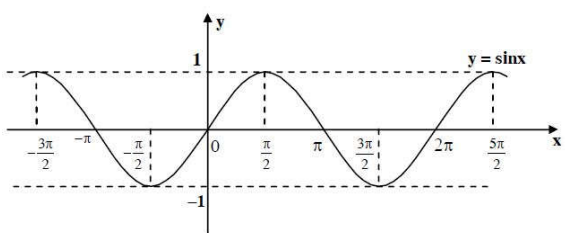
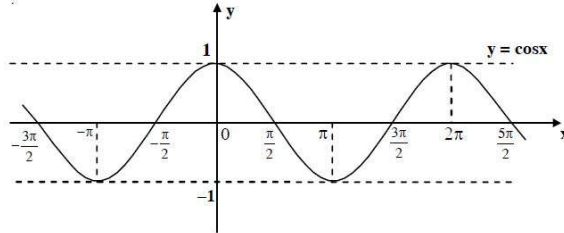
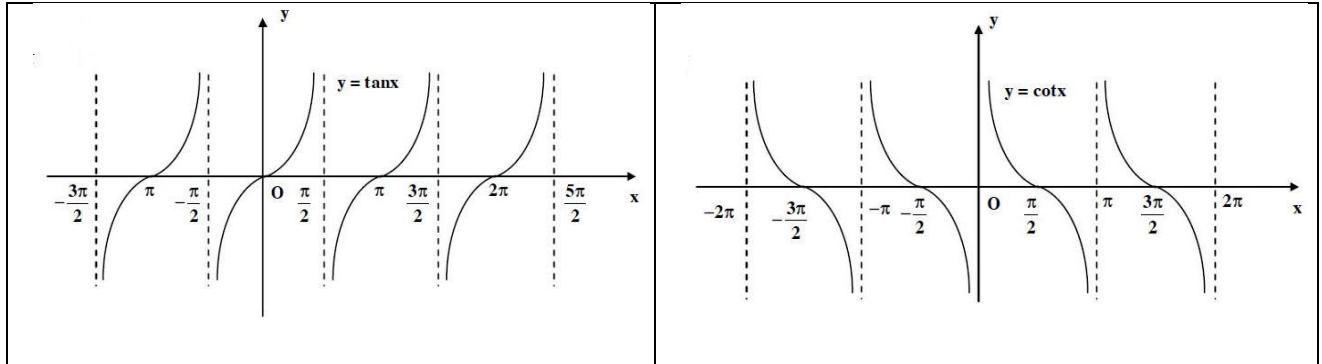


CHUYÊN ĐỀ 1: LƯỢNG GIÁC

VẤN ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. LÝ THUYẾT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	
<p>Hàm số $y = \sin x$</p> <p>TXĐ: $D = \mathbb{R}$ và $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$</p> <p>Hàm số lẻ và là hàm số tuần hoàn chu kì là 2π</p> 	<p>Hàm số $y = \cos x$</p> <p>TXĐ: $D = \mathbb{R}$ và $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$</p> <p>Hàm số chẵn và là hàm số tuần hoàn chu kì là 2π</p> 
<p>Hàm số $y = \tan x$</p> <p>TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$</p> <p>Hàm số lẻ và là hàm số tuần hoàn chu kì là π</p>	<p>Hàm số $y = \cot x$</p> <p>TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$</p> <p>Hàm số lẻ và là hàm số tuần hoàn chu kì là π</p>



II. BÀI TẬP MẪU

Dạng 1: Tập xác định của hàm số lượng giác

Ví dụ 1.

Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3 \cos x}{\sin x}$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x \neq k2\pi$. C. $x \neq \frac{k\pi}{2}$. D. $x \neq k\pi$.

Lời giải
Chọn D

Đkxđ của hàm số đã cho là: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot^2\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)$

Lời giải

Điều kiện: $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} - 3x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{9} - k\frac{\pi}{3}$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ví dụ 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin 4x - \cos 3x &= \sin 4x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 5x \neq 0 \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}; \frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \right\}.$$

Ví dụ 5. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3 - 2 \cos x}$

Lời giải

hàm số xác định khi $3 - 2 \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{3}{2}$ (đúng $\forall x \in \mathbb{R}$), vì $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sin \frac{\pi^2}{2x-1}$

Lời giải

hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{2x-1}$ xác định $\Leftrightarrow 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$. Tập xác định của hàm số

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Ví dụ 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = 3 \cot(2x+3)$

Lời giải

$$y = 3 \cot(2x+3) = \frac{3 \cos(2x+3)}{\sin(2x+3)} \text{ hàm số xác định } \Leftrightarrow \sin(2x+3) \neq 0 \Leftrightarrow 2x+3 \neq k\pi$$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Tập xác định của hàm số } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ví dụ 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

Lời giải

$$y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{-\cos 2x} = -\frac{\sin x}{\cos 2x} \text{ hàm số xác định } \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Tập xác định của hàm số } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dạng 2: Sự đồng biến, nghịch biến của HSLG

Ví dụ 1. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $y = \sin x$.

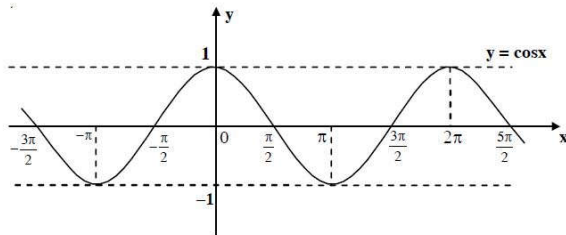
B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D.

$y = -\cot x$.

Lời giải



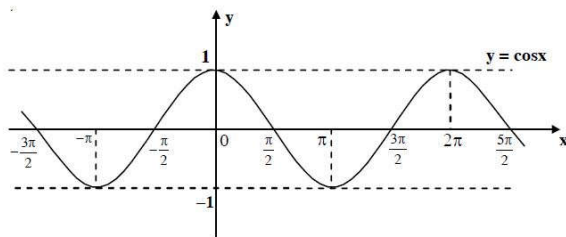
Chọn B

Do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 2. Xét tính tăng giảm của hàm số lượng giác $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

Lời giải

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \Rightarrow \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Đặt $u = \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, đồ thị hàm số $y = \cos u$ như sau :



Khi x biến thiên trong $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$ thì $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ biến thiên trong $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, nên hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Khi x biến thiên trong $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$ thì $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ biến thiên trong $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, nên hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$.

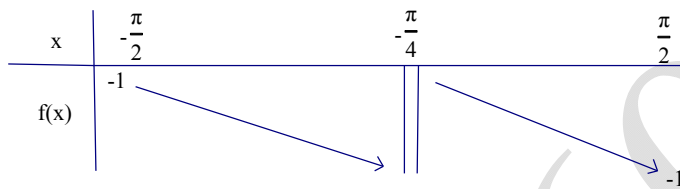
Ví dụ 3. Xét tính tăng giảm của hàm số lượng giác $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải

vì hàm $y = \frac{\pi}{4} - x$ nghịch biến trên \mathbb{R} và hàm số $y = \tan u$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Do đó hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lại có khi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ và trong khoảng này hàm số không xác định $\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$. Suy ra bảng biến thiên của hàm số như sau :



Ví dụ 4. Hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$:

A. $y = \cos x$.

B. $y = \cot 2x$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \cos 2x$

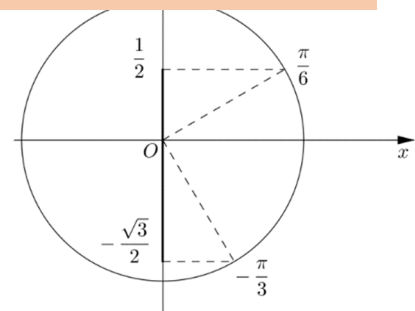
Lời giải

Chọn C

Quan sát trên đường tròn lượng giác,

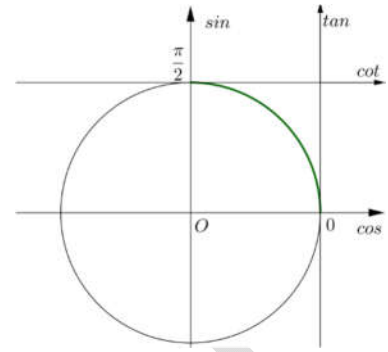
ta thấy trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$ hàm $y = \sin x$ tăng dần

(tăng từ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ đến $\frac{1}{2}$).



Ví dụ 5. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $y = \sin x$ tăng trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- B. Hàm số $y = \cot x$ giảm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- C. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- D. Hàm số $y = \cos x$ tăng trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



Lời giải

Chọn D

Quan sát trên đường tròn lượng giác,

trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta thấy: $y = \cos x$ **giảm** dần.

Ví dụ 6. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
- B. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
- C. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.
- D. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, cho $k = 0 \Rightarrow (-\pi; 0)$ suy ra đồng biến trên $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 7. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên:

A. Khoảng $(0; \pi)$.

B. Các khoảng $\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$

, $k \in \mathbb{Z}$.

C. Các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

D. Khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Mà $\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với mỗi $k \in \mathbb{Z}$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dạng 3: Tính chẵn - lẻ của HSLG

Ví dụ 1: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a. $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$ b. $y = f(x) = \tan x + \cot x$

Lời giải

a. Tập xác định $D = \mathbb{R}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$.

Có $f(-x) = \cos(-2x) = \cos 2x = f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

$$\text{b. Hàm số có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq l\pi \end{cases} \text{ (với } k, l \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, l\pi \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$

$$\text{Ta có } f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x).$$

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$

Lời giải

$$\text{Hàm số có nghĩa khi } \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

$$\text{Ta có } f(-x) = \tan^7(-2x) \cdot \sin(-5x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x = f(x).$$

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

Dạng 4: Tính tuần hoàn, tìm chu kỳ của HSLG

Ví dụ 1: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ (nếu có) của hàm số sau: $y = \cos^2 x - 1$.

Lời giải

Ta biến đổi: $y = \cos^2 x - 1 = \frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}$.

Do đó f là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ví dụ 2: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ (nếu có) của hàm số sau:
 $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$.

Lời giải

Ta biến đổi: $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$.

Do đó f là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{5\pi}{2}$.

Ví dụ 3: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ (nếu có) của hàm số sau:
 $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

Lời giải

Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn \Rightarrow có số thực dương T thỏa :

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \cos(x+T) + \cos\sqrt{3}(x+T) = \cos x + \cos\sqrt{3}x$$

$$x=0 \Rightarrow \cos T + \cos\sqrt{3}T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos T = 1 \\ \cos\sqrt{3}T = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 2n\pi \\ \sqrt{3}T = 2m\pi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m}{n} \text{ vô lí, do}$$

$m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m}{n}$ là số hữu tỉ. Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng hàm số sau là hàm số tuần hoàn và tìm chu kỳ của nó:
 $y = \frac{1}{\sin x}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ta xét đẳng thức $f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\sin(x+T)} = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \sin(x+T) = \sin x$.

Chọn $x = \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x = 1$ và do đó $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Số dương nhỏ nhất trong các số T là 2π .

Rõ ràng $\forall x \in D, x+k2\pi \in D, x+k2\pi \in D$ và $f(x+k2\pi) = \frac{1}{\sin(x+k2\pi)} = \frac{1}{\sin x} = f(x)$

Vậy f là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Ví dụ 5: Cho a, b, c, d là các số thực khác 0. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = a \sin cx + b \cos dx$ là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\frac{c}{d}$ là số hữu tỉ.

Lời giải

* Giả sử $f(x)$ là hàm số tuần hoàn $\Rightarrow \exists T > 0: f(x+T) = f(x) \quad \forall x$

Cho $x = 0, x = -T \Rightarrow \begin{cases} a \sin cT + b \cos dT = b \\ -a \sin cT + b \cos dT = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos dT = 1 \\ \sin cT = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} dT = 2n\pi \\ cT = m\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{m}{2n} \in \mathbb{Q}$.

* Giả sử $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}: \frac{c}{d} = \frac{k}{l}$. Đặt $T = \frac{2\pi k}{c} = \frac{2l\pi}{d}$

Ta có: $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi k}{c} = \frac{2l\pi}{d}$.