PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 ĐỐI VỚI SINX, COSX, TANX, COTX

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \le t \le 1$
$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	$t = \cot x$	$x \ne k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$
Nếu đặt $t = \sin^2 x$ hoặc $t = \lvert\sin x\rvert$ thì điều kiện là $0 \le t \le 1$ (tương tự cho $\cos$)		

Câu 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

2). $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

3). $\sin^2 2x - 13\sin 2x + 5 = 0$

4). $\tan^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$

5). $4\cos^2 x - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{3} = 0$

6). $\cot^2 x + 4\cot x + 3 = 0$

7). $\cos 2x - 3\sin x - 2 = 0$

8). $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$

LỜI GIẢI

1). $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ (1). Đặt $\cos x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành:

$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{1}{2}$. So với điều kiện nhận cả hai nghiệm.

Với $t = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = k2\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$,$(k \in \mathbb{Z})$

2). $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$ (1). Đặt $\sin x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành:

$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \vee t = -\frac{3}{2}$. So với điều kiện nhận $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

3). $\sin^2 2x - 13\sin 2x + 5 = 0$ (1). Đặt $\sin 2x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành:

$t^2 - 13t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{13 + \sqrt{149}}{2} \vee t = \frac{13 - \sqrt{149}}{2}$. So với điều kiện nhận $t = \frac{13 - \sqrt{149}}{2}$, suy ra :

$\sin 2x = \frac{13 - \sqrt{149}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \arcsin\frac{13 - \sqrt{149}}{2} + k2\pi \\ 2x = \pi - \arcsin\frac{13 - \sqrt{149}}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\arcsin\frac{13 - \sqrt{149}}{2}}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi - \arcsin\frac{13 - \sqrt{149}}{2}}{2} + k\pi \end{array}\right.$$

Hoặc đặt $\frac{13 - \sqrt{149}}{2} = \sin\alpha$, suy ra $\sin 2x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \alpha + k2\pi \\ 2x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\alpha}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\arcsin\frac{13 - \sqrt{149}}{2}}{2} + k\pi, x = \dfrac{\pi - \arcsin\frac{13 - \sqrt{149}}{2}}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

4). $\tan^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$ (1). Đặt $\tan x = t, \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\sqrt{3}$.

Với $t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Với $t = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

So với điều kiện nhận cả hai nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

5). $4\cos^2 x-2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{3}=0$ (1)

Đặt $\cos x=t,t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $4t^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\vee t=\frac{\sqrt{3}}{2}$. So với điều kiện hai nghiệm đều nhận

Với $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Với $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình:

$x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

6). $\cot^2 x+4\cot x+3=0$

Đặt $\cot x=t,(x\neq k\pi)$. Phương trình (1) trở thành: $t^2+4t+3=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=-3$

Với $t=-1\Leftrightarrow\cot x=-1\Leftrightarrow\cot x=\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Với $t=-3\Leftrightarrow\cot x=-3\Leftrightarrow\cot x=\operatorname{arccot}(-3)\Leftrightarrow x=\operatorname{arccot}(-3)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\operatorname{arccot}(-3)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

7). $\cos 2x-3\sin x-2=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-3\sin x-2=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0$ (1). Đặt $\sin x=t,t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $2t^2+3t+1=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=-\frac{1}{2}$

So với điều kiện hai nghiệm đều nhận.

Với $t=-1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Với $t=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z}) \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

8). $\sin^2 x-\cos x+1=0$ (1)

$(1) \Leftrightarrow 1-\cos^2 x-\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos^2 x+\cos x-2=0$ (1')

Đặt $\cos x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=-2$. So với điều kiện nhận $t=1$. Với $t=1 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

Câu 2: Giải các phương trình sau:

1) $2\cos^2 x-3.\cos x+1=0$

2) $\sin^2 x+3\sin x+2=0$

3) $\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-\sqrt{3}=0$

4) $\cot^2 x+4\cot x+3=0$

LỜI GIẢI

1) $2\cos^2 x-3.\cos x+1=0$ (*)

Đặt $t=\cos x, -1\le t\le 1$

$(*) \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\ (N) \\ t=\frac{1}{2}\ (N) \end{array}\right.$

- Với $t=1 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

- Với $t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

  Vậy nghiệm của phương trình: $x=k2\pi\,;x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\,;x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

2) $\sin^2 x+3\sin x+2=0\quad(*)$

Đặt $t=\sin x,-1\le t\le 1$

$(*)\Leftrightarrow t^2+3t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ (N) \\ t=-2\ (L) \end{array}\right.$

- Với $t=-1\Leftrightarrow \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

  Vậy nghiệm phương trình : $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

3) $\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-\sqrt{3}=0\quad(*)$

Đặt $t=\tan x$. $(*)\Leftrightarrow t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\sqrt{3} \end{array}\right.$

- Với $t=1\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.
- Với $t=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

  Vậy nghiệm phương trình : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

4) $\cot^2 x+4\cot x+3=0\quad(*)$

Đặt $t=\cot x$

$(*)\Leftrightarrow t^2+4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-3 \end{array}\right.$

- Với $t=-1\Leftrightarrow \cot x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$
- Với $t=-3\Leftrightarrow \cot x=-3\Leftrightarrow x=arc\cot(-3)+\mathrm{k}\,\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm phương trình : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=arc\cot(-3)+\text{k}\,\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Câu 3: Giải các phương trình sau:

1) $\cos 2x-3\sin x-2=0$

2) $\sin^2 x\text{-}\cos x+1=0$

3) $\frac{1}{\sin^2 x}=\cot x+3$

4) $\tan x-\cot x=\frac{3}{2}$

LỜI GIẢI

1) $\cos 2x-3\sin x-2=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-3\sin x-2=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0\ (*)$

Đặt $t=\sin x,-1\le t\le 1$.

$(*)\Leftrightarrow 2t^2+3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ (N)\\ t=-\frac{1}{2}\ (N)\end{array}\right.$

- Với $t=-1\Leftrightarrow \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$
- Với $t=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$; $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$; $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

2) $\sin^2 x\text{-}\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow 1-\cos^2 x-\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos^2 x+\cos x-2=0\ \ (*)$

Đặt $t=\cos x,-1\le t\le 1$

$(*)\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\ (N)\\ t=-2\ (L)\end{array}\right.$

- Với $t=-1 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

3) $\frac{1}{\sin^2 x}=\cot x+3$. (1)

Điều kiện : $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi$

$(1)\Leftrightarrow 1+\cot^2 x=\cot x+3 \Leftrightarrow \cot^2 x-\cot x-2=0$ (*)

Đặt $t=\cot x$

$(*)\Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=-1 \vee t=2$

- Với $t=-1 \Leftrightarrow \cot x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$
- Với $t=2 \Leftrightarrow \cot x=2 \Leftrightarrow x=arc\cot 2+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=arc\cot 2+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

4) $\tan x-\cot x=\frac{3}{2}(1)$

Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}$

$(1)\Leftrightarrow \tan x-\frac{1}{\tan x}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\tan^2 x-3\tan x-2=0$ (*)

Đặt $t=\tan x$

$(*)\Leftrightarrow 2t^2-3t-2=0 \Leftrightarrow t=2 \vee t=-\frac{1}{2}$

- Với $t=2 \Leftrightarrow \tan x=2 \Leftrightarrow x=\arctan 2+\mathrm{k}\,\pi,(k\in\mathbb{Z})$

- Với $t=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\arctan 2+\mathrm{k}\pi$; $x=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Câu 4: Giải các phương trình sau:

1) $\cos^3 x+3\cos^2 x+2\cos x=0$

2) $23\sin x-\sin 3x=24$

3) $2\cos 3x.\cos x-4\sin^2 2x+1=0$

4) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$

Lời giải

1) $\cos^3 x+3\cos^2 x+2\cos x=0$ (*)

Đặt $t=\cos x, -1\le t\le 1$

$$(*) t^3+3t^2+2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (N) \\ t=-1\ (N) \\ t=-2\ (\mathrm{L}) \end{array}\right.$$

- Với $t=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$
- Với $t=-1 \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $x=\pi+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

2) $23\sin x-\sin 3x=24$

$\Leftrightarrow 23\sin x-(3\sin x-4\sin^3 x)=24 \Leftrightarrow 4\sin^3 x+20\sin x-24=0$ (*)

Đặt $t=\cos x, -1\le t\le 1$

$(*) \Leftrightarrow 4t^3+20t-24=0 \Leftrightarrow t=1\ (N)$

- Với $t=1 \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

3) $2\cos 3x.\cos x-4\sin^2 2x+1=0$

$\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 2x-2(1-\cos 2x)+1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x+3\cos 2x-2=0$ (*)

Đặt $t=\cos 2x,-1\le t\le 1$

$(*)\Leftrightarrow 2t^2+3t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2}\ (N) \\ t=-2\ (L) \end{array}\right.$

- Với $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 2\mathrm{x}=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

4) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 9\cos^4 x+2\sin^4 x+8\sin^2 x.\cos^2 x=23\cos^2 x-7$ (*)

Đặt $t=\cos^2 x,0\le t\le 1$. Thay $\sin^2 x=1-t$

$(*)\Leftrightarrow 9t^2+2(1-t)^2+8(1-t)t=23t-7$

$\Leftrightarrow 3t^2-19t+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3}{4}\ (N) \\ t=4\ (L) \end{array}\right.$

- Với $t=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi$; $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

Câu 5: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $\tan x-\cot x=\frac{3}{2}$

2). $\frac{1}{\sin^2 x}=\cot x+3$

3). $5\cos x-2\sin\frac{x}{2}+7=0$

4). $\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$

5). $23\sin x-\sin 3x=24$

6). $\sin^3 x+3\sin^2 x+2\sin x=0$

7). $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=4$

8). $\cos 4x+12\sin x\cos x-5=0$

9). $\frac{3}{\sin^2 x}-2\sqrt{3}\cot x-6=0$

10). $4\cos^2(6x-2)+16\cos^2(1-3x)=13$

11). $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\frac{x}{2}$

12). $2\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2=0$

13). $\cos 5x.\cos x=\cos 4x.\cos 2x+3\cos^2 x+1$

LỜI GIẢI

1). $\tan x-\cot x=\frac{3}{2}$ (1). Điều kiện $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq k\pi\end{cases},(k\in\mathbb{Z})$

$(1)\Leftrightarrow\tan x-\frac{1}{\tan x}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\tan^2 x-3\tan x-2=0\quad(1')$

Đặt $\tan x=t$. Phương trình (1') trở thành: $2t^2-3t-2=0\Leftrightarrow t=2\vee t=-\frac{1}{2}$

Với $t=2\Leftrightarrow\tan x=2\Leftrightarrow x=\arctan 2+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Với $t=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\tan x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\arctan 2+k\pi,\ x=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

2). $\frac{1}{\sin^2 x}=\cot x+3$ (1). Điều kiện $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$

$(1)\Leftrightarrow 1+\cot^2 x=\cot x+3\Leftrightarrow\cot^2 x-\cot x-2=0\quad(1')$

Đặt $\cot x = t$. Phương trình (1') trở thành: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 2$

Với $t = -1 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Với $t = 2 \Leftrightarrow \cot x = 2 \Leftrightarrow x = \text{arc}\cot 2 + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \text{arc}\cot 2 + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

3). $5\cos x - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0 \Leftrightarrow 5\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 10\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} - 12 = 0\ (1)$. Đặt $t = \sin\frac{x}{2}, t \in [-1;1]$. Phương trình (1') trở thành:

$5t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{6}{5}$ (loại).

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \pi + k4\pi (k \in \mathbb{Z})$

4). $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$

Các bạn để ý: $\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$*, nên ta nghĩ ngay đến công thức nhân đôi để đưa về phương trình bậc 2 theo cos, ta thực hiện như sau:*

$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \vee \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, cả hai nghiệm này đều nhận.

- $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=-\pi+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

5). $23\sin x-\sin 3x=24 \Leftrightarrow 23\sin x-\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)=24 \Leftrightarrow 4\sin^3 x+20\sin x-24=0$ (1). Đặt $\sin x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $4t^3+20t-24=0 \Leftrightarrow t=1$

$\Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

6). $\sin^3 x+3\sin^2 x+2\sin x=0$ (1)

Đặt $\sin x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $t^3+3t^2+2t=0$

$\Leftrightarrow t=-1 \vee t=-2 \vee t=0$, so với điều kiện nhận $t=-1 \vee t=0$.

Với $t=-1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

Với $t=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=k\pi, (k\in\mathbb{Z})$

7). $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=4$ (1)

Ta có $\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

$(1) \Leftrightarrow 1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=4$ $(1')$

Đặt $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow t=3 \vee t=1$, so với điều kiện nhận $t=1$, suy ra $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

8). $\cos 4x+12\sin x\cos x-5=0 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x+6\sin 2x-5=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x - 3\sin 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \vee \sin 2x = 2$ (loại).

Với $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

9). $\frac{3}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3}\cot x - 6 = 0$. Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3(1 + \cot^2 x) - 2\sqrt{3}\cot x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\cot^2 x - 2\sqrt{3}\cot x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee \cot x = \sqrt{3}$.

Với $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

10). $4\cos^2(6x - 2) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13 \quad (1)$. Đặt $t = 3x - 1$

$(1) \Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 16\cos^2(-t) = 13 \Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 16\cos^2 t = 13$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 16.\frac{1 + \cos 2t}{2} = 13 \Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 8\cos 2t - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2t = \frac{1}{2} \vee \cos 2t = -\frac{5}{2}$ (loại).

Với $\cos 2t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2t = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2t = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ t = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ 3x - 1 = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}, x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$.

11). $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow(2\cos^2 x-1)-3\cos x=4.\frac{1+\cos x}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x-3=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\vee\cos x=3$ (loại).

$\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

12). $2\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2=0\quad(1)$

$(1)\Leftrightarrow\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2=0\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0\vee\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2$ (loại).

Với $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

13). $\cos 5x.\cos x=\cos 4x.\cos 2x+3\cos^2 x+1\quad(1)$

Biến đổi tích về tổng được:

$\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 6x)=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)+3\cos^2 x+1\Leftrightarrow\cos 4x=\cos 2x+6\cos^2 x+2$

Sau đó sử dụng công thức nhân đôi và hạ bậc:

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=\cos 2x+3(1+\cos 2x)+2\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-4\cos 2x-6=0\quad(1')$.

Đặt $\cos 2x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $2t^2-4t-6=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=3$. So với điều kiện nhận $t=-1$, suy ra: $\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Câu 5: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $4\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)-7=0$

2). $2\left(\cos^2 x+\frac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\frac{2}{\cos x}-\cos x\right)-1=0$

3). $3\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+4\left(\tan x+\cot x\right)+2=0$

4). $\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x=6$

LỜI GIẢI

1). $4\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)-7=0\ \ (1)$

Đặt $t=\sin x+\frac{1}{\sin x}\Leftrightarrow t^2=\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)^2\Rightarrow \sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}=t^2-2$

$(1)\Leftrightarrow 4\left(t^2-2\right)+4t-7=0\Leftrightarrow 4t^2+4t-15=0\Leftrightarrow t=-\frac{5}{2}\vee t=\frac{3}{2}$.

• Với $t=-\frac{5}{2}$: $\sin x+\frac{1}{\sin x}=-\frac{5}{2}\ (2)$, đặt $u=\sin x, u\in[-1;1]/\{0\}$

$(2)\Leftrightarrow 2u^2+5u+2=0\Leftrightarrow u=-\frac{1}{2}\vee u=-2$ (loại).

* $u=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

• Với $t=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \sin x+\frac{1}{\sin x}=\frac{3}{2}\ (3)$, đặt $v=\sin x, v\in[-1;1]/\{0\}$

$(3)\Leftrightarrow 2v^2-3v+2=0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

2). $2\left(\cos^2 x+\frac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\frac{2}{\cos x}-\cos x\right)-1=0\ \ (1)$

Đặt $t=\frac{2}{\cos x}-\cos x\Rightarrow t^2=\left(\frac{2}{\cos x}-\cos x\right)^2\Rightarrow \cos^2 x+\frac{4}{\cos^2 x}=t^2+4$

$(1)\Leftrightarrow 2\left(t^2+4\right)+9t-1=0\Leftrightarrow 2t^2+9t+7=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=-\frac{7}{2}$

Với $t=-1\Leftrightarrow \frac{2}{\cos x}-\cos x=-1\Leftrightarrow \cos^2 x-\cos x-2=0\Leftrightarrow \cos x=-1\vee \cos x=2$ (loại).

- $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Với $t=-\frac{7}{2}\Leftrightarrow \frac{2}{\cos x}-\cos x=-\frac{7}{2}\Leftrightarrow 2\cos^2 x-7\cos x-4=0\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}$ hoặc $\cos x=4$ (loại).

- $\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\pi+k2\pi,\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

3). $3\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+4\left(\tan x+\cot x\right)+2=0\ \ (1)$

Đặt $t=\tan x+\cot x\Rightarrow t^2=\left(\tan x+\cot x\right)^2\Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$

$(1)\Leftrightarrow 3\left(t^2-2\right)+4t+2=0\Leftrightarrow 3t^2+4t-4=0\Leftrightarrow t=-2\vee t=\frac{2}{3}$

- Với $t=-2\Leftrightarrow \tan x+\cot x=-2\Leftrightarrow \tan x+\frac{1}{\tan x}=-2\Leftrightarrow \tan^2 x+2\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow \tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

- Với $t=\frac{2}{3}\Leftrightarrow \tan x+\cot x=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \tan x+\frac{1}{\tan x}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3\tan^2 x+2\tan x+3=0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

4). $\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x=6\ \ (1)$

Đặt $t=\tan x+\cot x$.

Có: $\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2\tan x \cot x = t^2 - 2$.

Có: $\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)^3 - 3\tan x.\cot x(\tan x + \cot x) = t^3 - 3t$.

$(1) \Leftrightarrow (\tan x + \cot x) + (\tan^2 x + \cot^2 x) + (\tan^3 x + \cot^3 x) = 6$.

$\Leftrightarrow t + t^2 - 2 + t^3 - 3t = 6 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Với $t = 2 \Leftrightarrow \tan x + \cot x = 2 \Leftrightarrow \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = 2 \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 6: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $\sin^4 + \cos^4 x - 2\sin 2x + \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = 0$ 2). $\cos^6 2x + \sin^6 2x = \dfrac{15}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}$

3). $\sin^4 x + \dfrac{5}{3}\cos^4 x = 1$ 4). $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ 5). $\sin^4 x + \cos 2x + 4\sin^6 x = 0$ 6). $\cos 8x + \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x - 1 = 0$

LỜI GIẢI

1). $\sin^4 + \cos^4 x - 2\sin 2x + \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right) - 2\sin 2x + \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\sin^2 2x - 2\sin 2x + 1 = 0$ $(1')$

Đặt $\sin 2x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $\dfrac{1}{4}t^2 - 2t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 4 + 2\sqrt{3} \vee t = 4 - 2\sqrt{3}$. So với điều kiện nhận $t = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow \sin 2x = 4 - 2\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + k2\pi \\ 2x = \pi - \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right)}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \dfrac{\pi - \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right)}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)}{2}+k\pi, x=\dfrac{\pi-\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

2). $\cos^6 2x+\sin^6 2x=\dfrac{15}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{2}\ \ (1)$

$(1)\Leftrightarrow 1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=\dfrac{15}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1-\cos 4x}{2}=\dfrac{15}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 8-3\left(1-\cos 4x\right)=15\cos 4x-4\Leftrightarrow \cos 4x=\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 4x=\pm\arccos\dfrac{3}{4}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{3}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{3}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

3). $\sin^4 x+\dfrac{5}{3}\cos^4 x=1\Leftrightarrow\left(\sin^2 x\right)^2+\dfrac{5}{3}\left(\cos^2 x\right)^2=1$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=1\ \ (1)$. Đặt $\cos 2x=t, t\in[-1;1]$

$(1)\Leftrightarrow\dfrac{1-2t+t^2}{4}+\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1+2t+t^2}{4}=1\Leftrightarrow 8t^2+4t-4=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=\dfrac{1}{2}$.

Với $t=-1\Leftrightarrow\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\2x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

4). $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right)+\dfrac{1}{2}\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(2x-\pi\right)\right]=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x+\dfrac{1}{2}\left(-1-\sin 2x\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\sin^2 2x+\sin 2x=0\Leftrightarrow\sin 2x=0\vee\sin 2x=-1$

Với $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},(k \in \mathbb{Z})$

Với $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,(k \in \mathbb{Z})$

5). $\sin^4 x + \cos 2x + 4\sin^6 x = 0 \Leftrightarrow \left(\sin^2 x\right)^2 + \cos 2x + 4\left(\sin^2 x\right)^3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \cos 2x + 4\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 = 0$ (1). Đặt $\cos 2x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + t + 4\left(\frac{1-t}{2}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 7t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (loại).

Kết luận phương trình vô nghiệm.

6). $\cos 8x + \sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x - 1 = 0 \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \cos 8x + \sin x\cos x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x - \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 4x - \frac{1}{4}\sin 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 4x + \frac{1}{4}\sin 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \vee \sin 4x = -\frac{1}{8}$

Với $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4},(k \in \mathbb{Z})$.

Với $\sin 4x = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + k2\pi \\ 4x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right.,(k \in \mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{k\pi}{2}$,

$x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{k\pi}{2},(k \in \mathbb{Z})$

Câu 7: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

2). $\cot x+\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)\sin x=4$

3). $\cot x-\tan x=\frac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x$

4). $\sqrt{2}(2\sin x-1)=4(\sin x-1)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

5). $\cot x-1=\frac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x$ (ĐH khối A 2003)

6). $5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x$ (ĐH khối B 2004)

7). $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$ (ĐH khối A 2005).

8). $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$ (ĐH khối D 2005).

9). $\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ (ĐH khối A 2010).

10). $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{8\sin 2x}$ (1) [Dự bị 2 ĐH02]

11). $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$.[ĐH B03]

12). $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$ (1) [Dự bị 1 ĐH B03]

13). $\cot x=\tan x+\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$ [Dự bị 2 ĐH D03]

LỜI GIẢI

1). $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ (1)

$(1)\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 4\left(\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}\right)^2=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \vee \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

Với $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$

Với $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}, x=\frac{\pi}{4}+k\pi, x=-\frac{\pi}{12}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

2). $\cot x+\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)\sin x=4$ (1). Điều kiện $\begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \\ \cos\frac{x}{2}\neq 0 \end{cases}$

Ta có: $1+\tan x\tan\frac{x}{2}=1+\frac{\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos\left(x-\frac{x}{2}\right)}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\cos x}$

$(1)\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=4 \Leftrightarrow \cos^2 x+\sin^2 x=4\sin x\cos x \Leftrightarrow 2\sin 2x=1$

$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{12}+k\pi, x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

3). $\cot x-\tan x=\frac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x$ (1). Điều kiện $\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}$

$(1)\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x \quad \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x$

$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x \quad \Leftrightarrow 2\cos 2x=2-4\sin^2 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x=1-2\left(1-\cos^2 2x\right) \quad \Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 1 \vee \cos 2x = -\dfrac{1}{2}$.

Với $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ (loại)

Với $\cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

4). $\sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \left[\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \sqrt{2}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \sqrt{2}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \sqrt{2}(1 - 2\sin^2 x)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^2 x + 2(2 - \sqrt{2})\sin x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -\sqrt{2}$ (loại).

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

5). $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$ (1). Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ 1 + \tan x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - 1 = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}} + \sin^2 x - \sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\frac{\cos x\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x\right)}{\cos x+\sin x}+\sin x\left(\sin x-\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\cos x\left(\cos x-\sin x\right)-\sin x\left(\cos x-\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left(\frac{1}{\sin x}-\cos x+\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x-\sin x=0 \vee \frac{1}{\sin x}-\cos x+\sin x=0$$

Với $\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Với $\frac{1}{\sin x}-\cos x+\sin x=0 \Leftrightarrow 1-\sin x\cos x+\sin^2 x=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=3 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=3 \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

6). $5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\tan^2 x \quad (1)$. Điều kiện: $\cos x\neq 0$.

$$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}.$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\frac{\sin^2 x}{\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)}.$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3.\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}.$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ hoặc $\sin x=-2$ (vô nghiệm).

Với $\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$, so với điều kiện thỏa.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

7). $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$ (1) (ĐH khối A 2005).

$(1)\Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}.\cos 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=0\Leftrightarrow (1+\cos 6x)\cos 2x-(1+\cos 2x)=0$

$\cos 6x\cos 2x-1=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 8x)-1=0\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 8x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x+\cos 4x-3=0\Leftrightarrow \cos 4x=1\vee \cos 4x=-\frac{3}{2}$ (loại).

Với $\cos 4x=1\Leftrightarrow 4x=k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$

8). $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$ (1) (ĐH khối D 2005).

$(1)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\left[\sin 2x+\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)\right]-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}(\sin 2x-\cos 4x)-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow -\sin^2 2x+\sin 2x-\cos 4x-1=0$ $\Leftrightarrow -\sin^2 2x+\sin 2x-(1-2\sin^2 2x)-1=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0$ $\Leftrightarrow \sin 2x=1$ hoặc $\sin 2x=-2$ (loại).

Với $\sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

9). $\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ (ĐH khối A 2010).

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ 1+\tan x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq 0\\ \tan x \neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x \neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x(1+\sin x+\cos 2x)}{\sin x+\cos x}.\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x.$$

$\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos 2x = 1 \Leftrightarrow -2\sin^2 x+\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = 1$ (loại).

Với $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6}+k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x = -\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6}+k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.