**: ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

8. **Phép trừ**: Ba điểm A, B, C bất kì $\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$

9. + I là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

+ I là trung điểm của AB và với mọi điểm M $\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

10. + G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

+ G là trọng tâm của tam giác ABC và với mọi điểm M $\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

11. + Nếu hai vector \vec{a} và \vec{b} ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương thì $\vec{a} = k\vec{b}$ với mọi k

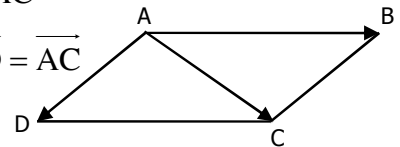
+ Nếu 2 vector \vec{a} và \vec{b} không cùng phương thì $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$

11. Ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng $\Leftrightarrow \vec{AB} = k\vec{AC}$ với mọi k $\neq 0$

* **P**: Chứng minh đẳng thức vector: $\vec{P} = \vec{Q}$

Cách 1: $\vec{VT} = \vec{P} = \dots$ (vận dụng các tính chất đã học) $\dots = \vec{Q} = \vec{VP}$ (đpcm)

Cách 2: $\vec{VP} = \vec{Q} = \dots$ (vận dụng các tính chất đã học) $\dots = \vec{P} = \vec{VT}$ (đpcm)



Cách 3: VT = P =(vận dụng các tính chất đã học) ... = M

VP = Q =(vận dụng các tính chất đã học) ... = M

Suy ra: P = Q (đpcm)

Cách 4: P - Q =(vận dụng các tính chất đã học).... = $\vec{0}$. Suy ra: P = Q (đpcm)

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Cho 4 điểm A, B, C, D bất kì, chứng minh rằng: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

Giải: *Cách 1:* VT = $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{DB} + \vec{BD}$
 $= \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{DD} = \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{0} = \vec{AD} + \vec{CB} = \text{VP}$ (đpcm)

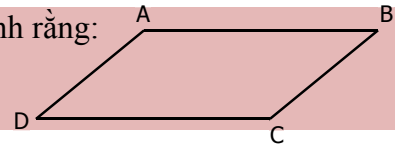
Cách 2: Ta có: $\vec{AB} + \vec{CD} - (\vec{AD} + \vec{CB}) = \vec{AB} + \vec{CD} - \vec{AD} - \vec{CB}$
 $= (\vec{AB} - \vec{AD}) + (\vec{CD} - \vec{CB}) = \vec{DB} + \vec{BD} = \vec{DD} = \vec{0}$

Suy ra: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ (đpcm)

Cách 3: VT = $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{OB} - \vec{OA} + \vec{OD} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$
 $= \vec{AD} + \vec{CB} = \text{VP}$ (đpcm)

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$$



Giải: Ta có: VT = $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{BA} + \vec{MD} + \vec{DC}$
 $= \vec{MB} + \vec{MD} + \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{MB} + \vec{MD} + \vec{0}$ (\vec{BA} và \vec{DC} đối nhau)
 $= \vec{MB} + \vec{MD} = \text{VP}$ (đpcm)

Bài 3: Cho M là trung điểm của AB và điểm E bất kì.

Chứng minh rằng: $\vec{EA} + \vec{EB} = 2\vec{EM}$

Giải: Ta có:
$$\begin{cases} \vec{EM} = \vec{EA} + \vec{AM} \\ \vec{EM} = \vec{EB} + \vec{BM} \end{cases}$$

Suy ra: $2\vec{EM} = \vec{EA} + \vec{EB} + (\vec{AM} + \vec{BM}) = \vec{EA} + \vec{EB} + \vec{0} = \vec{EA} + \vec{EB}$ (đpcm)

Bài 4: Cho 6 điểm A, B, C, D, E và F. Chứng minh rằng: $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}$

Giải: * *Cách 1:* VT = $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{ED} + \vec{BF} + \vec{FE} + \vec{CD} + \vec{DF}$
 $= \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} + (\vec{ED} + \vec{DF} + \vec{FE}) = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} + \vec{EE} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} = \text{VP}$ (đpcm)

* Cách 2: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} - (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD}$
 $= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BF}) + (\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$

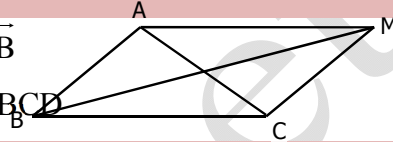
Suy ra: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$ (đpcm)

* Cách 3: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BE}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF}$. Vậy: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$ (đpcm)

Bài 5: Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M thỏa mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}$

Giải: Dựng hình bình hành ABCM, ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}$

Vậy: Điểm M cần tìm là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM



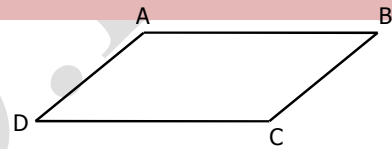
Bài 6: Cho hình bình hành ABCD. Xác định M sao cho:

$$4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$

Giải: Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$

Suy ra: $4\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Vậy: $M \in AC$

Khi đó: $AM = \frac{1}{2}AC \Leftrightarrow MA = MC$. Vậy: M là trung điểm của AC



Bài 7: Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của đoạn AG và K là điểm trên cạnh AB sao cho $AK = \frac{1}{5}AB$.

a) Hãy phân tích \overrightarrow{AI} , \overrightarrow{AK} , \overrightarrow{CI} , \overrightarrow{CK} theo $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$

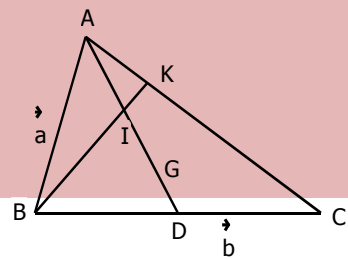
b) Chứng minh rằng: Ba điểm C, I, K thẳng hàng

Giải: a) Gọi AD là trung tuyến của ΔABC

* Ta có: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$

* Ta có: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a}$



* Ta có: $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$;

* Ta có: $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$

b) Ta có: $\frac{\overrightarrow{CI}}{\overrightarrow{CK}} = \frac{\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}}{\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}} = \frac{4\vec{a} + \vec{b}}{6} \cdot \frac{5}{4\vec{a} + \vec{b}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CK}$

Vậy: Ba điểm C, I, K thẳng hàng (đpcm)

Bài 8: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ \overrightarrow{AI} , \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{DE} , \overrightarrow{DC} theo hai vectơ \vec{u} và \vec{v}

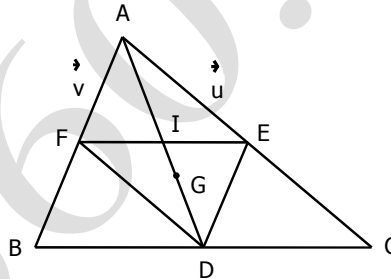
Giải: * Ta có: AEDF là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

Mà: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$

* $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v})$

* $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AF} = -\vec{v} + 0\vec{u}$

* $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}$



III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Chứng minh rằng: nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Bài 2: Cho 4 điểm bất kì M, N, P, Q. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ}$ b) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$ c) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$

Bài 3: Cho sáu điểm A, B, C, E, F. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$$

Bài 4: Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

Bài 5: Chứng minh rằng: Với tứ giác ABCD bất kì, ta luôn có:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$

Bài 8: Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của đoạn AM.

Chứng minh rằng: a) $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ b) $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tùy ý.

Bài 9: Cho 5 điểm A, B, C, D và E. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Bài 10: Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và BC.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

Bài 11: Cho 5 điểm A, B, C, D và E. Hãy tính tổng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

Bài 12: Cho ngũ giác ABCDE. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DE}$

Bài 13: Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

Bài 14: Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

HD: Gọi K là trung điểm của AB. M là trung điểm của CK

Bài 15: Cho tứ giác ABCD. Xác định vị trí điểm G sao cho: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

HD: Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và CD. G là trung điểm của IK

Bài 16: Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ b) Tìm điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$

Bài 17: Cho tam giác ABC có D là trung điểm của BC. Xác định vị trí của điểm G sao cho

$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$. HD: G là trọng tâm tam giác ABC

Bài 18: Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC. Hãy phân tích các vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} ,

\overrightarrow{CA} theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$

HD: * $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$

* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM}) - \overrightarrow{AB}$

* $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}) = -(\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$

Bài 19: Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vector \overrightarrow{AM} theo hai vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

HD: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

Bài 20: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$. Hãy biểu thị mỗi vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{GC} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} qua các vector \vec{a} và \vec{b}

Bài 21: Cho 4 điểm OABC sao cho $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Chứng tỏ rằng A, B, C thẳng hàng

Bài 22: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{5}AC$.

a) Hãy phân tích các vector \overrightarrow{BK} , \overrightarrow{BI} theo hai vector $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

b) Chứng minh rằng: 3 điểm B, I, K thẳng hàng

Bài 23: Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và tam giác A'B'C' thì $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$. Từ đó hãy suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau

Bài 24: Cho lục giác ABCDEF. Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùng nhau.

VẤN ĐỀ II: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

I: LÝ THUYẾT

1. $M \in (O; \vec{e}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k\vec{e}$; k gọi là tọa độ của điểm M

2. $A, B \in (O; \vec{e}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\vec{e}$; \overrightarrow{AB} : gọi là độ dài đại số của vector \overrightarrow{AB} .

3. $\overrightarrow{AB} = b - a$; a, b lần lượt là tọa độ của điểm A và B

* Những kiến thức cần nhớ:

1. $M = (x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, O là gốc tọa độ

2. $\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

3. Nếu $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{u}' = (x'; y')$

3.1) Nếu $\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

3.2) $\vec{u} \pm \vec{u}' = (x \pm x'; y \pm y')$

3.3) $k\vec{u} = (kx; ky)$

3.4) \vec{u} và \vec{u}' cùng phương $\Leftrightarrow \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$ (hoặc $\Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$)

4. Cho ba điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, ta có:

4.1) $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

4.2) I là trung điểm của AB $\Leftrightarrow I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

4.3) G là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Cho các điểm A, B, M, N có tọa độ lần lượt là -1; 2; 3; -2. Tính độ dài đại số của \vec{AB} , \vec{MN} . Từ đó suy ra hai vector \vec{AB} và \vec{MN} ngược hướng.

Giải: * $\vec{AB} = b - a = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$; $\vec{MN} = n - m = -2 - 3 = -5$

Suy ra: hai vector \vec{AB} và \vec{MN} ngược hướng.

Bài 1: Tìm tọa độ của các vector trong mpOxy sau:

a) $\vec{a} = -\vec{i}$ b) $\vec{b} = -3\vec{j}$ c) $\vec{c} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$

Giải: a) $\vec{a} = (-1; 0)$ b) $\vec{b} = (0; -3)$ c) $\vec{c} = (-2; 5)$

Bài 2: Cho $\vec{a} = (-3; 2)$, $\vec{b} = (4; -5)$ và $\vec{c} = (1; 7)$

a) Tính tọa độ của vector $\vec{u} = 3\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c}$

b) Tìm tọa độ vector \vec{x} sao cho $\vec{x} + 2\vec{a} = \vec{b} - 3\vec{c}$

c) Phân tích vector \vec{b} theo hai vector \vec{a} và \vec{c}

Giải: a) Ta có: $\vec{u} = 3\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c} = (3 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 - 2 \cdot 1; 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-5) - 2 \cdot 7) = (9; -33)$

Cách khác: Ta có: $3\vec{a} = (-9; 6)$

$$5\vec{b} = (20; -25)$$

$$-2\vec{c} = (-2; -14)$$

Suy ra : $\vec{u} = 3\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c} = (9; -33)$

b) $\vec{x} + 2\vec{a} = \vec{b} - 3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b} - 3\vec{c} - 2\vec{a} = (1.(-3) - 3.4 - 2.1; 1.2 - 3.(-5) - 2.7) = (-17; 3)$

c) Giả sử $\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{c} = (-3m + n; 2m + 7n)$

Ta có:
$$\begin{cases} -3m + n = 4 \\ 2m + 7n = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{33}{23} \\ n = -\frac{7}{23} \end{cases} \quad \text{Vậy: } \vec{b} = -\frac{33}{23}\vec{a} - \frac{7}{23}\vec{c}$$

Cách khác: Giả sử $\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{c}$

Ta có: $m\vec{a} = (-3m; 2m) \quad + n\vec{c} = (n; 7n)$

Suy ra: $m\vec{a} + n\vec{c} = (-3m + n; 2m + 7n)$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} -3m + n = 4 \\ 2m + 7n = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{33}{23} \\ n = -\frac{7}{23} \end{cases} \quad \text{Vậy: } \vec{b} = -\frac{33}{23}\vec{a} - \frac{7}{23}\vec{c}$$

Bài 3: Cho 3 điểm A(-1; 8), B(1; 6), C(3; 4).

- Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng
- Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng BC
- Tìm tọa độ điểm D sao cho A là trung điểm của BD

Giải: a) *Cách 1:* Ta có: $\vec{AB} = (2; -2)$, $\vec{AC} = (4; -4)$

Ta thấy: $\frac{2}{4} = \frac{-2}{-4}$. Suy ra: ba điểm A, B, C thẳng hàng

Cách 2: Ta có: $\vec{AB} = (2; -2)$, $\vec{AC} = (4; -4)$;

Ta thấy: $\vec{AC} = 2\vec{AB}$. Vậy: ba điểm A, B, C thẳng hàng

b) I là trung điểm của BC $\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{6+4}{2} = 5 \end{cases} \quad \text{Vậy: } I(2; 5)$

c) Ta có: A là trung điểm của CD $\Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{x_C + x_D}{2} \\ y_A = \frac{y_C + y_D}{2} \end{cases}$ mà A(-1; 8)

Nên: $\begin{cases} \frac{x_C + x_D}{2} = -1 \\ \frac{y_C + y_D}{2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C + x_D = -2 \\ y_C + y_D = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -2 - x_C = -2 - 3 = -5 \\ y_D = 16 - y_C = 16 - 4 = 12 \end{cases}$ Vậy: D(-5; 12)

Bài 4: Cho 3 điểm A(-1; 3), B(2; 4), C(0; -1)

- Chứng minh 3 điểm A, B, C tạo thành 1 tam giác
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC
- Cho điểm G(3; -2). Tìm tọa độ điểm M để G là trọng tâm của ΔABM
- Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{CB} = -5\overrightarrow{AE}$

Giải: a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -5)$. Ta thấy: $\frac{3}{-2} \neq \frac{1}{-5}$

Suy ra: ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậy: ba điểm A, B, C tạo thành 1 tam giác

b) G là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1 + 2 + 0}{3} = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + 4 - 1}{3} = 2 \end{cases}$ Vậy: $G\left(\frac{1}{3}; 2\right)$

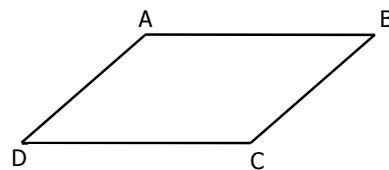
c) G là trọng tâm tam giác ABM $\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_M}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_M}{3} \end{cases}$ mà G(3; -2)

Nên: $\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_M}{3} = 3 \\ \frac{y_A + y_B + y_M}{3} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_M = 9 \\ y_A + y_B + y_M = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 9 - x_A - x_B = 9 + 1 - 2 = 8 \\ y_M = -6 - y_A - y_B = -6 - 3 - 4 = -13 \end{cases}$

Vậy: M(8; -13)

d) Ta có: ABCD là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

* $\overrightarrow{AB} = (3; 1)$ * $\overrightarrow{DC} = (0 - x_D; -1 - x_D)$



Suy ra: $\begin{cases} 0 - x_D = 3 \\ -1 - x_D = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ x_D = -2 \end{cases}$ Vậy: D(-3; -2)

e) Ta có: * $\overline{CB} = (2; 5)$ * $\overline{AE} = (x_E + 1; y_E - 3)$

Mà: $\overline{CB} = -5\overline{AE} \Rightarrow \begin{cases} -5(x_E + 1) = 2 \\ -5(y_E - 3) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x_E - 5 = 2 \\ -5y_E + 15 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E = -\frac{7}{5} \\ y_E = 2 \end{cases}$ Vậy: E $\left(-\frac{7}{5}; 2\right)$

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tìm tọa độ của các vector trong mp tọa độ

a) $\vec{a} = -\vec{j}$ b) $\vec{b} = 5\vec{i}$ c) $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ d) $\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i})$

e) $\vec{e} = 0,15\vec{i} + 1,3\vec{j}$ f) $\vec{j} = \pi\vec{i} - (\cos 24^\circ)\vec{j}$

Bài 2: Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$

a) Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ b) Tìm tọa độ của vector \vec{x} sao cho $\vec{x} + 2\vec{a} = 3\vec{b} - \vec{c}$

c) Phân tích vector \vec{c} theo hai vector \vec{a} và \vec{b}

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ, cho ba điểm A(-3; 4), B(1; 1), C(9, -5)

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho A là trung điểm của BD

c) Tìm tọa độ điểm E trên trục Ox sao cho A, B, E thẳng hàng

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC với A(-4; 1), B(2; 4), C(2, -2)

a) Tìm tọa độ trung điểm của BC

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD

c) Tìm tọa độ điểm E sao cho ABCE là hình bình hành

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm A(-1; 3), B(4; 2), C(3, 5)

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng

b) Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC

c) Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overline{AD} = -3\overline{BC}$

d) Tìm tọa độ điểm E sao cho O là trọng tâm tam giác ABE

Bài 6: Cho tam giác ABC. Các điểm M(1; 1), N(2; 3), P(0; -4) lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tính tọa độ các đỉnh của tam giác ABC

Bài 7: Cho tam giác ABC có A(1; -1), B(5; -3) đỉnh C trên Oy và trọng tâm G trên Ox. Tìm tọa độ của điểm C

Bài 8: Cho A(1; 1), B(3; 2) và C(m + 4; 2m + 1). Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng

Bài 9: Tìm x để các cặp vectơ sau cùng phương

a) $\vec{u} = (2; 3)$, $\vec{v} = (4; x)$

b) $\vec{a} = (x; -3)$, $\vec{b} = (-2; 2x)$