

**PHÉP CHIẾU SONG SONG.**

**Phần 1: LÝ THUYẾT TÓM TẮT**

**1. Phép chiếu song song.**

- Cho đường thẳng  $\Delta$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ . Lấy một điểm  $M$  trong không gian.
- Từ  $M$  dựng đường thẳng  $d$  ( $d // \Delta$  hoặc  $d \equiv \Delta$ ). Đường thẳng  $d \cap (\alpha) = \{M'\}$ .
- Ta nói  $M'$  là hình chiếu của  $M$  theo phép chiếu song song là đường thẳng  $\Delta$ .

Ta kí hiệu  $Ch_{\Delta}(\alpha)(M) = M'$ .

**2. Tính chất.**

- Bảo toàn sự thẳng hàng và thứ tự các điểm.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

**3. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng.**

- Hình biểu diễn của một hình trong không gian là chiếu song song của hình đó lên mặt phẳng hoặc đồng dạng với hình chiếu đó.
- Hình biểu diễn của tam giác cân, tam giác vuông, tam giác đều thường là một tam giác bất kỳ.
- Hình biểu diễn của hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông thường là hình bình hành.
- Hình biểu diễn của hình thang là một hình thang.
- Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip hay hình tròn.

**DẠNG : Vẽ hình biểu diễn của một hình  $H$  cho trước.**

**Phương pháp**

- Xác định các yếu tố song song của hình  $H$ .
- Xác định tỷ số điểm  $M$  chia đoạn thẳng  $AB$ .
- Hình  $H'$  là hình biểu diễn của hình  $H$  phải có tính chất.
- + Bảo đảm tính song song của hình  $H$ .
- + Bảo đảm tỷ số của điểm  $M$  chia đoạn thẳng  $AB$ .

**Phần 2: BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Qua phép chiếu song song đường thẳng  $AA'$  mặt phẳng chiếu là  $(A'B'C')$  biến  $G$  thành  $G'$ . Chứng minh  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$ .

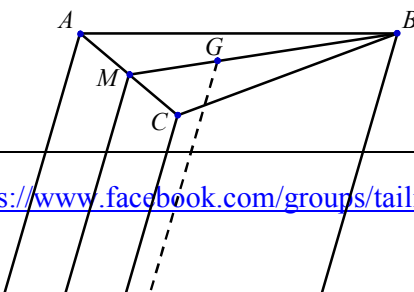
Lời giải

Gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ .

Do  $ABC.A'B'C'$  là hình lăng trụ. Suy ra qua phép chiếu song song đường thẳng  $AA'$  biến  $B$  thành  $B'$ , biến  $M$  thành  $M'$ .

Theo đầu bài  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Suy ra  $B, M, G$  thẳng hàng và  $\frac{BG}{BM} = \frac{2}{3}$ .

Ta có  $B', M', G'$  thẳng hàng và  $\frac{B'G'}{B'M'} = \frac{2}{3}$ . Mặt khác  $M$  là trung điểm của  $AC$ , suy ra  $M'$  là trung điểm của  $A'C'$ . Suy ra  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$ .

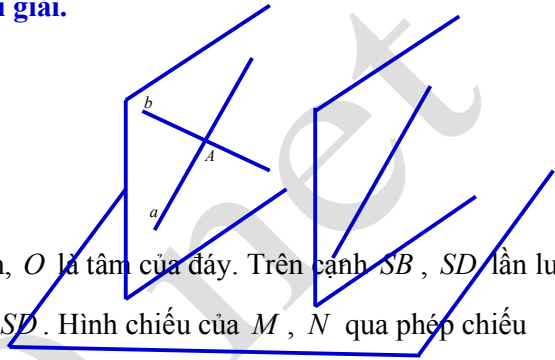


Bài tập tự luyện:

**Bài 1.** Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau không? Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau hay không?

**Lời giải.**

Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.  
Hình chiếu của hai đường thẳng cắt nhau thì không thể song song với nhau.



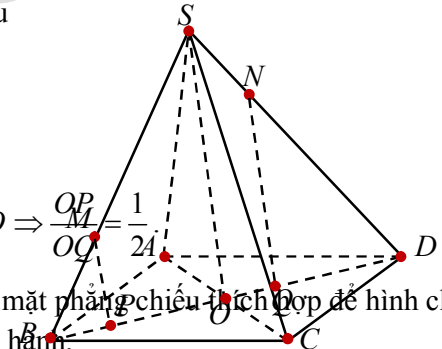
**Bài 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình bình hành,  $O$  là tâm của đáy. Trên cạnh  $SB, SD$  lần lượt lấy điểm  $M, N$  sao cho  $SM = 2MB, SN = \frac{1}{3}SD$ . Hình chiếu của  $M, N$  qua phép chiếu song song đường thẳng  $SO$  mặt phẳng chiếu  $(ABCD)$  lần lượt là  $P, Q$ . Tính tỉ số  $\frac{OP}{OQ}$ .

**Lời giải.**

Do  $P$  là hình chiếu song song của  $M$  qua phép chiếu đường thẳng  $SO \Rightarrow \frac{BM}{BS} = \frac{BP}{BO}$ .

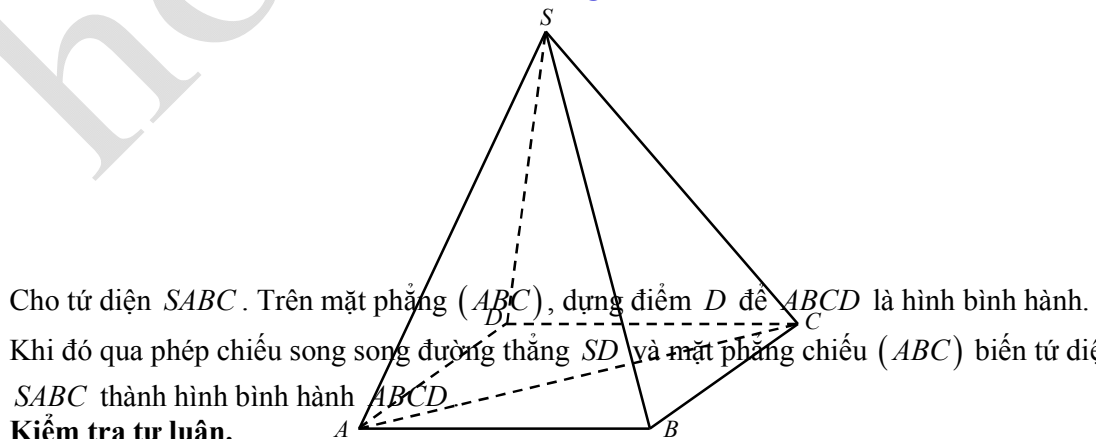
$$\text{Mà } SM = 2MB \Rightarrow \frac{BP}{BO} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OP}{OB} = \frac{2}{3}.$$

Chứng minh tương tự ta có  $\frac{OQ}{OD} = \frac{1}{3}$ . Ta có  $BO = DO \Rightarrow \frac{OP}{OQ} = \frac{1}{2}$ .



**Bài 3.** Hãy chọn phép chiếu song song với phương chiếu và mặt phẳng chiếu để hình chiếu song song của một tứ diện cho trước là một hình bình hành.

**Lời giải.**



Cho tứ diện  $SABC$ . Trên mặt phẳng  $(ABC)$ , dựng điểm  $D$  để  $ABCD$  là hình bình hành. Khi đó qua phép chiếu song song đường thẳng  $SD$  và mặt phẳng chiếu  $(ABC)$  biến tứ diện  $SABC$  thành hình bình hành  $ABCD$ .

**Kiểm tra tự luận.**

Câu 1: Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy là hình bình hành. Gọi  $O$  là tâm của đáy, lấy  $M, N$  là ảnh của điểm  $A, D$  qua phép chiếu song song đường thẳng  $SO$  trên mặt phẳng chiếu  $(SBC)$ . Khi đó tứ giác  $BCNM$  là hình gì? Hình chóp  $S.ABCD$  thêm điều kiện gì để tứ giác  $BCNM$  là hình vuông?

Câu 2: Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , tìm ảnh của điểm  $A, B'$   
 a) Qua phép chiếu song song đường thẳng  $CD$  mặt phẳng chiếu  $(BCC'B')$ .  
 b) Qua phép chiếu song song đường thẳng  $CD'$  mặt phẳng chiếu  $(ABB'A')$ .

**Phần 3: BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:**

**Mức độ nhận biết - thông hiểu.**

Câu 1: Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?  
 A. Chéo nhau.                      B. Đồng qui.                      C. Song song.                      D. Thẳng hàng.

**Lời giải.**

**Chọn A.**

Do hai đường thẳng qua phép chiếu song song ảnh của chúng sẽ cùng thuộc một mặt phẳng. Suy ra tính chất chéo nhau không được bảo toàn.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?  
 A. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.  
 B. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song.  
 C. Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó.  
 D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Tính chất của phép chiếu song song.  
 Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau. Suy ra B sai : Chúng có thể trùng nhau.

Câu 3: Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ , qua phép chiếu song song đường thẳng  $CC'$ , mặt phẳng chiếu  $(A'B'C')$  biến  $M$  thành  $M'$ . Trong đó  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chọn mệnh đề đúng?

A.  $M'$  là trung điểm của  $A'B'$ .                      B.  $M'$  là trung điểm của  $B'C'$ .  
 C.  $M'$  là trung điểm của  $A'C'$ .                      D. Cả ba đáp án trên đều sai.

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Ta có phép chiếu song song đường thẳng  $CC'$ , biến  $C$  thành  $C'$ , biến  $B$  thành  $B'$ . Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  suy ra  $M'$  là trung điểm của  $B'C'$ .

Câu 4: Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ , gọi  $I, I'$  lần lượt là trung điểm của  $AB, A'B'$ . Qua phép chiếu song song đường thẳng  $AI'$ , mặt phẳng chiếu  $(A'B'C')$  biến  $I$  thành?

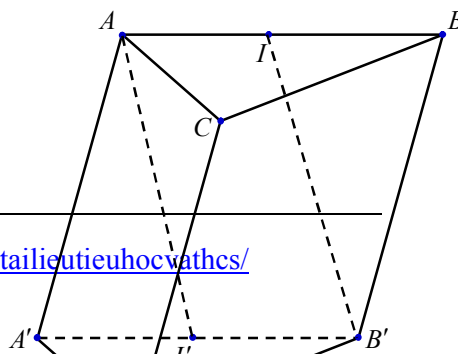
A.  $A'$ .                      B.  $B'$ .                      C.  $C'$ .                      D.  $I'$ .

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Ta có  $\left. \begin{matrix} AI // B'I' \\ AI = B'I' \end{matrix} \right\} \Rightarrow AIB'I'$  là hình bình hành.

Suy ra qua phép chiếu song song đường thẳng



$AI'$ , mặt phẳng chiếu ( $A'B'C'$ ) biến điểm  $I$  thành điểm  $B'$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$  ở trong mặt phẳng  $(\alpha)$  và phương  $l$ . Biết hình chiếu (theo phương  $l$ ) của tam giác  $ABC$  lên mặt phẳng  $(P)$  là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $(\alpha) \parallel (P)$ .  
B.  $(\alpha) \equiv (P)$ .  
C.  $(\alpha) \parallel l$  hoặc  $(\alpha) \supset l$ .  
D. A, B, C đều sai.

**Lời giải.**

**Chọn C.**

- Phương án A: Hình chiếu của tam giác  $ABC$  vẫn là một tam giác trên mặt phẳng  $(P)$ .
- Phương án B: Hình chiếu của tam giác  $ABC$  vẫn là tam giác  $ABC$ .
- Phương án C: Khi phương chiếu  $l$  song song hoặc được chứa trong mặt phẳng  $(\alpha)$ . Thì hình chiếu của tam giác là đoạn thẳng trên mặt phẳng  $(P)$ . Nếu giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(P)$  là một trong ba cạnh của tam giác  $ABC$ .

**Câu 6:** Phép chiếu song song theo phương  $l$  không song song với  $a$  hoặc  $b$ , mặt phẳng chiếu là  $(P)$ , hai đường thẳng  $a$  và  $b$  biến thành  $a'$  và  $b'$ . Quan hệ nào giữa  $a$  và  $b$  không được bảo toàn trong phép chiếu song song?

- A. Cắt nhau.      B. Trùng nhau.      C. Song song.      D. Chéo nhau.

**Lời giải.**

**Chọn D.**

Do  $a'$  và  $b'$  cùng được chứa trong mặt phẳng chiếu  $(P)$ . Suy ra tính chất chéo nhau không được bảo toàn.

**Câu 7:** Hình chiếu của hình chữ nhật không thể là hình nào trong các hình sau?

- A. Hình thang.      B. Hình bình hành.      C. Hình chữ nhật.      D. Hình thoi.

**Lời giải.**

**Chọn A.**

Tính chất của phép chiếu song song.

**Câu 8:** Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình tam giác.  
B. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một đoạn thẳng.  
C. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình chóp cụt.  
D. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một điểm.

**Lời giải.**

**Chọn A.**

Qua phép chiếu song song chỉ có thể biến hình chóp cụt thành một đa giác.

- Loại B - chỉ là một đoạn thẳng.
- Loại C - phép chiếu song song không thể là một khối đa diện.
- Loại D - chỉ là một điểm.
- Chọn A - hình chiếu là một đa giác.

- Câu 9:** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?
- A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
  - B. Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
  - C. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.
  - D. Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.

**Lời giải.**

**Chọn C.**

- Phương án A: Đúng vì khi đó hình chiếu của chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.
- Phương án B: Đúng vì mặt phẳng chiếu chứa đường thẳng đã cho.
- Phương án C: Sai vì hình chiếu của chúng chỉ có thể song song hoặc cắt nhau.
- Phương án D: Đúng - tính chất phép chiếu song song.

- Câu 10:** Qua phép chiếu song song biến ba đường thẳng song song thành.

- A. Ba đường thẳng đôi một song song với nhau.
- B. Một đường thẳng.
- C. Thành hai đường thẳng song song.
- D. Cả ba trường hợp trên.

**Lời giải.**

**Chọn D.**

Tính chất phép chiếu song song.

- Câu 11:** Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Hình chiếu song song của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  theo phương  $AA'$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$  là hình bình hành.
  - B. Hình chiếu song song của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  theo phương  $AA'$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$  là hình vuông.
  - C. Hình chiếu song song của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  theo phương  $AA'$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$  là hình thoi.
  - D. Hình chiếu song song của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  theo phương  $AA'$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$  là một tam giác.

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Qua phép chiếu song song đường thẳng  $AA'$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$  sẽ biến  $A'$  thành  $A$ , biến  $B'$  thành  $B$ , biến  $C'$  thành  $C$ , biến  $D'$  thành  $D$ . Nên hình chiếu song song của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình vuông.

- Câu 12:** Hình chiếu của hình vuông không thể là hình nào trong các hình sau?
- A. Hình vuông.
  - B. Hình bình hành.
  - C. Hình thang.
  - D. Hình thoi.

**Lời giải.**

**Chọn C.**

Tính chất của phép chiếu song song.

- Câu 13:** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:
- A. Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu của nó.
  - B. Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.
  - C. Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
  - D. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

**Lời giải.**

**Chọn A.**

Khi mặt phẳng chiếu song song với đường thẳng đã cho thì đường thẳng đó song song với hình chiếu của nó.

**Câu 14:** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:

- A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.
- B. Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác vuông.
- C. Một đường thẳng có thể cắt với hình chiếu của nó.
- D. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau.

**Lời giải.**

**Chọn A.**

- Phương án B: Đúng - theo tính chất của phép chiếu song song.
- Phương án C: Đúng vì khi đường thẳng đã cho cắt mặt phẳng chiếu.
- Phương án D: Đúng vì phương chiếu song song với mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau đó.

**Câu 15:** Nếu đường thẳng  $a$  cắt mặt phẳng chiếu ( $P$ ) tại điểm  $A$  thì hình chiếu của  $a$  sẽ là:

- A. Điểm  $A$ .
- B. Trùng với phương chiếu.
- C. Đường thẳng đi qua  $A$ .
- D. Đường thẳng đi qua  $A$  hoặc chính  $A$ .

**Lời giải.**

**Chọn D.**

- Nếu phương chiếu song song hoặc trùng với đường thẳng  $a$  thì hình chiếu là điểm  $A$ .
- Nếu phương chiếu không song song hoặc không trùng với đường thẳng  $a$  thì hình chiếu là đường thẳng đi qua điểm  $A$ .

**Câu 16:** Giả sử tam giác  $ABC$  là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là:

- A. Giao điểm của hai đường trung tuyến của tam giác  $ABC$ .
- B. Giao điểm của hai đường trung trực của tam giác  $ABC$ .
- C. Giao điểm của hai đường đường cao của tam giác  $ABC$ .
- D. Giao điểm của hai đường phân giác của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao của ba đường trung trực.

**Câu 17:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành.  $M$  là trung điểm của  $SC$ . Hình chiếu song song của điểm  $M$  theo phương  $AB$  lên mặt phẳng ( $SAD$ ) là điểm nào sau đây?

- A.  $S$ .
- B. Trung điểm của  $SD$ .
- C.  $A$ .
- D.  $D$ .

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Giả sử  $N$  là ảnh của  $M$  theo phép chiếu song song đường thẳng  $AB$  lên mặt phẳng ( $SAD$ ).

Suy ra  $MN // AB \Rightarrow MN // CD$ . Do  $M$  là trung điểm của  $SC \Rightarrow N$  là trung điểm của  $SD$ .

**Câu 18:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Hình chiếu song song của điểm  $A$  theo phương  $AB$  lên mặt phẳng ( $SBC$ ) là điểm nào sau đây?

- A.  $S$ .
- B. Trung điểm của  $BC$ .
- C.  $B$ .
- D.  $C$ .

**Lời giải.**

**Chọn C.**

Do  $AB \cap (SBC) = \{A\}$  suy ra hình chiếu song song của điểm  $A$  theo phương  $AB$  lên mặt phẳng ( $SBC$ ) là điểm  $B$ .



**Phần 4: Bài kiểm tra.**

- Câu 1.** Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.
- A. Phép chiếu song song có thể biến đường thẳng thành đường thẳng.
  - B. Phép chiếu song song có thể biến đường thẳng thành đoạn thẳng.
  - C. Phép chiếu song song có thể biến đường thẳng thành một điểm.
  - D. Phép chiếu song song có thể biến một đường thẳng thành chính nó.
- Câu 2.** Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.
- A. Phép chiếu song song có thể biến một tam giác đều thành một tam giác bất kỳ.
  - B. Phép chiếu song song có thể biến một tam giác vuông thành một tam giác bất kỳ.
  - C. Phép chiếu song song biến một tam giác thành một tam giác.
  - D. Phép chiếu song song biến một tam giác thành một tam giác, thành một điểm hoặc một đoạn thẳng.
- Câu 3.** Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.
- A. Phép chiếu song song có thể biến một tứ diện thành một hình bình hành.
  - B. Phép chiếu song song có thể biến một tứ diện thành một tam giác.
  - C. Phép chiếu song song có thể biến một tứ diện thành một hình vuông.
  - D. Phép chiếu song song có thể biến một tứ diện thành một đường thẳng.
- Câu 4.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A. Phép chiếu song song có thể biến hình bình hành thành một hình thang.
  - B. Phép chiếu song song có thể biến hình thang thành hình bình hành.
  - C. Phép chiếu song song có thể biến hình bình hành thành hình thoi.
  - D. Phép chiếu song song có thể biến hình thoi thành hình bình hành.
- Câu 5.** Giả sử tứ giác  $ABCD$  là hình biểu diễn của một hình vuông. Nếu  $ABCD$  là một hình bình hành, thì đường tròn ngoại tiếp hình vuông cho trước được biểu diễn là hình gì, có tính chất như thế nào mới hình bình hành  $ABCD$  :
- A. Là hình tròn đi qua các đỉnh của hình bình hành  $ABCD$ .
  - B. Là hình elip đi qua các đỉnh của hình bình hành  $ABCD$ .
  - C. Là hình tròn nhưng không đi qua các đỉnh của hình bình hành  $ABCD$ .
  - D. Là hình elip nhưng không đi qua các đỉnh của hình bình hành  $ABCD$ .
- Câu 6.** Giả sử tứ giác  $ABCD$  là hình biểu diễn của một tứ diện  $ABCD'$ . Nếu  $ABCD$  là một hình vuông, tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.
- A.  $\triangle ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ .
  - B.  $\triangle ABC$  là tam giác vuông cân tại  $C$ .
  - C.  $\triangle ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$ .
  - D.  $\triangle ABC$  là tam giác đều.
- Câu 7.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành, trên cạnh  $SA$  lấy điểm  $M$  sao cho  $MA = 2MS$ . Gọi  $O$  là tâm của đáy, qua phép chiếu song song đường thẳng  $MO$  mặt phẳng chiếu  $(ABCD)$  biến điểm  $S$  thành điểm  $N$ . Tính tỷ số  $\frac{CN}{CA}$ .
- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B.  $\frac{2}{3}$ .                      C.  $\frac{1}{4}$ .                      D.  $\frac{1}{3}$ .
- Câu 8.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Qua phép chiếu song song đường thẳng  $AB$  lên mặt phẳng chiếu  $(BDD'B')$ . Hình chiếu của hình hộp là hình gì?
- A. Hình bình hành.            B. Hình thoi.                      C. Hình chữ nhật.            D. Hình vuông.

**Câu 9.** Cho hình chóp  $S.ABC$  các mặt bên là tam giác đều. Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $N$  là điểm trên cạnh  $SA$  sao cho  $\frac{SN}{NA} = \frac{1}{2}$ . Qua phép chiếu song song đường thẳng  $SM$  mặt phẳng chiếu

$(ABC)$  biến  $N$  thành:

- A.** Tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .                      **B.** Tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ .  
**C.** Trọng tâm của  $\Delta ABC$ .                                      **D.** Cả ba đáp án trên.

**Câu 10.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ , gọi  $M, N, P$  lần lượt là tâm của các mặt bên  $(ABB'A')$ ,  $(BCC'B')$  và  $(ACC'A')$ . Qua phép chiếu song song đường thẳng  $BC'$  và mặt phẳng chiếu  $(AB'C)$  khi đó hình chiếu của điểm  $P$ ?

- A.** Trung điểm của  $AN$ .                                      **B.** Trung điểm của  $AM$ .  
**C.** Trung điểm của  $B'N$ .                                      **D.** Trung điểm của  $B'M$ .