

CHUYÊN ĐỀ: LƯỢNG GIÁC LỚP 10

VẤN ĐỀ I. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

I: LÝ THUYẾT

1. Đơn vị đo góc và cung: $1^\circ = 60$ phút; 1 phút = 60 giây; $\pi = 180^\circ$; $\pi \approx 3.14$

* Độ: kí hiệu a° * Radian: kí hiệu α

a) Đổi radian ra độ: $a^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$ b) Đổi độ ra radian: $\alpha = \frac{\pi \cdot a^\circ}{180^\circ}$

2) Độ dài của 1 cung tròn: $l = R\alpha$ (R là bán kính đường tròn, α tính bằng radian)

3) Số đo của các cung lượng giác có điểm đầu A và điểm cuối B

Kí hiệu: $Sđ\widehat{AB} = \alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) hoặc $Sđ\widehat{AB} = a^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$)

4) Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng có bán kính $R = 1$, có tâm là gốc tọa độ O

+ Đường tròn lượng giác cắt hai trục tọa độ tại: $A(1; 0)$, $A'(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $B'(0; -1)$

+ $Sđ\widehat{AM} = Sđ(OA, OM) = \alpha$ (A là điểm gốc, M là điểm ngọn)

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Đổi số đo của các góc sau đây ra radian:

a) 60° b) 45° c) 24° d) $65^\circ 14'$ e) -27° f) $-137^\circ 38'$

Giải: a) $\alpha = \frac{\pi \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \approx 1,0472$

b) $\alpha = \frac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$

c) $\alpha = \frac{\pi \cdot 24^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi}{15} \approx 0,4189$

d) $\alpha = \frac{\pi \cdot 65^\circ 14'}{180^\circ} \approx 1,1385$

e) $\alpha = \frac{\pi \cdot (-27^\circ)}{180^\circ} = -\frac{3\pi}{20} \approx -0,4712$

f) $\alpha = \frac{\pi \cdot (-137^\circ 38')}{180^\circ} \approx -2,4022$

* Dùng máy tính bỏ túi (570MS, 570ES) (Đổi về hệ: Rad)

Bấm: a° (độ)/SHIFT /DRG/1⁰/=/S \Leftrightarrow D

VD: a) Bấm: 60° / SHIFT/ DRG/1⁰/=/ S \Leftrightarrow D: 1,0472

Bài 2: Đổi số đo của các góc sau đây ra độ, phút, giây:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{17}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{2\pi}{7}$ e) -5 f) $\frac{2\pi}{3}$

Giải: a) $a^{\circ} = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot 180^{\circ}}{\pi} = 60^{\circ}$ b) $a^{\circ} = \frac{\frac{\pi}{17} \cdot 180^{\circ}}{\pi} = 10^{\circ}35'$ c) $a^{\circ} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 180^{\circ}}{\pi} = 38^{\circ}12'$

d) $a^{\circ} = \frac{-\frac{2\pi}{7} \cdot 180^{\circ}}{\pi} = -51^{\circ}25'$ e) $a^{\circ} = \frac{-5 \cdot 180^{\circ}}{\pi} = -286^{\circ}29'$ f) $a^{\circ} = \frac{\frac{2\pi}{3} \cdot 180^{\circ}}{\pi} = 120^{\circ}$

* Dùng máy tính bỏ túi (570MS, 570ES) (Đổi về hệ: Deg)

Bấm: α (radian)/SHIFT /DRG/2^r/= /S \Leftrightarrow D (phân số: dùng dấu ÷ và để trong ngoặc đơn)

VD: b) Bấm: $(\pi \div 17)$ / SHIFT / DRG/2^r/= / S \Leftrightarrow D / "''': $10^{\circ}35'$

Bài 3: Một đường tròn có bán kính là 15cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo:

a) $\frac{\pi}{16}$ b) 25° c) 40° d) 3

Giải: a) Độ dài cung $\frac{\pi}{16}$ là: $l = 15 \cdot \frac{\pi}{16} \approx 2,95\text{cm}$

b) Đổi: $25^{\circ} = 0,4363$. Độ dài cung 25° là: $l = 15 \cdot 0,4363 \approx 6,55\text{cm}$

c) Đổi: $40^{\circ} = 0,6981$. Độ dài cung 40° là: $l = 15 \cdot 0,6981 \approx 10,47\text{cm}$

d) Độ dài cung 3 là: $l = 15 \cdot 3 = 45\text{cm}$

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Đổi số đo của các góc sau đây ra radian:

a) 30° b) 20° c) -45° d) $40^{\circ}25'$ e) -27° f) $-53^{\circ}30'$

Bài 2: Đổi số đo của các góc sau đây ra độ, phút, giây:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{18}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $-\frac{5\pi}{6}$ e) -2 f) $\frac{3\pi}{16}$

Bài 3: Một đường tròn có bán kính là 15cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo:

a) $\frac{\pi}{15}$

b) 1,5

c) 37^0

d) $\frac{4}{3}$

hoc360.net

VẤN ĐỀ II. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC:

I: LÝ THUYẾT

1. a) $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$ c) $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$
 b) $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$ d) $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$
2. a) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ b) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$
3. Bảng dấu các giá trị lượng giác

Góc phần tư	I	II	III	IV
	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
GTLG	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-		-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

4. Các công thức lượng giác:

1) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$	2) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$
3) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	4) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
5) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	5) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

5. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt:

a) *Cung đối nhau:* α và $-\alpha$

1) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
 2) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

b) *Cung bù nhau:* α và $\pi - \alpha$

1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
 2) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

$$3) \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$4) \cos(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$3) \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$4) \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

c) *Cung hơn kém π : α và $\alpha + \pi$*

$$1) \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$2) \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$3) \tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$$

$$4) \cos(\alpha + \pi) = \cot \alpha$$

d) *Cung phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$*

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$3) \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$4) \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

6. Công thức cộng:

$$1) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$5) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$2) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$6) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$3) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$4) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

7. Công thức nhân đôi:

$$1) \sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 a$$

$$3) \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$1) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$2) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$3) \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

8. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$1) \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)] \quad 2) \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$3) \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)] \quad 4) \cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

9. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$1) \cos a + \cos b = 2\cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$2) \cos a - \cos b = -2\sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$3) \sin a + \sin b = 2\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$4) \sin a - \sin b = 2\cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$

Giải: Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$. Suy ra: $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$

$$\text{Khi đó: } * \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \quad * \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

Bài 2: Cho $\tan \alpha = -\frac{4}{5}$, với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cot \alpha$

Giải: Ta có: $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

* $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{41} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{25}{41}} = \pm \frac{5\sqrt{41}}{41}$

Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cos \alpha > 0$. Suy ra: $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$

* $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5\sqrt{41}}{41} = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$

Bài 3: a) Tính $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

b) Tính $\sin(a - b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}$ với $0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}$ với $90^\circ < b < 180^\circ$

c) Tính $\tan\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos a = -\frac{5}{13}$ và $a \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Giải: a) Ta có: $A = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$

* Tính $\cos \alpha$: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha > 0$ nên $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy: $A = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-3 + \sqrt{6}}{6}$

b) Ta có: $B = \sin(a - b) = \sin a \cdot \sin b - \cos a \cdot \cos b$

* Tính $\cos a$: $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos a = \pm \frac{3}{5}$

Vì $0^\circ < a < 90^\circ \Rightarrow \cos a > 0$ nên $\cos a = \frac{3}{5}$

* Tính $\cos b$: $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos b = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

Vì $0^\circ < a < 90^\circ \Rightarrow \cos b < 0$ nên $\cos b = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Vậy: $B = \sin a \cdot \sin b - \cos a \cdot \cos b = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{8 + 3\sqrt{5}}{15}$

c) Ta có: $C = \tan\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan a + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan a \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan a + 1}{1 - \tan a}$

* Tính $\tan a$: $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{5}{13}\right)^2} - 1 = \frac{144}{25} \Rightarrow \tan a = \pm \frac{12}{5}$

Vì $a \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan a > 0$. Suy ra: $\tan a = \frac{12}{5}$. Vậy: $C = \frac{\tan a + 1}{1 - \tan a} = \frac{\frac{12}{5} + 1}{1 - \frac{12}{5}} = -\frac{17}{7}$

Bài 4: Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$ và $\tan 2a$, biết:

a) $\sin a = -0,6$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{3\pi}{4} < a < \pi$

Giải: a) Ta có: $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$

* Tính $\cos a$: $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - (-0,6)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos a = \pm \frac{4}{5}$

Vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos a < 0$ nên $\cos a = -\frac{4}{5}$. Vậy: $\sin 2a = 2 \cdot (-0,6) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$

* $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - (-0,6)^2 = \frac{7}{25}$ * $\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$

b) Ta có: $\sin a + \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin a + \cos a)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin a \cos a = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \sin 2a = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

* Tính $\cos 2a$: $\cos^2 2a = 1 - \sin^2 2a = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \Rightarrow \cos 2a = \pm \sqrt{\frac{7}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$

Vì $\frac{3\pi}{4} < a < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 2a < 2\pi \Rightarrow \cos 2a > 0 \Rightarrow \cos 2a = \frac{\sqrt{7}}{4}$ * $\tan 2a = \frac{120}{119}$

Bài 5: Tính giá trị của biểu thức: a) $A = \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8}$ b) $B = \sin \frac{13\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24}$

Giải: a) Ta có: $A = \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} \right) \right]$
 $= \frac{1}{2} \left[\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \sin \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$

b) $B = \sin \frac{13\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{13\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} \right) - \cos \left(\frac{13\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} \right) \right]$
 $= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{3\pi}{4} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$

Bài 6: Biến đổi thành tích các biểu thức sau:

a) $A = 1 - \sin x$ b) $B = 1 - 2\sin x$ c) $C = \sin 3x + \sin 2x$

d) $D = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ e) $E = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$

f) $F = \sin 11x \cdot \sin 5x + \sin^2 3x - \cos^2 x$

Giải: a) $A = 1 - \sin x = \sin \frac{\pi}{2} - \sin x = 2 \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + x}{2} \right) \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$

b) $1 - 2\sin x = 2 \left(\frac{1}{2} - \sin x \right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin x \right)$
 $= 4 \cos \left(\frac{\frac{\pi}{6} + x}{2} \right) \sin \left(\frac{\frac{\pi}{6} - x}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2} \right)$

$$c) C = \sin 3x + \sin 2x = 2 \sin \left(\frac{3x+2x}{2} \right) \cos \left(\frac{3x-2x}{2} \right) = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$d) D = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (1 + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} \cos x$$

$$e) E = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) - 1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6x - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 6x$$

$$= \frac{1}{2} [(1 + \cos 2x) + (\cos 6x + \cos 4x)] = \frac{1}{2} (2 \cos^2 x + 2 \cos 5x \cos x) = \cos x (\cos 5x + \cos x)$$

$$= 2 \cos x \cos 3x \cos 2x$$

$$f) F = \sin 11x \cdot \sin 5x + \sin^2 3x - \cos^2 x = \frac{1}{2} (\cos 6x - \cos 16x) + \frac{1}{2} (1 - \cos 6x) - \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2} \cos 6x - \frac{1}{2} \cos 16x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} (\cos 16x + \cos 2x)$$

$$= -\sin 9x \cdot \sin 7x$$

Bài 7: Biến đổi thành tổng các biểu thức sau:

a) $A = 2 \sin x \sin 2x \sin 3x$

b) $B = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$

c) $C = \sin(a + 30^\circ) \cdot \cos(a - 30^\circ)$

d) $D = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos 2x$

Giải: a) $A = 2 \sin x \sin 2x \sin 3x = (2 \sin 2x \sin x) \cdot \sin 3x = (\cos x - \cos 3x) \cdot \sin 3x$

$$= \sin 3x \cos x - \sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) - \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 0)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \sin 6x$$

b) $B = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = (8 \sin 3x \sin 2x) \cos x = 4(\cos x - \cos 5x) \cdot \cos x = 4 \cos^2 x - 4 \cos 5x \cdot \cos x$

$$= 2(1 + \cos 2x) - 2(\cos 4x + \cos 6x) = 2 + 2 \cos 2x - 2 \cos 4x - 2 \cos 6x$$

$$c) C = \sin(a + 30^\circ) \cdot \cos(a - 30^\circ) = \frac{1}{2} (\sin 2a + \sin 60^\circ) = \frac{1}{2} \sin 2a + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$d) D = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x) \cdot \cos 2x = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} (1 + \cos 4x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

Bài 8: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x}{\cos x}$

b) $B = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$

c) $C = \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$

d) $D = \frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2 \cos 4\alpha}$

e) $E = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)$

f) $F = \frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha}$

Giải: a) $A = \frac{\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin(3x - 5x)}{\cos x} = \frac{\sin(-2x)}{\cos x} = \frac{-\sin 2x}{\cos x}$

$$= \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos x} = -2 \sin x$$

b) $B = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x} = \frac{(\sin 7x + \sin x) + \sin 4x}{(\cos 7x + \cos x) + \cos 4x} = \frac{2 \sin 4x \cos 3x + \sin 4x}{2 \cos 4x \cos 3x + \cos 4x}$

$$= \frac{\sin 4x (2 \cos 3x + 1)}{\cos 4x (2 \cos 3x + 1)} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \tan 4x$$

c) $C = \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha (1 - \cos 2\alpha)}{2 \sin 2\alpha (1 + \cos 2\alpha)}$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$$

d) $D = \frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2 \cos 4\alpha} = \frac{2 \cos 4\alpha \sin \alpha}{2 \cos 4\alpha} = \sin \alpha$

e) $E = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$

$$= \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos \alpha$$

$$f) F = \frac{1 + \cos a - \sin a}{1 - \cos a - \sin a} = \frac{2 \cos^2 \frac{a}{2} - 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{2 \sin^2 \frac{a}{2} - 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} = \frac{2 \cos \frac{a}{2} (\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2})}{2 \sin \frac{a}{2} (\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2})} = -\cot \frac{a}{2}$$

Bài 9: Chứng minh các đồng nhất thức:

$$a) \cot a - \tan 5a + \frac{4 \sin^2 3a}{\sin 6a - \sin 4a} = \frac{1}{\sin a \cdot \cos 5a}$$

$$b) \frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \cot x$$

$$c) \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} = 1 - \sin a \cos a$$

$$d) \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^6 x - \cos^6 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$e) \sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x) = \sin 7x$$

$$f) \frac{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \tan^2 \alpha$$

Giải: a) VT = $\cot a - \tan 5a + \frac{4 \sin^2 3a}{\sin 6a - \sin 4a} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin 5a}{\cos 5a} + \frac{4 \sin^2 3a}{\sin 6a - \sin 4a}$

$$= \frac{\cos 5a \cdot \cos a - \sin 5a \cdot \sin a}{\cos 5a \cdot \sin a} + \frac{2(1 - \cos 6a)}{2 \cos 5a \cdot \sin a} = \frac{\cos 6a}{\cos 5a \cdot \sin a} + \frac{1 - \cos 6a}{\cos 5a \cdot \sin a}$$

$$= \frac{\cos 6a + 1 - \cos 6a}{\cos 5a \cdot \sin a} = \frac{1}{\sin a \cdot \cos 5a} = \text{VT (đpcm)}$$

$$b) \text{VT} = \frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \frac{2 \cos^2 x - \cos x}{2 \sin x \cos x - \sin x} = \frac{\cos x (2 \cos x - 1)}{\sin x (2 \cos x - 1)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{VP (đpcm)}$$

$$c) \text{VT} = \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} = \frac{(\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cdot \cos a + \cos^2 a)}{\sin a + \cos a} = 1 - \sin a \cdot \cos a = \text{VP (đpcm)}$$

$$d) \text{VT} = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^6 x - \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x - (\sin^6 x + \cos^6 x)$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x - [(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3]$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \cos^4 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \text{VP (đpcm)}$$

$$e) \text{VT} = \sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x)$$

$$= \sin x + 2 \cos 2x \cdot \sin x + 2 \cos 4x \cdot \sin x + 2 \cos 6x \cdot \sin x$$

$$= \sin x + (\sin 3x - \sin x) + (\sin 5x - \sin 3x) + (\sin 7x - \sin 5x) = \sin 7x = \text{VP (đpcm)}$$

$$\begin{aligned} \text{f) VT} &= \frac{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha = \text{VP (đpcm)} \end{aligned}$$

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tính các giá trị lượng giác của cung α , biết:

a) $\sin \alpha = 0,6$ khi $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

b) $\cos \alpha = -\frac{7}{10}$ khi $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c) $\tan \alpha = 2$ khi $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

d) $\cot \alpha = -3$ khi $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Bài 2: Tính các giá trị lượng giác của cung a , biết:

a) $\cos a = -\frac{1}{4}$, $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

b) $\sin a = \frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

c) $\tan a = \frac{7}{3}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$

d) $\cot a = -\frac{14}{9}$, $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$

Bài 3: a) Cho $\sin a = -\frac{12}{13}$ và $\frac{3\pi}{4} < \frac{a}{2} < \pi$. Tính $\cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$

b) Cho $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \beta = \frac{8}{17}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$

c) Cho $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

Bài 4: a) Cho $\cos a = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\sin\left(\frac{\pi}{6} + a\right)$

b) Tính $\cos(a + b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}$ với $0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}$ với $90^\circ < b < 180^\circ$

c) Cho $\cos x = \frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Tính $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Bài 5: a) Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$

b) Cho $\sin \beta = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\cos 2\beta$, $\sin 2\beta$ và $\tan 2\beta$

Bài 6: a) Cho $\sin a - \cos a = \frac{1}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$

b) Cho $\sin b + \cos b = \frac{2}{7}$ và $0 < b < \frac{\pi}{4}$. Tính $\sin 2b$, $\cos 2b$, $\tan 2b$

Bài 7: Tính giá trị của các biểu thức: a) $A = \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$ b) $B = \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12}$

c) $C = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$ d) $D = 96\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$

Bài 8: Biến đổi thành tích các biểu thức sau:

a) $A = 1 + \sin x$ b) $B = 1 + 2\cos x$ c) $C = \cos 5x - \cos 2x$

d) $D = 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$ e) $E = 1 + \sin x - \cos 2x$

f) $F = 1 - 2\cos x + \cos 2x$ g) $M = \sin x \cdot \cos 3x + \sin 4x \cdot \cos 2x$

h) $N = \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x$ i) $P = \cos a + \cos b + \sin(a + b)$

Bài 9: Biến đổi thành tổng các biểu thức sau:

a) $A = 2\cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \sin 4x$ b) $B = 8\cos 3x \cdot \sin 5x \cdot \sin 7x$

c) $C = 4\sin(x + 30^\circ) \cdot \cos(x - 30^\circ) \cdot \cos 2x$ d) $D = 4\cos(a - b) \cdot \cos(b - c) \cdot \cos(c - a)$

Bài 10: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\cos 2x \cos 4x + \sin 2x \sin 4x}{\sin 4x}$ b) $B = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$

c) $C = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}$ d) $D = \frac{\sin 8\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 5\alpha}$

e) $E = \cot \alpha \left(\frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right)$ f) $F = \frac{\sin 2a + \sin a}{1 + \cos 2a + \cos a}$

Bài 11: Chứng minh các đồng nhất thức:

a) $\frac{\cos 4a \cdot \tan 2a - \sin 4a}{\cos 4a \cdot \cot 2a + \sin 4a} = -\tan^2 2a$

b) $\frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} = 2 \cos x$

c) $\frac{\sin^3 a - \cos^3 a}{\sin a - \cos a} = 1 + \sin a \cos a$

d) $\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \sin 4x$

e) $\cos x(2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x - 1) = -\cos 7x$

f) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \cdot \tan^2 \frac{x}{2} - \cos^2 x = \sin^2 x$

g) $\cos x - \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 5x = 8 \sin^2 x \cdot \cos^3 x$

h) $3 - 4 \cos 2a + \cos 4a = 8 \sin^4 a$

i) $\frac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x} = \tan(x - 15^\circ) \cdot \cot(x - 15^\circ)$

j) $\cos 2a - \cos 3a - \cos 4a + \cos 5a = -4 \sin \frac{a}{2} \cdot \sin a \cdot \cos \frac{7a}{2}$

