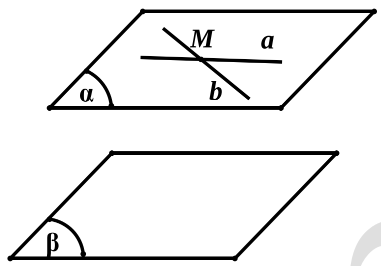
HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

PHẦN I- LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa:** $\alpha // \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$
2. **Định lý, hệ quả nói về cách chứng minh 2 mặtphẳng song song:**

i) **Địnhlý:** $\begin{cases} \alpha \supset a, \; b \\ a \cap b = M \\ a // \beta \, , b // \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta$



ii) **Hệquả:** $\begin{cases} \alpha // \gamma \\ \beta // \gamma \\ \alpha \neq \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta$

3. **Hệ quả nói về cách chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng:**

i. $\begin{cases} \alpha // \beta \\ a \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow a // \beta$

ii. $\begin{cases} AB // \alpha \\ AC // \alpha \\ AB \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BC // \alpha$

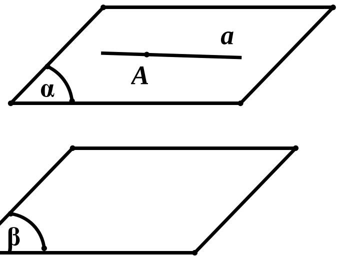
4. **Định lý nói về cách chứng minh 2 đường thẳng song song:** $\begin{cases} \alpha // \beta \\ \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \end{cases} \Rightarrow a//b$.

5. **Các định lý, hệ quả khác:**

i. $\begin{cases} \alpha // \beta \\ d \cap \alpha = A, \; d \cap \beta = B \\ d' \cap \alpha = A', \; d' \cap \beta = B' \\ d//d' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$

ii. $A \notin \alpha \Rightarrow \exists! \, \beta : \begin{cases} A \in \beta \\ \beta // \alpha \end{cases}$

iii. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng qua A và song song với (α).

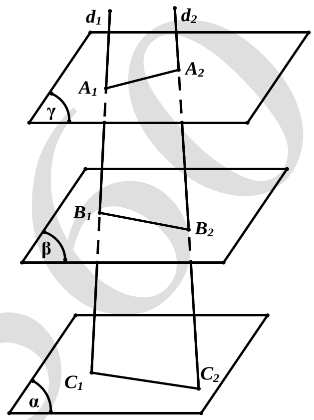


Vậy: $\begin{cases} A \notin \beta \\ A \in a,\ a // \beta \\ A \in \alpha\ ,\quad \alpha // \beta \end{cases} \Rightarrow a \subset \alpha$

6. Địnhlí Ta-lét (Thales)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\begin{cases} (\alpha)//(\beta)//(\chi) \\ d_1 \cap (\alpha) = A_1, d_1 \cap (\beta) = B_1, d_1 \cap (\chi) = C_1 \\ d_2 \cap (\alpha) = A_2, d_2 \cap (\beta) = B_2, d_2 \cap (\chi) = C_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$



7. Định lí Ta-lét (Thales) đảo

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm A_1, B_1, C_1 trên d_1, các điểm A_2, B_2, C_2 trên d_2 saocho $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$. Lúc đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng.

8. Hình lăng trụ và hình hộp

a. Định nghĩa hình lăng trụ:

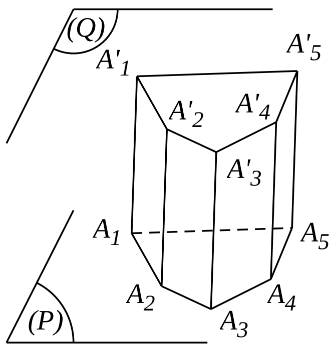
Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai cạnh đáy đều song song với nhau.

Trong đó:

- Các mặt khác với hai đáy gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.
- Cạnh chung của hai mặt bên gọi là cạnh bên của hình lăng trụ.
- Tùy theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác …

Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.

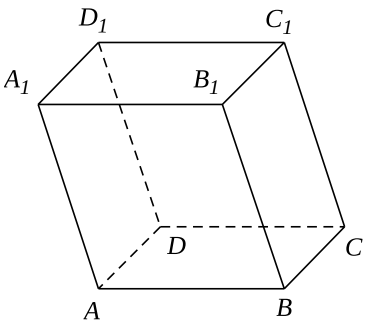


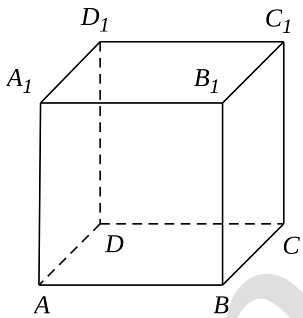
b. Các mặt bên và các mặt chéo là những hình bình hành.
c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

b. Định nghĩa hình hộp: Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.

a. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.

b. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.

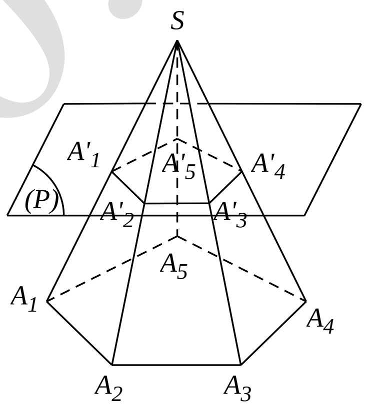




Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

9. Hình chóp cụt

Định nghĩa: Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng P song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ theo thứ tự tại $A_1', A_2', ..., A_n'$. Hình tạo bởi thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', ..., A_nA_1A_1'A'_n$ gọi là một hình chóp cụt.



Trong đó:

- Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.
- Các mặt còn lại gọi là các mặt bên của hình chóp cụt.
- Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như $A_1A_1', A_2A_2', ..., A_nA_n'$ gọi là cạnh bên của hình chóp cụt.

Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,… ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chụp cụt ngũ giác,…

Tính chất: Với hình chóp cụt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

10. ĐịnhlíTa-lét(Thales) đảo

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm A_1, B_1, C_1 trên d_1, các điểm A_2, B_2, C_2 trên d_2 saocho $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$. Lúc đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng.

PHẦN II- CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Dạng 1: Chứng minh 2 mặt phẳng song song

Phương pháp giải tự luận: Dựa vào định lý, hệ quả sau:

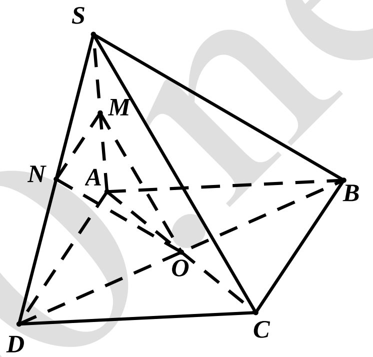
i. $\begin{cases} \alpha \supset a,\ b \\ a \cap b = I \\ a //\ \beta\ ,\ b //\ \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha\ //\ \beta$ **ii.** $\begin{cases} \alpha\ //\ \gamma \\ \beta\ //\ \gamma \\ \alpha \neq \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha\ //\ \beta$

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SD. Chứng minh $(OMN)//(SBC)$.

Lời giải:

Ta có M,O lần lượt là trung điểm của SA,AC nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh SC do đó $OM \parallel SC$.

Vậy $\begin{cases} OM \parallel SC \\ SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OM \parallel (SBC)\ (1)$.



Tương tự, Ta có N,O lần lượt là trung điểm của SD,BD nên ON là đường trung bình của tam giác SBD ứng với cạnh SB do đó $OM//SB$.

Vậy $\begin{cases} ON \parallel SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OM \parallel (SBC)\ (2)$. Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} OM \parallel (SBC) \\ ON \parallel (SBC) \\ OM \cap ON = O \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC)$.

Ví dụ 2. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M,N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF) \parallel (BCE)$.

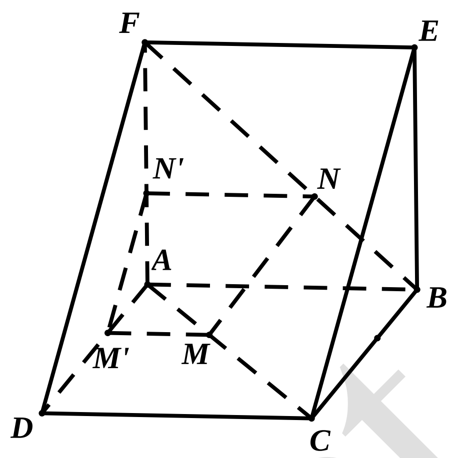
b) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

Lời giải:

a) Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (BCE)$

Tương tự $\begin{cases} AF \parallel BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \parallel (BCE)$.

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE)$.



b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hìnhvuông nên $AC = BF$ (1).

Ta có $MM' \parallel CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ (2)

$NN' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}$ (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF$

$\Rightarrow DF \parallel (MM'N'N)$.

Lại có $NN' \parallel AB \Rightarrow NN' \parallel EF \Rightarrow EF \parallel (MM'N'N)$.

Vậy $\begin{cases} DF \parallel (MM'N'N) \\ EF \parallel (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) \parallel (MM'N'N)$.

2. Dạng 2: Chứng minh đường thẳng song song với mặtphẳng

Phương pháp giải tự luận, dựa vào các hệ quả sau:

1. $\begin{cases} \alpha \; // \; \beta \\ a \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow a \; // \; \beta$ **2.** $\begin{cases} AB \; // \; \alpha \\ AC \; // \; \alpha \\ AB \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BC \; // \; \alpha$

và các định lý, hệ quả của bài trước.

Ví dụ 1: Cho hình thang $ABCD$ có $AB//CD$ và $S \notin (ABCD)$. Trên SA, BD lấy hai điểm M, N sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{DN}{DB} = \dfrac{2}{3}$. Kẻ $NI//AB$ $(I \in AD)$. Chứng minh $MN//(SCD)$.

Lời giải:

Ta có $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{1}{3}$. Do $NI//AB$ nên $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{BN}{BD} = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $\frac{AM}{AS}=\frac{AI}{AD}\Rightarrow MI//SD\Rightarrow MI//(SCD)$

Do $NI//SD$ ta suy ra $NI//CD$.

Vậy $(MNI)//(SCD)\Rightarrow MN//(SCD)$.

3. Dạng 3: Chứng minh 2 đường thẳng song song

Phươngphápgiảitự luận.

Dựa vào định lý ở bài hai mặt phẳng song song

$$\begin{cases}\alpha\ //\ \beta\\ \gamma\ //\ \alpha\ =a\Rightarrow a//b\\ \gamma\ //\ \beta\ =b\end{cases}$$

và các định lý, hệ quả ở các bài trước.

4. Dạng 4: Bài toánliên quan đến tỷ lệ độ dài

Phương pháp giải tự luận.

Dựa vào định lý Talet (thuận), hệ quả ở bài hai mặt phẳng song song:

1. $$\begin{cases}\alpha\ //\ \beta\\ d\cap\ \alpha\ =A,\ d\cap\ \beta\ =B\\ d'\cap\ \alpha\ =A',\ d'\cap\ \beta\ =B'\\ d//d'\end{cases}\Rightarrow AB=A'B'$$

2. $$\begin{cases}\alpha\ //\ \beta\ //\ \gamma\\ d\cap\ \alpha\ =A,\ d\cap\ \beta\ =B,\ d\cap\ \gamma\ =C\\ d'\cap\ \alpha\ =A',\ d'\cap\ \beta\ =B',\ d'\cap\ \gamma\ =C'\end{cases}\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

và địnhlý Talet thuận và đảo trong mặt phẳng.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ và M,N là các điểm thay trên các cạnh AB,CD sao cho $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$.

a) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

B) Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

A. $\frac{k}{k+1}$ **B.** $\frac{2k}{k+1}$ **C.** $\frac{1}{k}$ **D.** $\frac{1}{k+1}$

Lời giải:

a) Do $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales thì các đường thẳng MN,AC,BD cùng song song với một mặt phẳng (β).Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với BD thì (α) cố định và $(\alpha)\parallel(\beta)$ suy ra MN luôn song song với (α) cố định.

b) Xét trường hợp $\frac{AP}{PC}=k$, lúc này $MP\parallel BC$ nên $BC\parallel(MNP)$.

Ta có :

$$\begin{cases} N \in (MNP) \cap (BCD) \\ BC \parallel (MNP) \\ BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (BCD) \cap (MNP) = NQ \parallel BC, Q \in BD.$$

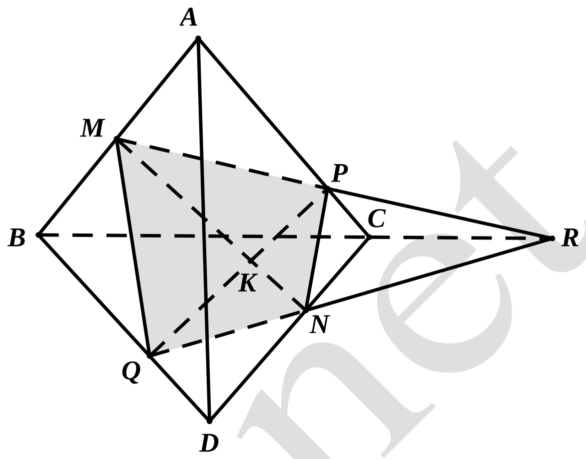
Thiết diện là tứ giác $MPNQ$ .Xét trường hợp $\dfrac{AP}{PC} \neq k$

Trong (ABC) gọi $R = BC \cap MP$

Trong (BCD) gọi $Q = NR \cap BD$ thì thiết diện là tứ giác $MPNQ$.

Gọi $K = MN \cap PQ$

Ta có $\dfrac{S_{MNP}}{S_{MPNQ}} = \dfrac{PK}{PQ}$.



Do $\dfrac{AM}{NB} = \dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo thì AC, NM, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và đường thẳng PQ cắt ba mặt phẳng này tương ứng tại P, K, Q nên áp dụng định lí Thales ta được

$$\frac{PK}{KQ} = \frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k \Rightarrow \frac{PK}{PQ} = \frac{PK}{PK+KQ} = \frac{\frac{PK}{KQ}}{\frac{PK}{KQ}+1} = \frac{k}{k+1}.$$

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$.

a) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

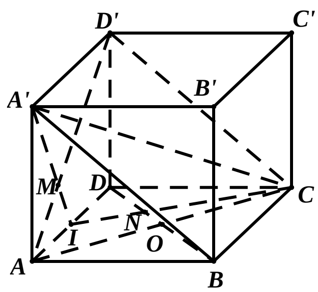
b) Chứng minh khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

<u>Lời giải:</u>

a) Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với $(A'D'CB)$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với $(A'D'CB)$. Giả sử (Q) cắt BD tại điểm N'.

Theo định lí Thales ta có

$$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB} \quad (1)$$



Vì các mặt của hình hộp là hình vuuong cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$.

Từ (1) ta có $AM = DN'$, mà $DN = AM \Rightarrow DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$.

Mà $\begin{cases}(Q)\parallel(A'D'CB)\\ MN\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow MN\parallel(A'D'CB)$.

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

b) Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có

$DN=x=\frac{a\sqrt{2}}{3}, DO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow DN=\frac{2}{3}DO$ suy ra N là trọng tâm của tam giác ACD.

Tương tự M là trọng tâm của tam giác $A'AD$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có $\frac{IN}{IC}=\frac{1}{3},\frac{IM}{IA'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{IN}{IC}=\frac{IM}{IA'}\Rightarrow MN\parallel A'C$.

5. **Dạng 5: Xácđịnhgiaotuyến**

Phương pháp giải tự luận.

Dựa vào định lý:

$$\begin{cases}\alpha\ //\ \beta\\ \gamma\ //\ \alpha\ =a\Rightarrow a//b\\ \gamma\ //\ \beta\ =b\end{cases}$$

Và các kết quả có trước.

6. **Dạng 6: Xác định thiết diện**

Phương pháp giải tự luận.

Dựa vào định lý:

$$\begin{cases}\alpha\ //\ \beta\\ \gamma\ //\ \alpha\ =a\Rightarrow a//b\\ \gamma\ //\ \beta\ =b\end{cases}$$

Và các kết quả có trước.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD) .Thiết diện là hình gì?

A.Tam giác **B.**Hình thang **C.**Hình bình hành **D.**Tứ giác

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$

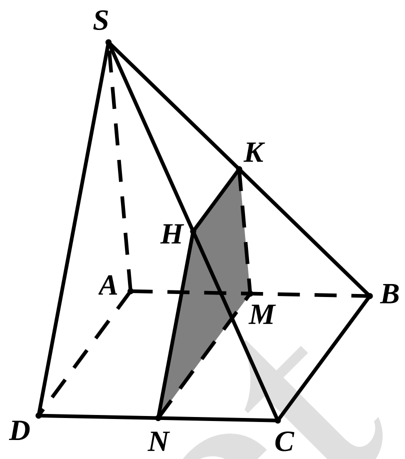
$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MK \parallel SA, K \in SB$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (SCD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel (SAD) \\ (SCD) \cap (SAD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = NH \parallel SD, H \in SC$.

Dễ thấy $HK = (\alpha) \cap (SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$

Ba mặt phẳng $(ABCD), (SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel HK$. Vậy thiết diện là một hình thang .



BÀI KIỂM TRA

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA.

a) Chứng minh $(SBN) \parallel (DPM)$.

b) Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S, P). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua Q và song song với (SBN).

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (β) đi qua MN song song với (SAD).

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Chứng minh $IJ \parallel (SAB)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O, các tam giác SAD và ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh $EF \parallel (SAD)$.

Câu 4. Hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

a) Chứng minh $(BCE) \parallel (ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

c) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp điểm I khi M, N thay đổi trên AC và BF.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB=3a, AD=CD=a$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và $SA=2a$, mặt phẳng (α) song song với (SAB) cắt các cạnh AD,BC,SC,SD theo thứ tự tại M,N,P,Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $x=AM$ $(0<x<a)$. Tính x để $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

c) Gọi $I=MQ\cap NP$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên AD.

d) Gọi $J=MP\cap NQ$. Chứng minh IJ có phương không đổi và điểm J luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng (α) di động luôn song song với (ABC), cắt SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'. Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng $(A'BC),(B'AC),(C'AB)$.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $(BDA')\parallel(B'D'C)$.

b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1,G_2 của các tam giác $BDA',B'D'C$ đồng thời chia đường chéo AC' thành ba phần bằng nhau.

c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a.Trên các cạnh $AB,CC',C'D'$ và AA' lấy các điểm M,N,P,Q sao cho $AM=C'N=C'P=AQ=x(0\le x\le a)$.

a) Chứng minh bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng và MP,NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.

c) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và ΔSAD vuông tại A. Qua điểm M trên cạnh AB dựng mặt phẳng (α) song song với (SAD) cắt CD,SC,SB tại N,P,Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Gọi $I=NP\cap MQ$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên cạnh AB.

Câu 10. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B',BB',BC$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cụt với (MNP).

b) Gọi I là trung điểm của AB. Tìm giao điểm của IC' với (MNP).

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M,N nằm trên AD',BD sao cho $AM=DN=x\left(0<x<a\sqrt{2}\right)$

a) Chứng minh khi x biến thiên thì MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Khi $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$, chứng minh $MN\parallel A'C$.

Câu 12. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

a) Gọi I,K,G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC,A'B'C'$ và ACC'. Chứng minh $(IGK)\parallel(BB'C'C)$ và $(A'KG)\parallel(AIB)$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt AB' và PQ.

Câu 13. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt (α) tại A, B. Đường thẳng Δ thay đổi luôn song song với (α) cắt d_1, d_2 lần lượt tại M và N. Đường thẳng qua N song song với d_1 cắt (α) tại N'.

a) Tứ giác $AMNN'$ là hình gì? Tìm tập hợp điểm N'.
b) Xác định vị rí của Δ để độ dài MN nhỏ nhất.
c) Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng nằm trong mặt phẳng cố định khi M di động.

Câu 14. Cho tứ diện đều cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (α) qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh MN, PQ, BC đồng quy hoặc song song và $MNPQ$ là hình thang cân.
b) Đặt $AM = x, AN = y$. Chứng minh $a(x+y) = 3xy$. Tìm GTNN và GTLN của $AM + AN$.
c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và $s = x + y$.

Câu 15. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang, $AD = CD = BC = a$, $AB = 2a$. Mặt phẳng (α) đi qua A cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P.

a) Tứ giác $AMNP$ là hình gì?
b) So sánh AM và NP.

<u>Lời giải:</u>

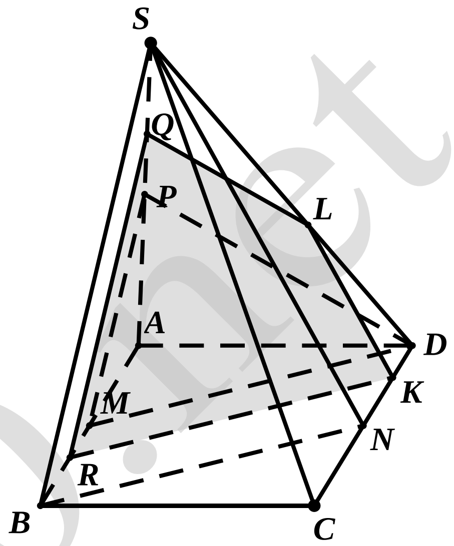
Câu 1. a) Ta có

$\begin{cases} BN \parallel DM \\ DM \subset (DPM) \end{cases} \Rightarrow BN \parallel (DPM)\ (1)$ Tương tự

$\begin{cases} BS \parallel MP \\ MP \subset (DPM) \end{cases} \Rightarrow BS \parallel (DPM)\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $(SBN) \parallel (DPM)$.

b) Ta có $\begin{cases} SB \subset (SBN) \\ (\alpha) \parallel (SBN) \end{cases} \Rightarrow SB \parallel (\alpha)$.



vậy

$\begin{cases} Q \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SB \subset (SAB) \\ SB \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = QR \parallel SB, R \in AB$

.

Tương tự

$(\alpha) \cap (ABCD) = RK \parallel BN, K \in CD$

$(\alpha) \cap (SCD) = KL \parallel SB, L \in SD$.

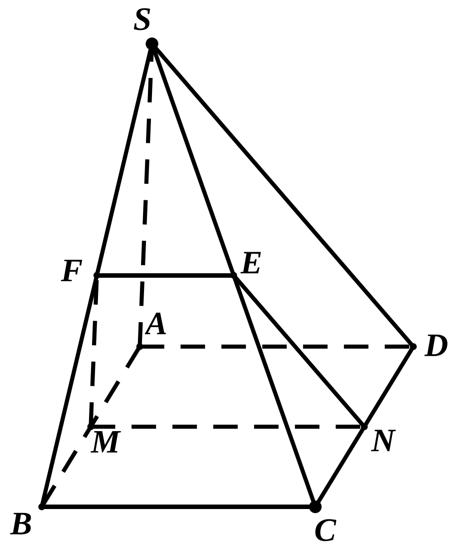
Vậy thiết diện là tứ giác $QRKL$.

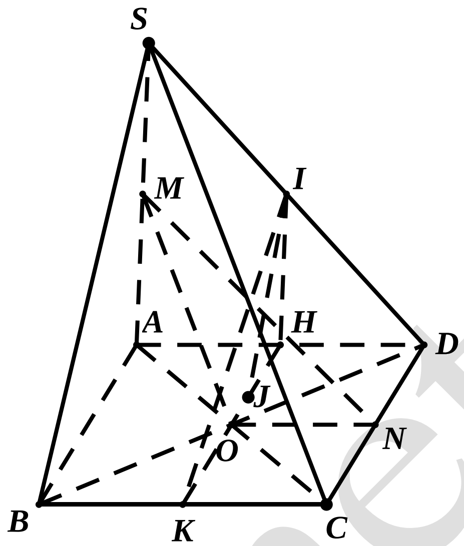
c) Ta có $\begin{cases} M \in (\beta) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\beta) \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow (\beta) \cap (SAB) = MF \parallel SA, F \in SB$

Tương tự $(\beta) \cap (SCD) = NE // SD, E \in SC$.

Thiết diện là hình thang $MNEF$.





Câu 2. a) Do O, M lần lượt là trung điểm của AC, SA nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh $SC \Rightarrow OM \parallel SC$.

Mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow OM \parallel (SBC)$ (1).

Tương tự

$ON \parallel BC \subset (SBC) \Rightarrow ON \parallel (SBC)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.

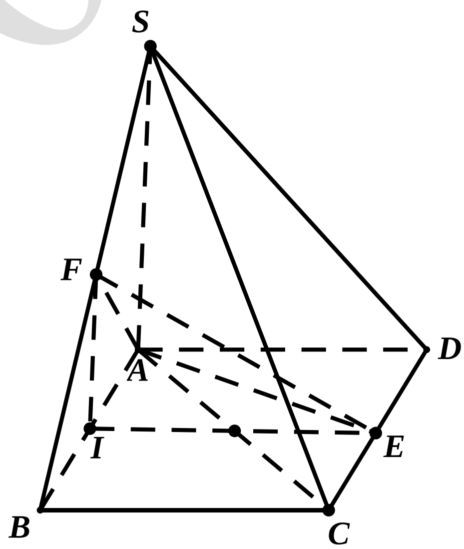
b) Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Do $J \subset (ABCD)$ và

$d(J, AB) = d(J, CD)$ nên

$J \in HK \Rightarrow IJ \subset (IHK)$.

Ta dễ dàng chứng minh được $(IHK) \parallel (SAB)$.

Vậy $\begin{cases} IJ \subset (IHK) \\ (IHK) \parallel (SAB) \end{cases} \Rightarrow IJ \parallel (SAB)$.



Câu 3. Kẻ $FI \parallel SA, I \in AB \Rightarrow IF \parallel (SAD)$.

Ta có $\dfrac{FS}{FB} = \dfrac{IA}{IB}$ (1).

Theo tính chất đường phân giác ta có

$\dfrac{FS}{FB} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$ (2)

(Do các tam giác ASD, ABC cân tại A nên $SA = AD, AB = AC$)

Mặt khác $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{AD}{AC}$ (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{ED}{EC} \Rightarrow IE \parallel AD$.

Mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow IE \parallel (SAD)$.

Ta có $\begin{cases} IE \parallel (SAD) \\ IF \parallel (SAD) \end{cases} \Rightarrow (IEF) \parallel (SAD)$.

Mà $EF \subset (IEF) \Rightarrow EF \parallel (SAD)$.

Câu 4.

a) Ta có $\begin{cases} BE \parallel AF \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow EB \parallel (ADF)$.

Tương tự $BC \parallel (ADF)$.

Từ đó ta có $(BCE)//(ADF)$.

b) Vì $MM' \parallel AB \Rightarrow MM' \parallel CD$ nên theo định lí Thales ta có

$\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AM'}{AD}$ (1).

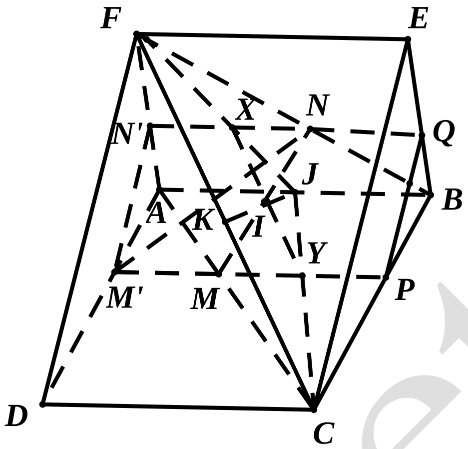
Tương tự $NN' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{BN}{BF} = \dfrac{AN'}{AF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF}$

$\Rightarrow M'N' \parallel DF \subset (DEF) \Rightarrow M'N' \parallel (DEF)$.

Lại có $MM'//CD \parallel EF \Rightarrow MM' \parallel (DEF)$

$\Rightarrow (DEF) \parallel (MNN'M')$.



c) Gọi $P = MM' \cap BC, Q = NN' \cap BE$ và J, K lần lượt là trung điểm các đoạn AB và CF. Gọi $X = N'Q \cap FJ$, $Y = M'P \cap CJ$ thì $XY = (MPQN') \cap (FCJ)$. Trong $(M'PQN')$ gọi $I = XY \cap MN$.

Ta có $\dfrac{YM}{AJ} = \dfrac{CM}{CA}$ (3) và $\dfrac{XN}{BJ} = \dfrac{FN}{FB}$ (4) mà $AJ = BJ, AC = BF$ nên từ $(3),(4)$ suy ra $YM = XN \Rightarrow XMYN$ là hình bình hành nên I là trung điểm của MN.

Do $\begin{cases} (M'PQN') \parallel (CEFE) \\ (CFJ) \cap (M'PQN') = XY \\ (CFJ) \cap (CEFE) = CF \end{cases} \Rightarrow XY \parallel CF$ mà $IX = IY$ nên I thuộc đường trung trung tuyến JK của tam giác JCF.

Giới hạn:

Khi $N \to B \Rightarrow M \to A \Rightarrow I \to J$

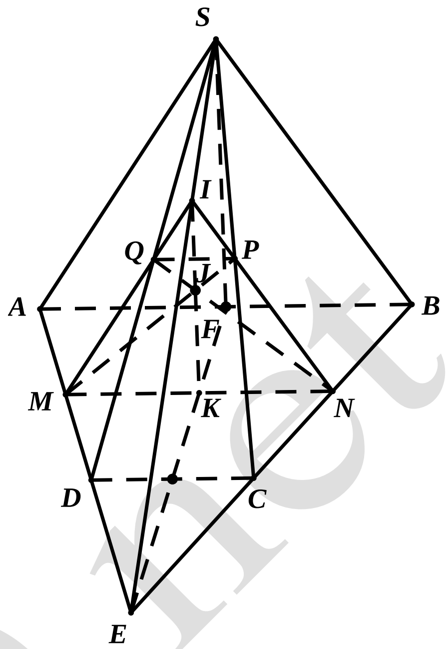
Khi $N \to F \Rightarrow M \to C \Rightarrow I \to K$

Phần đảo: (bạn đọc tự giải)

Vậy tập hợp điểm I là đường trung tuyến JK của tam giác JCF.

Câu 5.

a) Do $\begin{cases}(\alpha)\parallel(SAB)\\(ABCD)\cap(SAB)=AB\\(ABCD)\cap(\alpha)=MN\end{cases}\Rightarrow MN\parallel AB\ (1).$



Tương tự $\begin{cases}(\alpha)\parallel(SAB)\\(SCD)\cap(ABCD)=CD\\(SCD)\cap(\alpha)=PQ\end{cases}$

$\Rightarrow PQ\parallel CD\ (2).$

Lại có $AB\parallel CD\ (3)$

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có

$MN\parallel AB\parallel CD\parallel PQ$ nên $MNPQ$ là hình thang (*)

Dễ thấy rằng $MQ\parallel SA, NP\parallel SB$ do đó

$\frac{MQ}{SA}=\frac{DM}{DA};\frac{NP}{SB}=\frac{CN}{CB}$ mà $\frac{DM}{DA}=\frac{CN}{CB}$ nên $\frac{MQ}{SA}=\frac{NP}{SB}$.

Mặt khác ΔSAB cân tại $S\Rightarrow SA=SB$

$\Rightarrow MQ=NP\ (**)$. Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $MNPQ$ là hình thang cân.

b) $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp $\Leftrightarrow MQ+NP=MN+PQ$

Ta có $\frac{MQ}{SA}=\frac{DM}{DA}=\frac{a-x}{a}\Rightarrow MQ=2(a-x)\Rightarrow NP=2(a-x)$

Lại có $\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}=\frac{x}{a}\Rightarrow PQ=x$

Không khó khăn ta tính được $MN=3a-2x$

Do đó $MQ+NP=MN+PQ\Leftrightarrow 4(a-x)=3a-2x+x\Leftrightarrow x=\frac{a}{3}$.

Khi đó tính được $r=\frac{a\sqrt{7}}{6}$.

c) Gọi $E=AD\cap BC\Rightarrow SE=(SAD)\cap(SBC)$.

$I=MP\cap NQ\Rightarrow\begin{cases}I\in MP\subset(SAD)\\I\in NQ\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow I\in SE.$

Giới hạn:

Gọi I_0 là giao điểm của SE với mặt phẳng (β) đi qua CD và song song với (SAB).

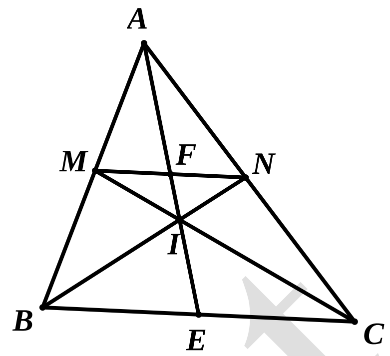
Khi $M\to D\Rightarrow N\to B\Rightarrow I\to I_0$

Khi $M\to A\Rightarrow N\to B\Rightarrow I\to S$

Phần đảo: (bạn đọc tự giải)

d) Gọi $K=IJ\cap MN$, vì $MNPQ$ là hình thang cân nên K là trung điểm của MN. Gọi $F=EK\cap AB$ thì F là trung điểm của AB nên F cố định dễ thấy $IJ \parallel SF$ suy ra IJ có phương không đổi và điểm J thuộc mặt phẳng cố định (SEF).

Câu 6. Bổ đề:



Cho tam giác ABC các điểm M,N thuộc các cạnh AB,AC sao cho $MN \parallel BC$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của BC,MN và $I = MB \cap CN$ thì A,F,I,E thẳng hàng.

Chứng minh:

Ta có $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \dfrac{AB}{AM}\overrightarrow{AM} + \dfrac{AC}{AN}\overrightarrow{AN}$

$= k\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = 2k\overrightarrow{AF}$.

Với $k = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$.

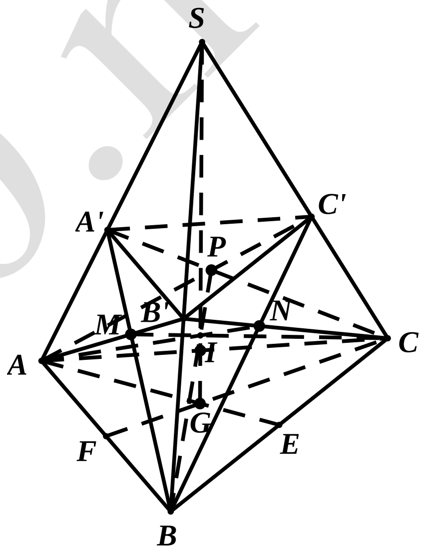
Hay A,E,F thẳng hàng.

Mặt khác $2\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = -\dfrac{IB}{IN}\overrightarrow{IN} - \dfrac{IC}{IM}\overrightarrow{IM}$

$= l\left(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM}\right) = 2l\overrightarrow{IF}$ vời $l = -\dfrac{IB}{IN} = -\dfrac{IC}{IM} \Rightarrow I,E,F$ thẳng hàng.

Vậy A,F,I,E thẳng hàng.

Quay lại bài toán:



Gọi $M = AB' \cap BA', P = AC' \cap CA', N = BC' \cap CB'$ và $I = CM \cap AN$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in AN \subset (ABC') \\ I \in CM \subset (BCA') \end{cases} \Rightarrow I \in BP = (ABC') \cap (BCA')$.

Vậy I chính là điểm đồng quy của ba mặt phẳng $(A'BC),(B'AC),(C'AB)$.

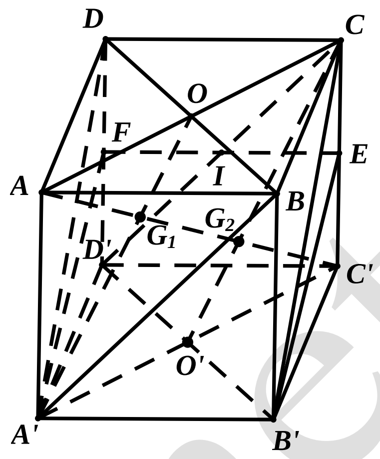
Gọi E,F lần lượt là trung điểm của BC,BA.

Theo bổ đề trên ta có S,N,E thẳng hàng và $I \in AN$ nên $I \in (SAE)$.

Tương tự $I \in (SCF)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC thì $SG = (SAE) \cap (SCF)$ nên $I \in SG$.

Từ đó dễ dàng lập luận được quỹ tích điểm I là đoạn thẳng SG trừ S và G.

Câu 7.
a) Gọi O,O' lần lượt là trọng tâm các mặt $ABCD$ và $A'B'C'D'$.
Dễ thấy $DBB'D'$ là hình bình hành nên $B'D' \parallel BD \subset (BDA')$
$\Rightarrow B'D' \parallel (BDA')$ (1).
Tương tự $OCO'A'$ là hình bình hành nên $O'C//OA' \subset (A'BD)$
$\Rightarrow CO' \parallel (A'BD)$ (2).
Từ $(1),(2)$ suy ra $(A'BD) \parallel (CB'D')$.

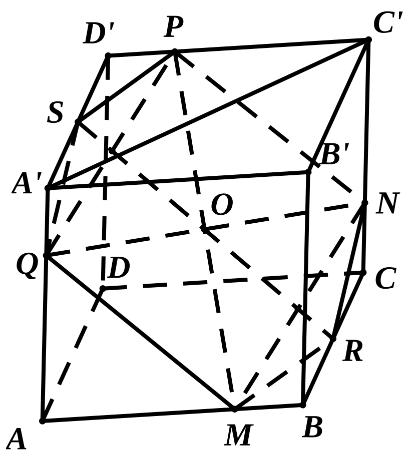


b) Ta có $A'O$ là trung tuyến của tam giác $A'BD$ và $\frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2}$ nên G_1 là trọng tâm của tam giác $A'BD$.
Tương tự G_2 cũng là trọng tâm của tam giác $CB'D'$.Dễ thấy OG_1 và $O'G_2$ là đường trung bình của các tam giác ACG_2 và $A'C'G_1$ nên
$AG_1 = G_1G_2 = G_1C' = \frac{1}{3}AC'$.
c) Gọi I là trung điểm của CD'. Do G_2 là trọng tâm tam giác $CB'D'$ nên $I \in B'G_2 \subset (A'B'G_2)$.

Vậy $\begin{cases} I \in (A'B'G_2) \cap (CDD'C') \\ A'B' \parallel C'D' \\ A'B' \subset (A'B'G_2) \\ C'D' \subset (CDD'C') \end{cases} \Rightarrow (A'B'G_2) \cap (CDD'C') = EF \parallel C'D'$

$E \in CC', F \in DD'$. Thiết diện là hình bình hành $A'B'EF$

Câu 8. a) Dễ thấy $PN \parallel CD'$ và $QM \parallel A'B$ mà $A'B \parallel C'D$ nên $PN \parallel QM$ hay M,N,P,Q đồng phẳng.
b) Do $PC'MA$ là hình bình hành nên MP đi qua trung điểm O của AC'.
$\Rightarrow O \in (MNPQ)$.
Mặt khác $A'B \parallel MQ \subset (MNPQ)$
$\Rightarrow A'B \parallel (MNPQ)$.
Gọi Δ là đường thẳng qua O và song song với $A'B$ thì Δ cố định và $\Delta \subset (MNPQ)$. Hay $(MNPQ)$ luôn chứa đường thẳng cố định Δ.
$(MNPQ) \parallel (A'BC') \Rightarrow BC' \parallel (MNPQ) \Rightarrow BC' \parallel NR$



$\Leftrightarrow \frac{BR}{BC}=\frac{C'N}{CC'}\Rightarrow x=\frac{a}{2}$. Đảo lại $x=\frac{a}{2}$, dễ dàng chứng minh được $(MNPQ)\parallel(A'BC')$.

c) Dễ thấy Δ cắt $BC, A'D'$ tại các trung điểm R và S của chúng.
Thiết diện là lục giác $MPNPSQ$. Dễ thấy lục giác có tâm đối xứng là O nên $MQ=NP, MR=NS, RN=SQ$ do đó chu vi thiết diện là

$2p=2(RM+MQ+QS)$. Ta có $MR=QS=\sqrt{\frac{a^2}{4}+(a-x)^2}$, $QM=x\sqrt{2}$

Vậy $2p=2\left(x\sqrt{2}+2\sqrt{\frac{a^2}{4}+(a-x)^2}\right)$.

Đặt $f(x)=x\sqrt{2}+\sqrt{a^2+4(a-x)^2};x\in[0;a]$.

Theo CauChy -Schwarz

$$\sqrt{\left(a^2+4(a-x)^2\right)\left(1^2+1^2\right)}\ge a+2(a-x)\Rightarrow\sqrt{a^2+4(a-x)^2}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}(3a-2x)$$

Nên $f(x)\ge x\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}(3a-2x)=\frac{3a}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{a}{2}$

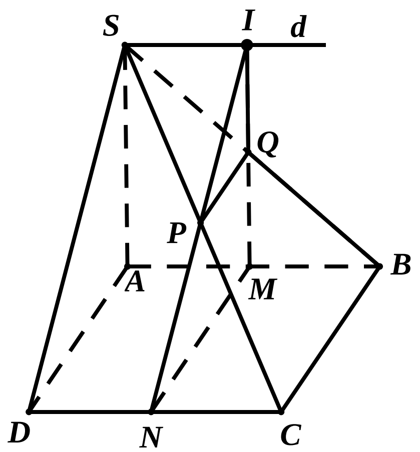
Vậy $\min(2p)=3\sqrt{2}a$.

Mặt khác bằng biến đổi tương đương ta có

$x\sqrt{2}+\sqrt{a^2+4(a-x)^2}\le\sqrt{2}a+a\Leftrightarrow(a-x)^2\left[(a-x)^2-a^2\right]\le 0$ đúng $\forall x\in[0;a]$. Đẳng thức xảy ra khi $x=a$. Vậy $\max(2p)=2a\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Câu 9.

a) Ta có $\begin{cases}(\alpha)\parallel(SAB)\\(ABCD)\cap(\alpha)=MN\\(ABCD)\cap(SAB)=AB\end{cases}\Rightarrow MN\parallel AB$ Tương tự



$(\alpha)\cap(SAB)=MQ\parallel SA$.

$(\alpha)\cap(SCD)=NP\parallel SD$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

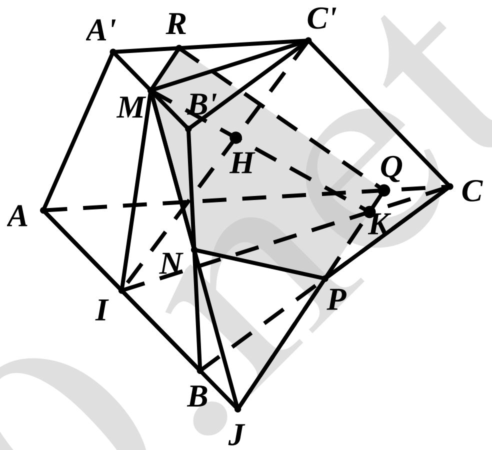
Do $\begin{cases}MN\parallel BC\\MN\subset(\alpha)\\BC\subset(SBC)\\(SBC)\cap(\alpha)=PQ\end{cases}\Rightarrow PQ\parallel MN\ (1)$

Ta có $MN\parallel AD, MQ\parallel SA$ mà $AD\perp SA$ nên $MN\perp MQ\ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $MNPQ$ là hình thang vuông.

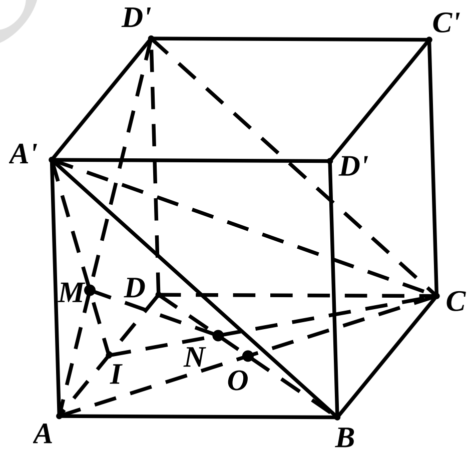
b) Gọi $d=(SAB)\cap(SCD)$, khi đó $I=NP\cap MQ\Rightarrow\begin{cases}I\in NP\subset(SCD)\\ I\in MQ\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow I\in d$ từ đây dễ dàng tìm được quĩ tích của điểm I.

Câu 10. a) Trong $(ABB'A')$ gọi $J=MN\cap AB$,
trong (ABC) gọi $Q=JP\cap AC$.
Ta có $(ABC)\parallel(A'B'C')$ nên $(MNP)\cap(A'B'C')=MR\parallel PQ$.
Thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.
b) Trong (ABC) gọi $K=PQ\cap IC$ thì $K\in(MNP)\Rightarrow MK\subset(MNP)$.
Do $CI\parallel C'M$ nên trong $(MICC')$ gọi $H=IC'\cap MK\Rightarrow H=IC'\cap(MNP)$.



Câu 11. a) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với $(A'D'CB)$ và $N'=(\alpha)\cap BD$.
Ta có $\dfrac{AM}{AD'}=\dfrac{DN'}{DB}$ (1)
Ta có $AD'=BD=a\sqrt{2}$ nên $AM=DN'$ mà $AM=DN$
$\Rightarrow DN=DN'\Rightarrow N\equiv N'$.
Vậy $MN\subset(\alpha)\parallel(A'D'CB)$ do đó MN song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

b) Khi $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì dễ thấy M,N lần lượt là trọng tâm các tam giác $A'AD$ và CAD nên $A'M$ và CN cắt nhau tại trung điểm I của AD.
Khi đó $\dfrac{IM}{IA'}=\dfrac{IN}{IC}\Rightarrow MN\parallel A'C$.

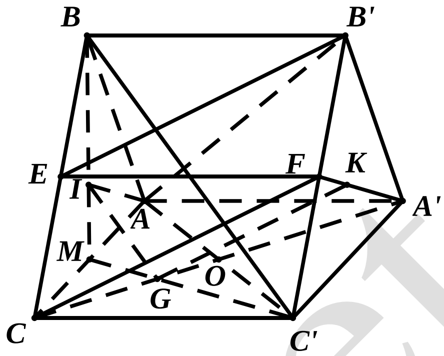


Câu 12. a) Gọi O, M, E, F lần lượt là trung điểm của $AC', AC, BC, B'C'$.

Chứng minh $(IGK) \parallel (BCC'B')$.

Ta có $\dfrac{MI}{MB} = \dfrac{MG}{MC'} \Rightarrow IG \parallel CC' \subset (BCC'B')$

$\Rightarrow IG \parallel (BCC'B')$ (1)



Tương tự $\dfrac{A'G}{A'C} = \dfrac{OA' + \frac{1}{3}OA'}{A'C}$

$= \dfrac{\frac{4}{3}OA'}{A'C} = \dfrac{2}{3}$.

Lại có $\dfrac{A'K}{A'F} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{A'G}{A'C} = \dfrac{A'K}{A'F}$

$\Rightarrow GK \parallel CF \subset (BCC'B')$

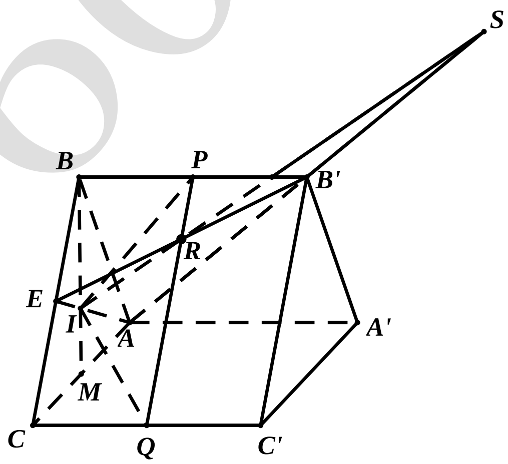
$\Rightarrow GK \parallel (BCC'B')$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $(IGK) \parallel (BCC'B')$.

Chứng minh $(A'KG) \parallel (AIB')$.

Dễ thấy $AA'FE$ là hình bình hành nên $A'F \parallel AE$ hay $A'F \parallel (AIB')$ (3). Cũng dễ thấy $CF \parallel EB' \subset (AIB') \Rightarrow CF \parallel (AIB')$ (4)

Từ $(3),(4)$ suy ra $(A'CF) // (AIB')$ mà $(A'CF)$ chính là $(A'KG)$ nên $(A'KG) \parallel (AIB')$.



b) Trong $(BCC'B')$ gọi $R = PQ \cap B'E$

$\Rightarrow \begin{cases} R \in PQ \\ R \in B'E \subset (AB'E) \end{cases}$

Trong $(AB'E)$ gọi $S = IR \cap AB'$ thì đường thẳng IR chính là đường thẳng cần dựng.

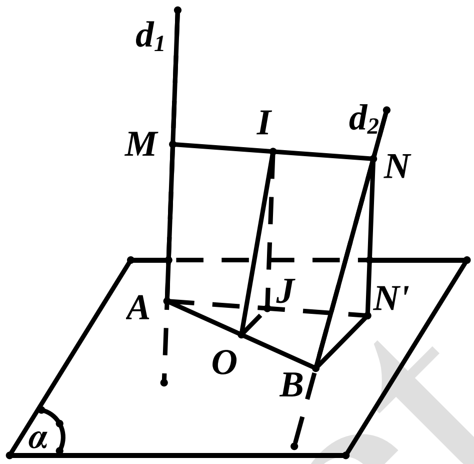
Câu 13. a) Ta có $MA \parallel NN'$ (1)

Do $\begin{cases} MN \parallel (\alpha) \\ (AMNN') \cap (\alpha) = AN' \end{cases}$

$\Rightarrow AN' \parallel MN$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $AMNN'$ là hình bình hành.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1 thì $NN' \subset (\beta) \Rightarrow N' \in (\beta)$ từ đó ta có N' thuộc giao tuyến d_3 của (α) và (β).



b) Ta có $MN = AN'$ nên MN nhỏ nhất khi AN' nhỏ nhất $\Leftrightarrow AN' \perp d_3$.

Từ đó ta xác định Δ như sau:

- Dựng (β) chứa d_2 và $(\beta) \parallel d_1$.
- Dựng giao tuyến $d_3 = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Gọi N' là hình chiếu của A trên d_3.
- Từ N' dựng đường thẳng song song với d_1 cắt d_2 tại N.
- Từ N dựng đường thẳng Δ song song với $N'A$ thì Δ là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán.

c) Gọi J là trung điểm của AN' thì $(OIJ) \parallel (\beta)$ mà O cố định và (β) cố định nên (OIJ) cố định. Vậy OI thuộc mặt phẳng cố định đi qua O và song song với (β).

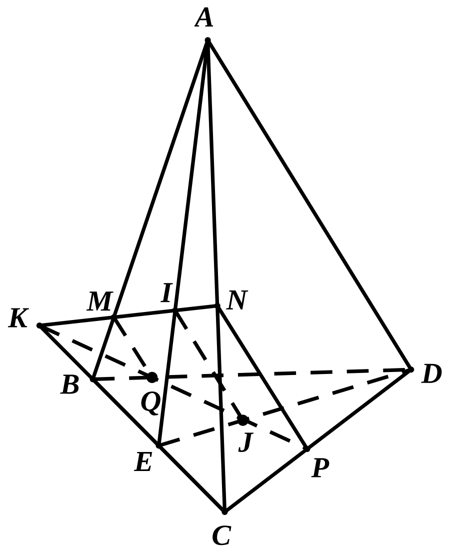
Câu 14.a) Ta có $(ABC),(DBC),(\alpha)$ đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là BC, MN, PQ nên theo định lí về giao tuyến thì BC, MN, PQ hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Ta chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân trong trường hợp BC, MN, PQ đồng quy

Gọi E là trung điểm của BC thì $\dfrac{EI}{EA} = \dfrac{EJ}{ED} \Rightarrow IJ \parallel AD$

.

Từ đó ta có $\begin{cases} IJ \subset (\alpha) \\ AD \subset (ACD) \\ IJ \parallel AD \\ (\alpha) \cap (ACD) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \parallel IJ$.



Tương tự $MQ \parallel IJ$ nên $MNPQ$ là hình thang.

Dễ thấy $DQ = AM = x, DP = AN = y$. Theo định lí cô sin ta có

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN\cos 60^0 = x^2 + y^2 - xy$

.

Tương tự

$PQ^2 = DP^2 + DQ^2 - 2DP.DQ\cos 60^0 = x^2 + y^2 - xy$

$\Rightarrow MN = PQ$

Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.

Trường hợp BC, MN, PQ song song không có gì khó khăn bạn đọc tự kiểm tra.

c) Ta có $S_{AMN} = S_{AIM} + S_{AIN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}xy\sin 60^0 = \frac{1}{2}x.\frac{a\sqrt{3}}{3}\sin 30^0 + \frac{1}{2}y.\frac{a\sqrt{3}}{3}\sin 30^0$

$\Leftrightarrow a(x+y) = 3xy$.

b) Ta có $AM + AN = x + y$. Theo BĐT Cauchy ta có

$a(x+y) = 3xy \le 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3(x+y)^2 - 4a(x+y) \Leftrightarrow x + y \ge \frac{4a}{3}$

$\Rightarrow AM + AN \ge \frac{4a}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{2a}{3}$, khi đó (α) đi qua IJ và song song với BC.

Không giảm tổng quát ta có thể giả sử $x \ge y$ khi đó $x \in [\frac{2a}{3}; a]$

Và $x + y = x + \frac{ax}{3x-a} = \frac{3x^2}{3x-a}$

$\Rightarrow x + y - \frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{3x-a} - \frac{3a}{2} = \frac{(a-x)(2a-x)}{3x-a} \le 0 \Rightarrow x + y \le \frac{3a}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = a \Rightarrow y = \frac{a}{2}$. Khi đó (α) đi qua B.

Vậy $\min(AM+AN) = \frac{4a}{3}, \max(AM+AN) = \frac{3a}{2}$.

c) Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân có

$MQ = a - x, NP = a - y$,

giả sử $x \ge y \Rightarrow a - x \le a - y$.

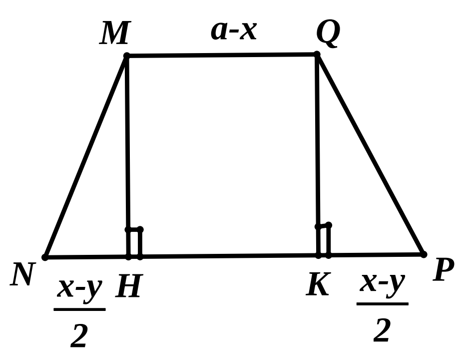
Ta có $HN = \frac{(a-y)-(a-x)}{2} = \frac{x-y}{2}$

$MH^2 = MN^2 - NH^2$

$= x^2 + y^2 - xy - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$.

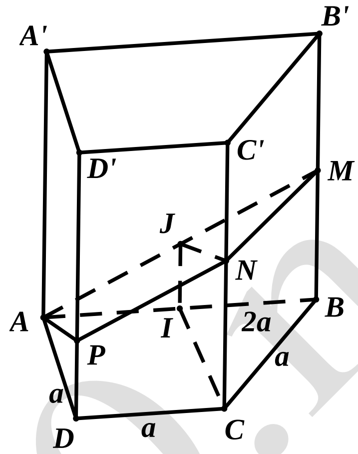
$= \frac{3(x^2+y^2) - 6xy}{4} = \frac{3s^2 - 8as}{4}$

$MH = \sqrt{3xy} = \sqrt{a(x+y)} = \frac{\sqrt{3s^2 - 8as}}{2}$

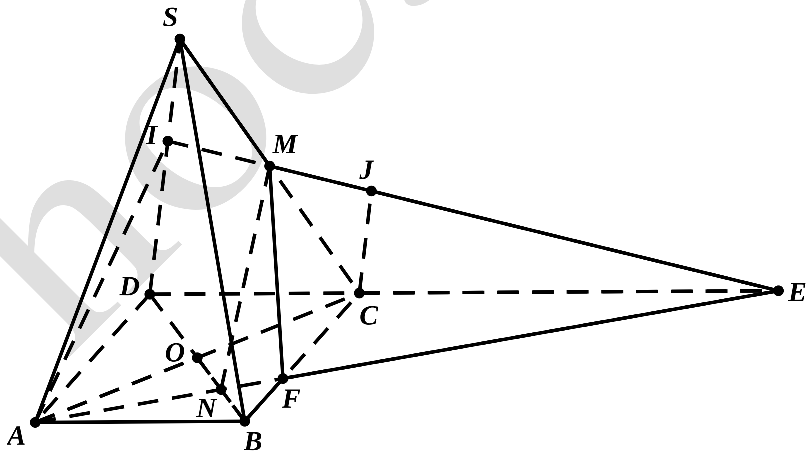


$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MQ+NP)MH=\frac{1}{2}(2a-(x+y))\sqrt{3s^2-8as}$
$=\frac{1}{4}(2a-s)\sqrt{3s^2-8as}$.

Câu 15.a) Ta có $(ABB'A')\parallel(CDD'C')$
, $(\alpha)\cap(ABB'A')=AM$
$(\alpha)\cap(CDD'C')=NP\Rightarrow AM\parallel NP$ (1)
do đó
$AMNP$ là hình thang.



b) Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB,AM thì $IC\parallel AD\Rightarrow IC\parallel(ADD'A')$
lại có $IJ\parallel BB'\parallel AA'$
$\Rightarrow IJ\parallel AA'\subset(ADD'A')\Rightarrow(CIJN)\parallel(ADD'A')$Mặt khác $(\alpha)\cap(ADD'A')=AP$ và
$(\alpha)\cap(CIJN)=JN$ nên $JN\parallel AP$ (2)
Từ $(1),(2)$ suy ra $APNJ$ là hình bình hành , do đó $PN=AJ=\frac{1}{2}AM$.



PHẦN 3 – CÁC DẠNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. Dạng 1:Chứng minh 2 mặtphẳng song song

a) Phương pháp giải tự luận.

Dựa vào định lý, hệ quả sau:

1. $\begin{cases} \alpha \supset a,\ b \\ a \cap b = I \\ a // \beta,\ b // \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta$ **2.** $\begin{cases} \alpha // \gamma \\ \beta // \gamma \\ \alpha \neq \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta$

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$, gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA,\ SB,\ SC$. Gọi $A' = BP \cap CN, B' = CM \cap AP, C' = AN \cap BM$. Hãy chọn khẳng định sai:

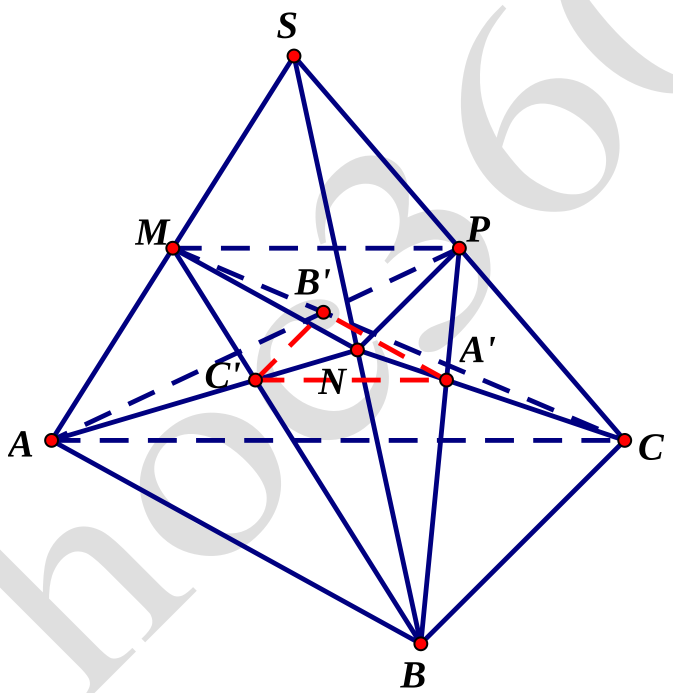
A. $MNP\ //\ ABC$ **B.** $A'B'C'\ //\ ABC$

C. $A'B'C'\ //\ MNP$ **D.** ABC cắt MNP

Lờigiải

Chọn D

Giảitheotự luận:



Ápdụngđịnhlý Taletđảotrongcácmặtphẳng SAB, SBC, ta cócáckếtquả

$MN // AB,\ NP // BC \Rightarrow MNP\ //\ ABC$.

Ápdụngđịnhlý Taletđảotrongcácmặtphẳng BMP, CMN, ta cócáckếtquả

$MP // A'C'$, MN $// A'B' \Rightarrow MNP\ //\ A'B'C'$.

Theo tínhchấtbắccầusuyra $A'B'C'\ //\ ABC$ .Nhưvậyđápán D sai

Giảitheo pp trắcnghiệm:

Nếutưởngtượngtốtcóthểđoánđượckếtquảngay.

Ví dụ 2: Cho hìnhlăngtrụ $ABC.A'B'C'$. Gọi $M = BC' \cap B'C$, $N = AC' \cap A'C$, $P = AB' \cap A'B$.

Hãychọnkhẳngđịnhsai:

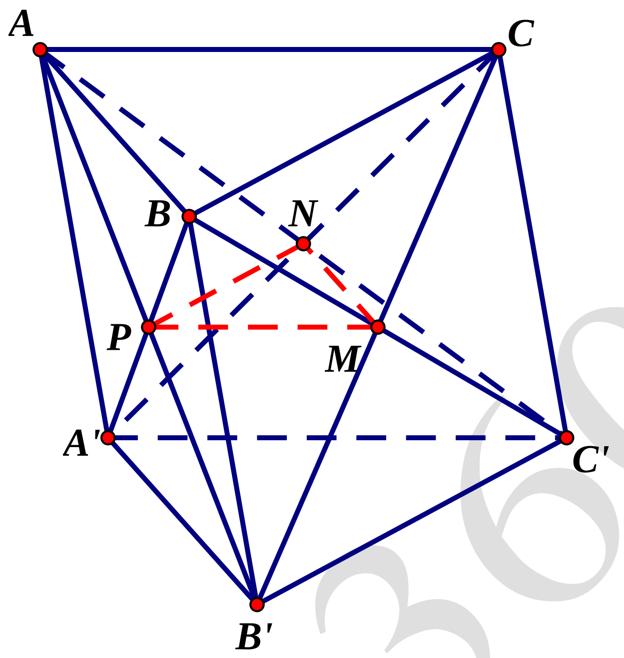
A. $(A'B'C')\ //\ (ABC)$ **B.** $(MNP)\ //\ (ABC)$

C. $(A'B'C')\ //\ (MNP)$ **D.** ΔMNP và ΔABC khôngđồngdạng

Lờigiải

Chọn D

Giảitheotự luận



Do giảthiếthìnhlăngtrụ, nên ta cóngay $(A'B'C')\ //\ (ABC)$.

Ápdụngđịnhlýtaletđảotrongcácmặtphẳng $(B'AC)$, $(C'AB)$, ta có

$MP\ //\ AC, MN\ //\ AB \Rightarrow (MNP)\ //\ (ABC)$.

Theo tínhchấtbắccầu, ta có $(A'B'C')\ //\ (MNP)$

TrongkhiápdụngđịnhlýTaletđảo, ta cócáctỷlệ $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{MP}{AC} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$

II. Dạng 2:Chứng minh đườngthẳng song songvớimặtphẳng

a) Phươngphápgiảitự luận.

Dựavàocáchệquảsau:

1. $\begin{cases} (\alpha)\ //\ (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a\ //\ (\beta)$

2. $\begin{cases} AB\ //\ (\alpha) \\ AC\ //\ (\alpha) \\ AB \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BC\ //\ (\alpha)$

vàcácđịnhlý, hệquảcủabàitrước

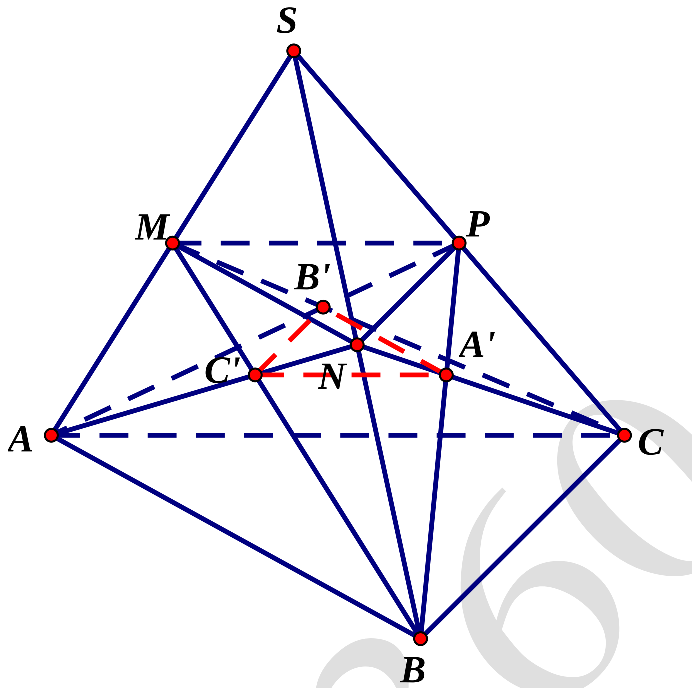
Ví dụ 1: Cho hìnhchóp $S.ABC$, gọi $M,\ N,\ P$ lầnlượtlàtrungđiểmcủacáccạnh $SA,\ SB,\ SC$. Gọi $A'=BP\cap CN, B'=CM\cap AP, C'=AN\cap BM$. Cóbaonhiêucặp (đườngthẳng, mặtphẳng) song songvớinhautrongsốcácđườngthẳngvàmặtphẳngđi qua cácđiểmđãcho?

A. 18 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 12

Lờigiải

Chọn A

Giảitheotự luận:



Có 3 mặtphẳngđôimột song song: ABC, $A'B'C'$, MNP. Mỗicặpmặtphẳngnàysẽtạora 6 cặp (đườngthẳng, mặtphẳng) song song. Tấtcácó 3 cặpmặtphẳngnhưvậy, nêncó 18 cặp (đườngthẳng, mặtphẳng) song song

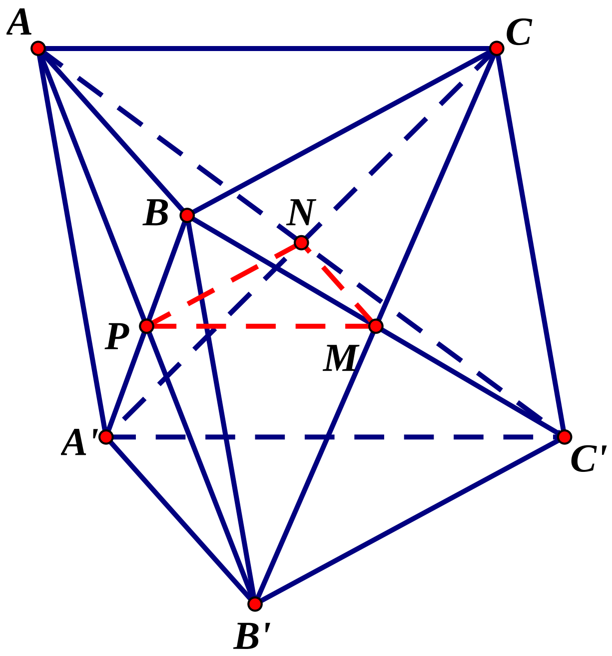
Ví dụ 2: Cho hìnhlăngtrụ $ABC.A'B'C'$. Gọi $M=BC'\cap B'C,\ N=AC'\cap A'C,\ P=AB'\cap A'B$. Đườngthẳng BC song songvớibaonhiêumặtphẳngtrongsốcácmặtphẳngđi qua cácđiểmđãcho?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lờigiải

Chọn B

Giảitheotự luận



Ta có $BC\,//\,(A'B'C')$, (MNP), $(AB'C')$

III. **Dạng 3: Chứng minh 2 đườngthẳng song song**

a) Phươngphápgiảitự luận.

Dựavàođịnhlý ở bàihaimặtphẳng song song

$$\begin{cases} (\alpha)\,//\,(\beta) \\ (\gamma)\,//\,(\alpha) = a \Rightarrow a\,//\,b \\ (\gamma)\,//\,(\beta) = b \end{cases}$$

vàcácđịnhlý, hệquả ở cácbàitrước

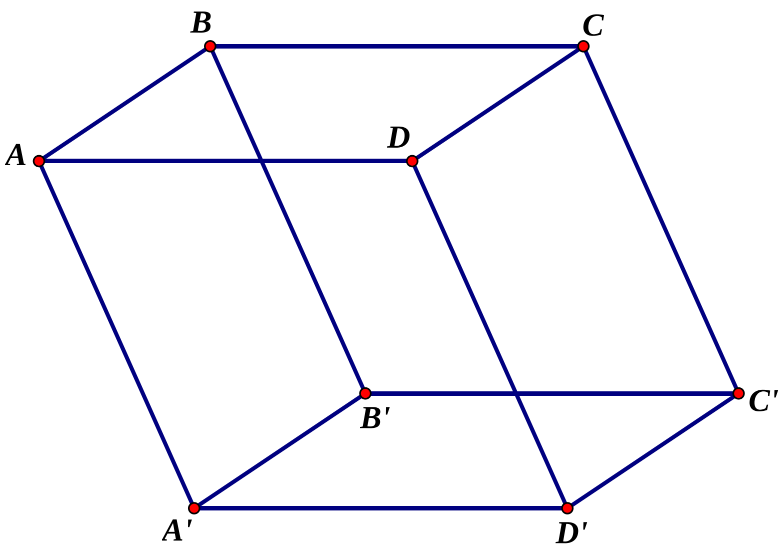
Ví dụ 1: Cho hìnhhộp $ABCD.A'B'C'D'$. Cóbaonhiêucặpđườngthẳng song songvớinhautrongsốcácđườngthẳngđi qua cácđiểmđãcho?

A. 12 **B.** 15 **C.** 24 **D.** 18

Lờigiải

Chọn C

Giảitheotự luận:



Ta có

$AD//BC//A'D'//B'C' \Rightarrow$ Có $C_4^2 = 6$ cặp

$AB//CD//A'B'//C'D' \Rightarrow$ Có $C_4^2 = 6$ cặp

$AA'//BB'//CC'//DD' \Rightarrow$ Có $C_4^2 = 6$ cặp

$AC//B'C', BD//A'C', AB'//DC', BA'//CD', AD'//BC', DA'//CB'$, có 6 cặp

IV. Dạng 4: Bàitoánliênquanđếntỷlệđộdài

a) Phươngphápgiảitự luận.

DựavàođịnhlýTalet (thuận), hệquả ở bàihaimặtphẳng song song:

1. $\begin{cases} \alpha // \beta \\ d \cap \alpha = A,\ d \cap \beta = B \\ d' \cap \alpha = A',\ d' \cap \beta = B' \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$

2. $\begin{cases} \alpha // \beta // \gamma \\ d \cap \alpha = A,\ d \cap \beta = B,\ d \cap \gamma = C \\ d' \cap \alpha = A',\ d' \cap \beta = B',\ d' \cap \gamma = C' \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

vàđịnhlýTaletthuậnvàđảotrongmặtphẳng

Ví dụ 1: Cho hìnhchópcụt $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $M = BC' \cap B'C,\ Q = AD' \cap A'D$. Mặtphẳng SQM cắt $BC,\ B'C',\ AD,\ A'D'$ lầnlượttại $E,\ H,\ E,\ K$. Chọnmệnhđềsai

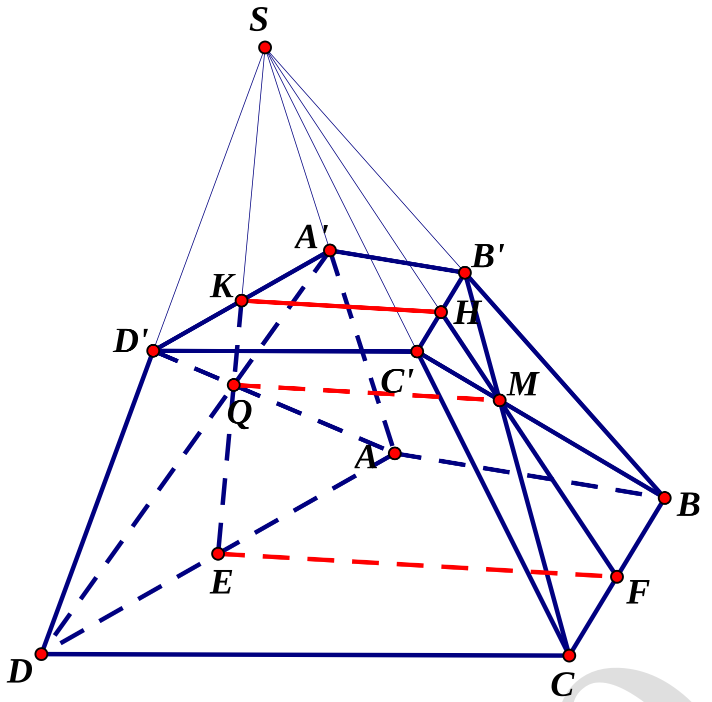
A. $\dfrac{HK}{FE} = \dfrac{\text{dieän tích töù giaùc } A'B'C'D'}{\text{dieän tích töù giaùc } ABCD}$ **B.** 4 ñieåm A', B', C, D taïo thaønh töù giaùc

C. E laø trung ñieåm cuûa caïnh AD **D.** $\dfrac{HK}{FE} = \dfrac{MB'}{MC} = \dfrac{QA'}{QD}$

Lờigiải

Chọn A

Giảitheotự luận:



5. Dạng 5:Xácđịnhgiaotuyến

a) Phươngphápgiảitự luận.

Dựavàođịnhlý:

$$\begin{cases} \alpha \; // \; \beta \\ \gamma \; // \; \alpha \; = a \Rightarrow a // b \\ \gamma \; // \; \beta \; = b \end{cases}$$

Vàcáckếtquảcótrước

Ví dụ 1: Cho hìnhchóptứgiác $S.ABCD$, cóđáylàhìnhbìnhhành, gọi O làtâmcủađáy.Gọi α làmặtphẳngđi qua O và song songvới SAD . α cắt $AB, \ SC$ lầnlượttại $M, \ Q$ .Hãychọnmệnhđềđúng:

A. $OQ, \ SA$ cắtnhau

B. $MQ // SAD$

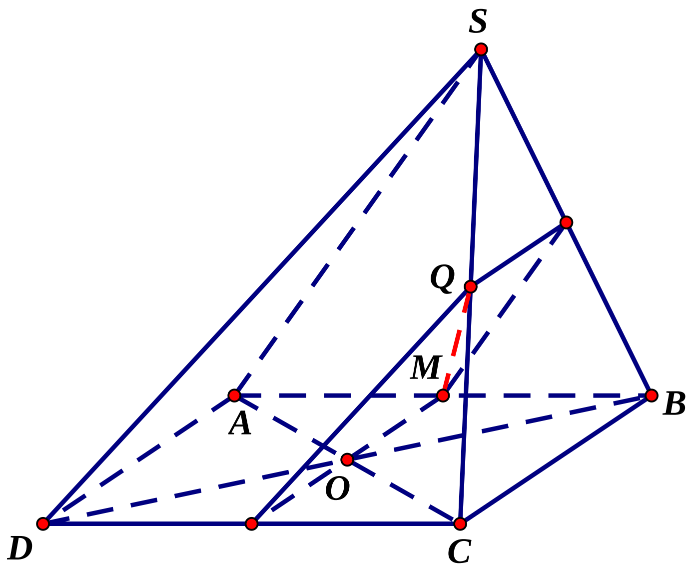
C. $OQ, \ SAD$ cắtnhau

D. $SO // MQ$

Lờigiải

Chọn B

Giảitheotự luận:



6. Dạng 6:Xác định giao thiết diện

a) Phương pháp giải tự luận.

Dựavàođịnhlý:

$$\begin{cases} \alpha \ // \ \beta \\ \gamma \ // \ \alpha \ = a \Rightarrow a \ // b \\ \gamma \ // \ \beta \ = b \end{cases}$$

Vàcáckếtquảcótrước

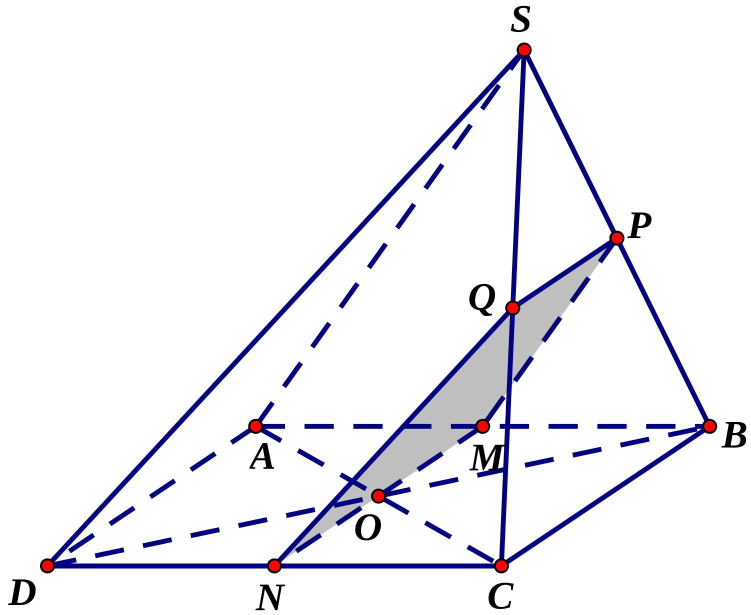
Ví dụ 1: Cho hìnhchóptứgiác $S.ABCD$, cóđáylàhìnhbìnhhành, gọi O làtâmcủađáy. Gọi α làmặtphẳngđi qua O và song songvới SAD .Khiđóthiếtdiệncủahìnhchópcắtbởi α làhìnhgì?

A.hình bình hành **B.**tam giác **C.**hình thang **D.**hình chữ nhật

Lời giải

Chọn C

Giải theo tự luận:



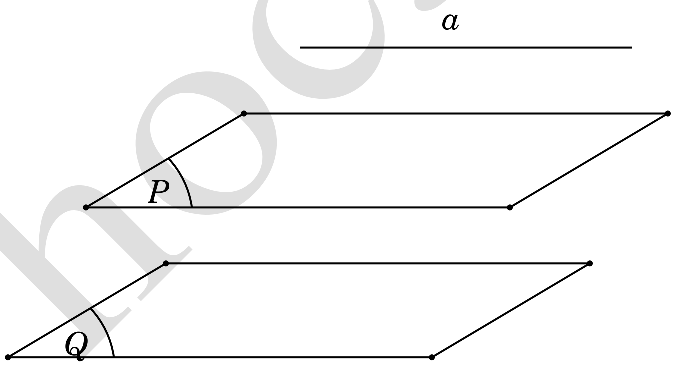
BÀI TẬP TỰ LUYỆN
Bài tập lí thuyết

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.
B. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.
C. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.
D. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó .

Lời giải.

Chọn C.



tTrong không gian, hai mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: trùng nhau, cắt nhau, song song với nhau. Vì vậy, 2 mặt phẳng không cắt nhau thì có thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ A là mệnh đề sai.
Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì chúng có thể song song với nhau (hình vẽ) $\Rightarrow$ B là mệnh đề sai.
Ta có: $a \,//\, (P)$, $a \,//\, (Q)$ nhưng (P) và (Q) vẫn có thể song song với nhau.

Mệnh đề C là tính chất nên C đúng

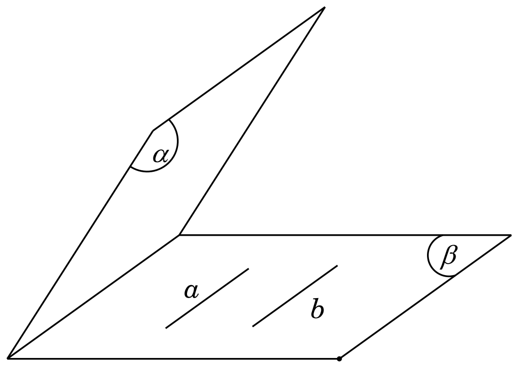
Câu 2: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $mp\,(\alpha) \,//\, mp\,(\beta)$?

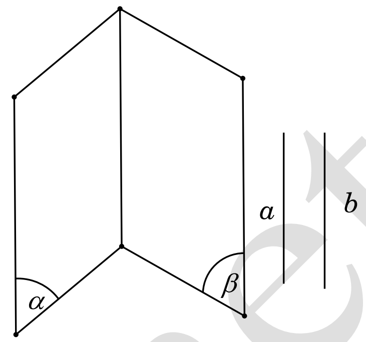
A. $(\alpha) \,//\, (\gamma)$ và $(\beta) \,//\, (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó).

B. $\alpha \;//\; a$ và $\alpha \;//\; b$ với a,b là hai đường thẳng phân biệt thuộc β .
C. $\alpha \;//\; a$ và $\alpha \;//\; b$ với a,b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với β .
D. $\alpha \;//\; a$ và $\alpha \;//\; b$ với a,b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc β .

Lời giải.

Chọn D.





Trong trường hợp $\alpha \;//\; \gamma$ và $\beta \;//\; \gamma$ (γ là mặt phẳng nào đó) thì α và β có thể trùng nhau $\Rightarrow$ Loại A.
$\alpha \;//\; a$ và $\alpha \;//\; b$ với a,b là hai đường thẳng phân biệt thuộc β thì α và β vẫn có thể cắt nhau (hình 1) $\Rightarrow$ Loại B.
$\alpha \;//\; a$ và $\alpha \;//\; b$ với a,b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với β thì α và β vẫn có thể cắt nhau (hình 2) $\Rightarrow$ Loại

Câu 3: Cho hai mặt phẳng song song α và β , đường thẳng $a \;//\; \alpha$. Có mấy vị trí tương đối của a và β .

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Chọn B.

Trong không gian, giữa đường thẳng và mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: đường thẳng cắt mặt phẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng nằm trên mặt phẳng.
$a \;//\; \alpha$ mà $\alpha \;//\; \beta \Rightarrow a$ và α không thể cắt nhau.
Vậy còn 2 vị trí tương đối.

Câu 4: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng P ?

A. $a \;//\; b$ và $b \subset P$ .. **B.** $a \;//\; b$ và $b \;//\; P$ ..
C. $a \;//\; Q$ và $Q \;//\; P$ .. **D.** $a \subset Q$ và $b \subset P$ ..

Lời giải.

Chọn D.

Ta có: $a \;//\; b$ và $b \subset P$ suy ra $a \;//\; P$ hoặc $a \subset P \Rightarrow$ Loại A.
$a \;//\; b$ và $b \;//\; P$ suy ra $a \;//\; P$ hoặc $a \subset P \Rightarrow$ Loại B.
$a \;//\; Q$ và $Q \;//\; P$ suy ra $a \;//\; P$ hoặc $a \subset P \Rightarrow$ Loại C.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $\alpha \;//\; \beta$ và $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ thì $a \;//\; b$. .
B. Nếu $\alpha \;//\; \beta$ và $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ thì a và b chéo nhau..

C. Nếu $a \parallel b$ và $a \subset \alpha, b \subset \beta$ thì $\alpha \parallel \beta$..

D. Nếu $\gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b$ và $\alpha \parallel \beta$ thì $a \parallel b$..

Lời giải.

Chọn D.

Nếu $\alpha \parallel \beta$ và $a \subset \alpha, b \subset \beta$ thì $a \parallel b$ hoặc a chéo $b \Rightarrow$ A, B sai.

Nếu $a \parallel b$ và $a \subset \alpha, b \subset \beta$ thì $\alpha \parallel \beta$ hoặc α và β cắt nhau theo giao tuyến song song với a và b.

Câu 6: Cho đường thẳng $a \subset mp\ P$ và đường thẳng $b \subset mp\ Q$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P \parallel Q \Rightarrow a \parallel b$..

B. $a \parallel b \Rightarrow P \parallel Q$..

C. $P \parallel Q \Rightarrow a \parallel Q$ và $b \parallel P$..

D. a và b chéo nhau..

Lời giải.

Chọn C.

Với đường thẳng $a \subset mp\ P$ và đường thẳng $b \subset mp\ Q$

Khi $P \parallel Q \Rightarrow a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau $\Rightarrow$ A sai.

Khi $a \parallel b \Rightarrow P \parallel Q$ hoặc P, Q cắt nhau theo giao tuyến song song với a và b $\Rightarrow$ B sai.

a và b có thể chéo nhau, song song hoặc cắt nhau $\Rightarrow$ D sai.

Câu 7: Hai đường thẳng a và b nằm trong $mp\ \alpha$. Hai đường thẳng a' và b' nằm trong $mp\ \beta$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $\alpha \parallel \beta$..

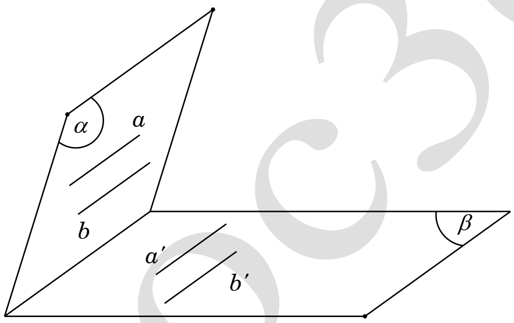
B. Nếu $\alpha \parallel \beta$ thì $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$..

C. Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $\alpha \parallel \beta$..

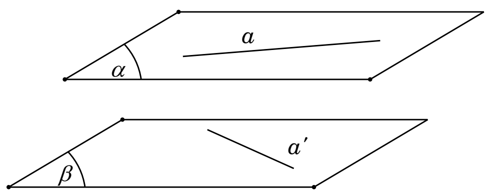
D. Nếu a cắt b và $a \parallel a', b \parallel b'$ thì $\alpha \parallel \beta$..

Lời giải.

Chọn D.



Hình 1



Hình 2

Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $\alpha \parallel \beta$ hoặc α cắt β (Hình 1) $\Rightarrow$ A sai.

Nếu $\alpha \parallel \beta$ thì $a \parallel a'$ hoặc a, a' chéo nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ B sai.

Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $\alpha \parallel \beta$ hoặc α cắt CC'. (Hình 1) $\Rightarrow$ C sai.

Câu 8: Cho hai mặt phẳng P và Q cắt nhau theo giao tuyến Δ. Hai đường thẳng p và q lần lượt nằm trong P và Q. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. p và q cắt nhau..

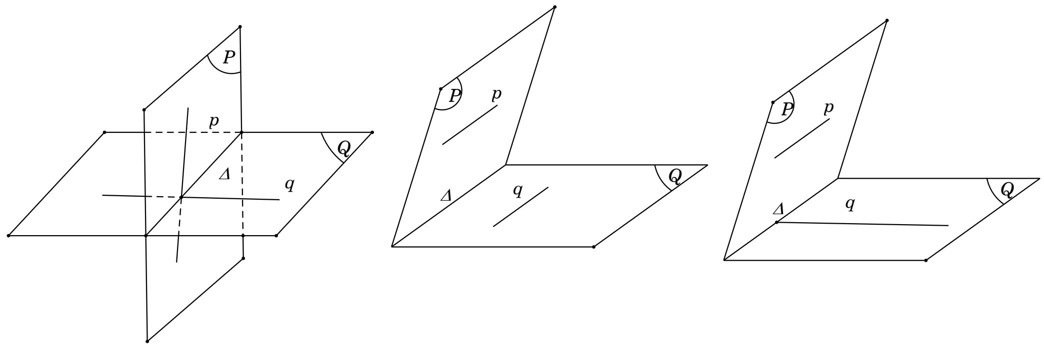
B. p và q chéo nhau.

C. p và q song song.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Lời giải.

Chọn D.



Ta có p và q có thể cắt nhau, song song, chéo nhau (hình vẽ).

Câu 9: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

A. Hình lăng trụ có các cạnh bên song song và bằng nhau.
B. Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.
C. Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác đều.
D. Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành.

Lời giải.

Chọn C.

Xét hình lăng trụ có đáy là một đa giác (tam giác, tứ giác,…), ta thấy rằng
Hình lăng trụ luôn có các cạnh bên song song và bằng nhau.
Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.
Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau (tam giác, tứ giác,…)
Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành vì có hai cạnh là hai cạnh bên của hình lăng trụ, hai cạnh còn lại thuộc hai đáy song song.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Các cạnh bên của hình chóp cụt đôi một song song. .
B. Các cạnh bên của hình chóp cụt là các hình thang. .
C. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng..
D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai..

Lời giải.

Chọn C.

Xét hình chóp cụt có đáy là đa giác (tam giác, tứ giác,…) ta thấy rằng:
Các cạnh bên của hình chóp cụt đôi một cắt nhau.
Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang cân.
Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.

Câu 11: Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào sai?

A. Trong hình chóp cụt thì hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau..
B. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
C. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang cân..
D. Đường thẳng chứa các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

Lời giải.

Chọn C.

Với hình chóp cụt, các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.

Câu 12: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Nếu hai mặt phẳng α và β song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong α đều song song với β ..

B. Nếu hai mặt phẳng α và β song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong α đều song song với mọi đường thẳng nằm trong β. .

C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt α và β thì α và β song song với nhau. .

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó. .

Lời giải.

Chọn A.

Đáp án B, C sai. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau thì có thể chéo nhau.

Đáp án D sai vì qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được vô số đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Câu 13: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $\alpha \,//\, \beta$ và $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ thì $a \,//\, b$. .

B. Nếu $a \,//\, \alpha$ và $b \,//\, \beta$ thì $a \,//\, b$. .

C. Nếu $\alpha \,//\, \beta$ và $a \subset \alpha$ thì $a \,//\, \beta$. .

D. Nếu $a \,//\, b$ và $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ thì.

Lời giải.

Chọn C.

Câu 14:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Câu 15:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Câu 16:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Câu 17:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. NOM cắt OPM . .

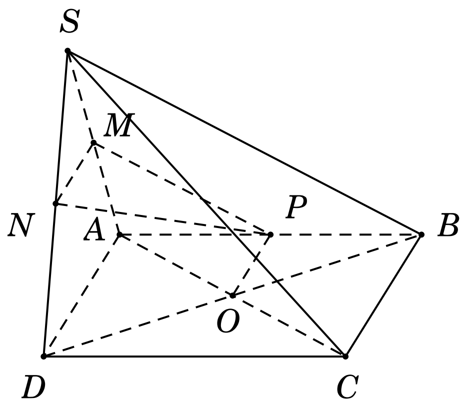
B. $MON \,//\, SBC$ . .

C. $PON \cap MNP = NP$. .

D. $NMP \,//\, SBD$ . .

Lời giải.

Chọn B.



Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD suy ra $MN // AD.$ (1)

Và OP là đường trung bình của tam giác BAD suy ra $OP // AD.$ (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra $MN // OP // AD \Rightarrow M, N, O, P$ đồng phẳng.

Lại có $MP // SB, OP // BC$ suy ra $(MNOP) // (SBC)$ hay $(MON) // (SBC)$.

Câu 19: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $(ABC) // (A_1B_1C_1)$.

B. $AA_1 // (BCC_1)$.

C. $AB // (A_1B_1C_1)$.

D. AA_1B_1B là hình chữ nhật.

Lời giải.

Chọn D.

Vì mặt bên AA_1B_1B là hình bình hành, còn nó là hình chữ nhật nếu $ABC.A_1B_1C_1$ là hình lăng trụ đứng.

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $ABCD$ là hình bình hành.

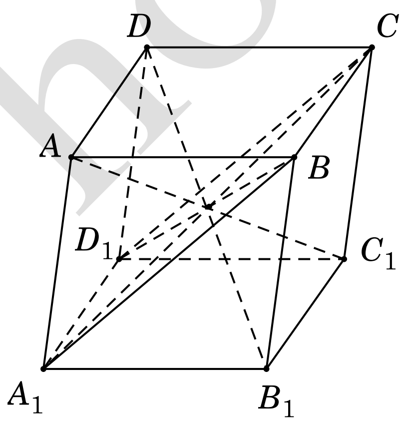
B. Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B đồng quy.

C. $(ADD_1A_1) // (BCC_1B_1)$.

D. AD_1CB là hình chữ nhật.

Lời giải.

Chọn D.



Dựa vào hình vẽ và tính chất của hình hộp chữ nhật, ta thấy rằng:

- Hình hộp có đáy $ABCD$ là hình bình hành.
- Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B cắt nhau tại tâm của AA_1C_1C, BDD_1B_1.

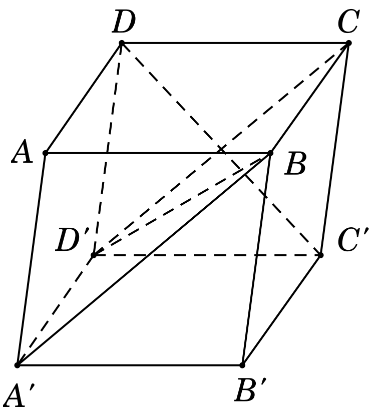
- Hai mặt bên ADD_1A_1 , BCC_1B_1 đối diện và song song với nhau.
- AD_1 và CB là hai đường thẳng chéo nhau suy ra AD_1CB không phải là hình chữ nhật.

Câu 21: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD'. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $AA'B'B$ // $DD'C'C$ ..
B. $BA'D'$ // ADC' ..
C. $A'B'CD$ là hình bình hành..
D. $BB'D'D$ là một tứ giác..

Lời giải.

Chọn B.



Dựa vào hình vẽ dưới và tính chất của hình hộp, ta thấy rằng:

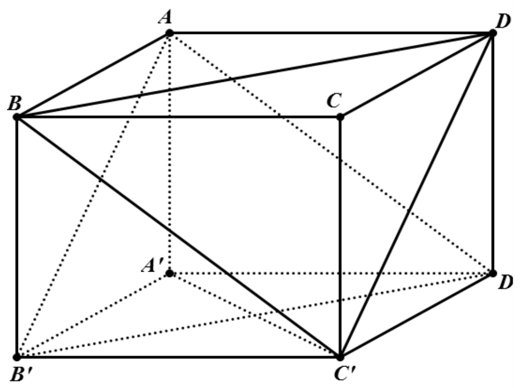
- Hai mặt bên $AA'B'B$ và $DD'C'C$ đối diện, song song với nhau.
- Hình hộp có hai đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$ là hình bình hành $\Rightarrow A'B' = CD$ và $A'B' // CD$ suy ra $A'B'CD$ là hình hình hành.
- $BD // B'D'$ suy ra B, B', D', D đồng phẳng $\Rightarrow BB'D'D$ là tứ giác.
- Mặt phẳng $BA'D'$ chứa đường thẳng CD' mà CD' cắt $C'D$ suy ra $BA'D'$ không song song với mặt phẳng ADC' .

Câu 22: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (BCA') .
B. $(BC'D)$.
C. $(A'C'C)$.
D. (BDA').

Lời giải.

Chọn B.



Do $ADC'B'$ là hình bình hành nên $AB'//DC'$, và $ABC'D'$ là hình bình hành nên $AD'//BC'$ nên $\left(AB'D'\right)//\left(BC'D\right)$

Câu 23:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Câu 24:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Dạng 2: Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng

Câu 25:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Câu 26:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Câu 27:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Câu 28:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Câu 29:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

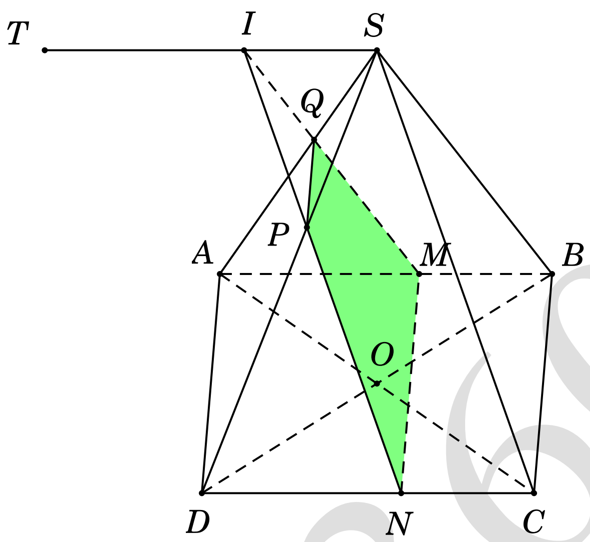
Dạng 3: Tìm giao tuyến

Câu 30: Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn $AB.$ Qua M vẽ mặt phẳng α song song với SBC. Gọi $N,\ P,\ Q$ lần lượt là giao của mặt phẳng α với các đường thẳng $CD,\ SD,\ SA$. Tập hợp các giao điểm I của hai đường thẳng MQ và NP là:

A. Đường thẳng song song với $AB.$
B. Nửa đường thẳng.
C. Đoạn thẳng song song với $AB.$.
D. Tập hợp rỗng.

Lời giải.

Chọn C.



Lần lượt lấy các điểm $N,\ P,\ Q$ thuộc các cạnh $CD,\ SD,\ SA$ thỏa $MN\ //\ BC,\ \ NP\ //\ SC,\ \ PQ\ //\ AD$. Suy ra $\alpha\ \equiv\ MNPQ$ và $\alpha\ //\ SBC$.

Vì $I = MQ \cap NP \longrightarrow \begin{cases} I,S \in\ SCD \\ I,S \in\ SAB \end{cases} \longrightarrow I$ nằm trên đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng SAB và SCD. Khi $\begin{cases} M \equiv B \Rightarrow I \equiv S \\ M \equiv A \Rightarrow I \equiv T \end{cases}$ với T là điểm thỏa mãn tứ giác $ABST$ là hình bình hành.

Vậy quỹ tích cần tìm là đoạn thẳng song song với AB.

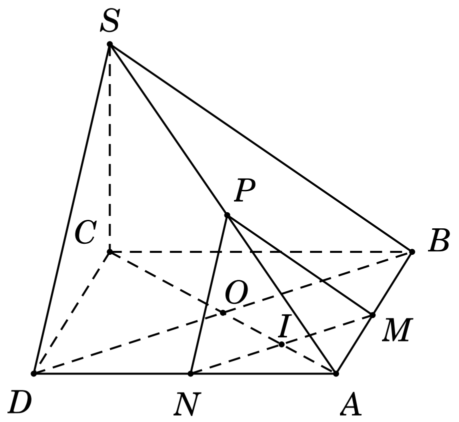
Dạng 4: Tìm thiết diện

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O.$ Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng P song song với SBD và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của P và hình chóp là hình gì?

A. Hình bình hành.
B. Tam giác cân.
C. Tam giác vuông.
D. Tam giác đều.

Lời giải.

Chọn D.



Gọi MN là đoạn thẳng giao tuyến của mặt phẳng P và mặt đáy $ABCD$.

Vì P // SBD , $P \cap ABCD = MN$ và $SBD \cap ABCD = MN$ suy ra $MN // BD$.

Lập luận tương tự, ta có

P cắt mặt SAD theo đoạn giao tuyến NP với $NP // SD$.

P cắt mặt SAB theo đoạn giao tuyến MP với $MP // SB$.

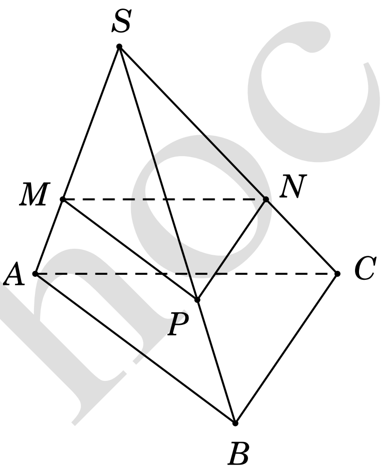
Vậy tam giác MNP đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện của P và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác đều MNP.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $BAC = 30°$. Mặt phẳng P song song với ABC cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của P và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16}{9}$.. **B.** $\frac{14}{9}$.. **C.** $\frac{25}{9}$. **D.** 1. .

Lời giải.

Chọn A.



Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2}.4.4.\sin 30^0 = 4.$

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng P và các cạnh SB, SC.

Vì P // ABC nên theoo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$.

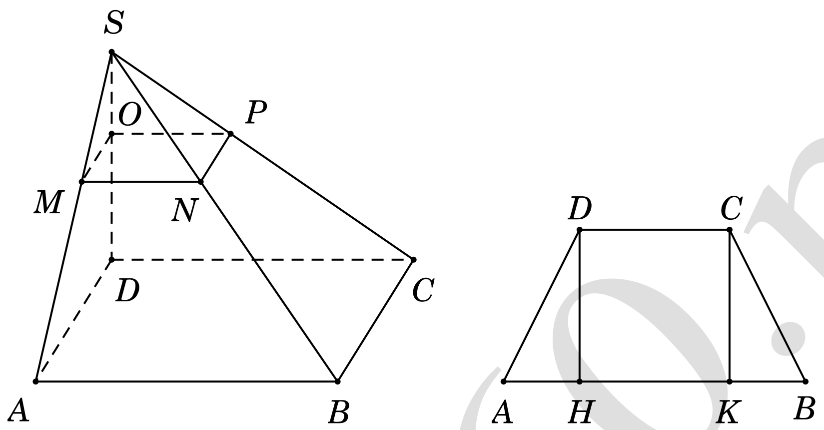
Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k=\frac{2}{3}$. Vậy $S_{\Delta MNP}=k^2.S_{\Delta ABC}=\left(\frac{2}{3}\right)^2.4=\frac{16}{9}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC=2$, hai đáy $AB=6$, $CD=4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA=3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$.. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. . **C.** 2.. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$..

Lời giải.

Chọn A.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên AB.

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases} AH=BK;\ CD=HK \\ AH+HK+BK=AB \end{cases} \Rightarrow BK=1$.

Tam giác BCK vuông tại K, có $CK=\sqrt{BC^2-BK^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD}=CK.\frac{AB+CD}{2}=\sqrt{3}.\frac{4+6}{2}=5\sqrt{3}$.

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh SB, SC, SD.

Vì $(P)\ //\ (ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{MN}{AB}=\frac{NP}{BC}=\frac{PQ}{CD}=\frac{QM}{AD}=\frac{1}{3}$.

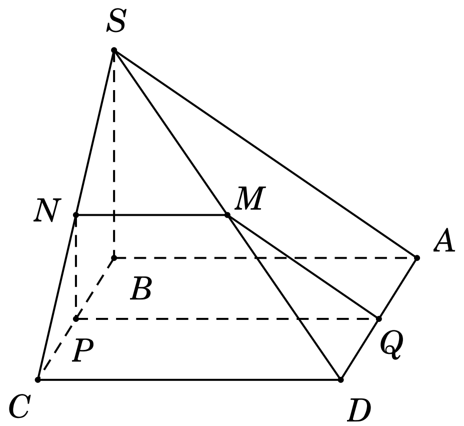
Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ}=k^2.S_{ABCD}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm O, $AB=8$, $SA=SB=6$. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với (SAB). Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là:

A. $5\sqrt{5}$.. **B.** $6\sqrt{5}$.. **C.** 12.. **D.** 13..

Lời giải.

Chọn B.



Qua O kẻ đường thẳng d song song AB và cắt BC, AD lần lượt tại P, Q.
Kẻ PN song song với SB $N \in SB$, kẻ QM song song với SA $M \in SA$.
Khi đó $MNPQ$ // SAB $\Rightarrow$ thiết diện của P và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$
Vì P, Q là trung điểm của BC, AD suy ra N, M lần lượt là trung điểm của SC, SD.
Do đó MN là đường trung bình tam giác $SCD \Rightarrow MN = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2} = 4.$
Và $NP = \frac{SB}{2} = 3;\ QM = \frac{SA}{2} = 3 \Rightarrow NP = QM \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.
Hạ NH, MK vuông góc với PQ. Ta có $PH = KQ \Rightarrow PH = \frac{1}{2}\ PQ - MN\ = 2.$
Tam giác PHN vuông, có $NH = \sqrt{5}.$

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = NH.\frac{PQ + NM}{2} = 6\sqrt{5}.$

Câu 35: Nếu thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

A. 3 cạnh.. **B.** 4 cạnh.. **C.** 5 cạnh.. **D.** 6 cạnh.

Lời giải.

Chọn C.

Đa giác thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng có nhiều nhất 5 cạnh với các cạnh thuộc các mặt của hình lăng trụ tam giác.

Câu 36: Nếu thiết diện của một hình hộp và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh ?

A. 4 cạnh. . **B.** 5 cạnh.. **C.** 6 cạnh.. **D.** 7 cạnh..

Lời giải.

Chọn C.

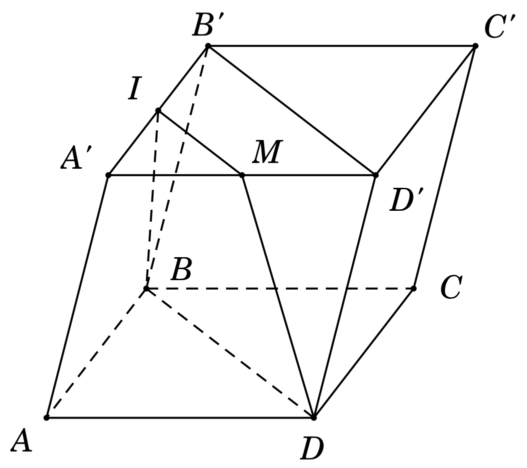
Vì hình hộp là hình lăng trụ có đáy là tứ giác và có 6 mặt nên thiết diện của hình hộp và mặt phẳng bất kì là một đa giác có nhiều nhất 6 cạnh.

Câu 37: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của $AB.$ Mặt phẳng $IB'D'$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Tam giác.. **B.** Hình thang.. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật..

Lời giải.

Chọn B.



Ta có $\begin{cases} B'D' \subset (IB'D') \\ BD \subset (ABCD) \\ B'D' \,//\, BD \end{cases} \longrightarrow$ Ggiao tuyến của $(IB'D')$ với $(ABCD)$ là đường thẳng d đi qua I và song song với BD.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $M = d \cap AD \longrightarrow IM \,//\, BD \,//\, B'D'$.

Khi đó thiết diện là tứ giác $IMB'D'$ và tứ giác này là hình thang. **Chọn B.**

Câu 38: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác (T). Khẳng định nào sau đây không sai?

A. (T) là hình chữ nhật..

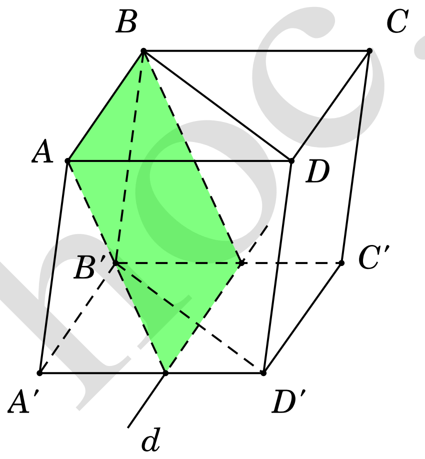
B. (T) là hình bình hành...

C. (T) là hình thoi.

D. (T) là hình vuông..

Lời giải.

Chọn B.



Giả sử mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và cắt hình hộp theo tứ giác (T).

Gọi d là đường thẳng giao tuyến của (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta chứng minh được $AB \,//\, d$ suy ra tứ giác (T) là một hình bình hành.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC; E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. .

B. .

C. .

D. .

Lời giải.

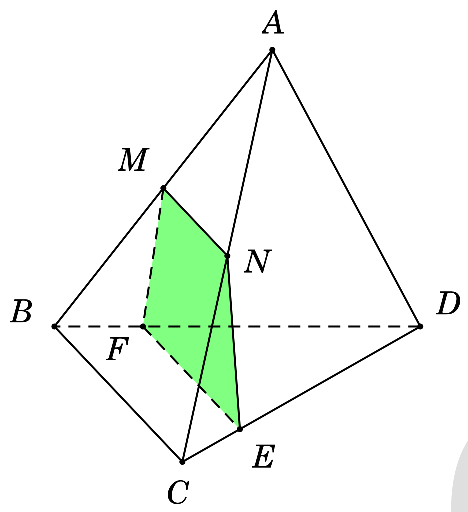
Chọn A.

Câu 40:

A. Tam giác MNE..
B. Tứ giác . $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.
C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$..
D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$..

Lời giải.

Chọn D.



Ta có E là điểm chung của hai mặt phẳng MNE và BCD.

Lại có $\begin{cases} MN \subset MNE \\ BC \subset BCD \\ MN // BC \end{cases} \longrightarrow$ Giao tuyến của hai mặt phẳng MNE và BCD là đường thẳng d đi qua điểm E và song song với BC và MN.

Trong mặt phẳng BCD, gọi $F = d \cap BC$.

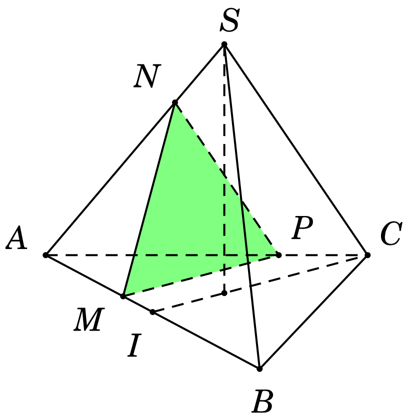
Khi đó thiết diện tạo bởi mặt phẳng MNE và tứ diện $ABCD$ là hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

Câu 41: Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng α song song với SIC. Thiết diện tạo bởi α với tứ diện $SABC$ là:

A. Tam giác cân tại M..
B. Tam giác đều..
C. Hình bình hành.
D. Hình thoi..

Lời giải.

Chọn A.



Gọi N, P lần lượt nằm trên các cạnh SA, AC sao cho $\begin{cases} MN \,//\, SI \\ MP \,//\, IC \end{cases}$.

$\longrightarrow MPN \,//\, SIC \longrightarrow MNP \equiv \alpha$. Vậy thiết diện là tam giác MNP.

Tứ diện $SABC$ đều nên tam giác SIC cân tại I.

Ngoài ra ta có $\frac{AM}{AI} = \frac{MP}{IP} = \frac{MN}{MP} \longrightarrow MN = MP$.

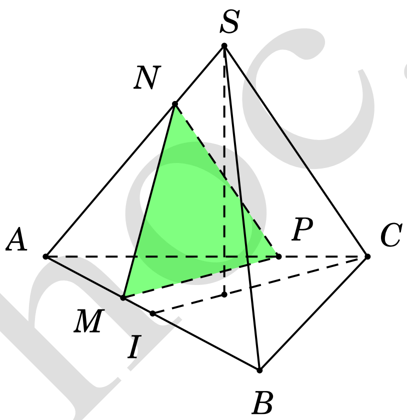
Suy ra tam giác MNP cân tại M. **Chọn A.**

Câu 42: Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng α song song với SIC. Tính chu vi của thiết diện tạo bởi α với tứ diện $SABC$, biết $AM = x$.

A. $x\ 1+\sqrt{3}$ .. **B.** $2x\ 1+\sqrt{3}$ .. **C.** $3x\ 1+\sqrt{3}$ .. **D.** Không tính được.

Lời giải.

Chọn B.



Để ý hai tam giác MNP và SIC đồng dạng với tỉ số $\frac{AM}{AI} = \frac{2x}{a}$

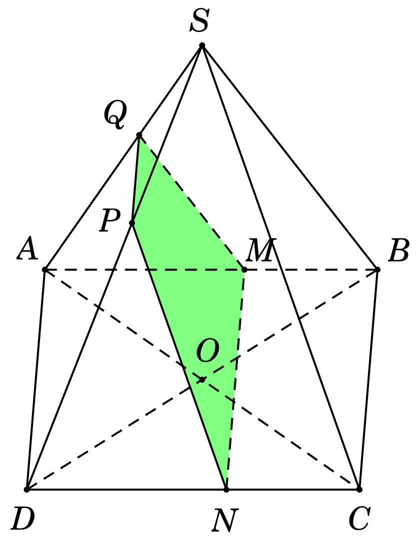
$$\rightarrow \frac{C_{MNP}}{C_{SIC}} = \frac{2x}{a} \Leftrightarrow C_{MNP} = \frac{2x}{a}\ SI + IC + SC\ = \frac{2x}{a}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + a\right) = 2x\ \sqrt{3}+1\ .$$

Câu 43: Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB. Qua M vẽ mặt phẳng α song song với SBC. Thiết diện tạo bởi α và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình tam giác.. **B.** Hình bình hành.. **C.** Hình thang.. **D.** Hình vuông..

Lời giải.

Chọn C.



Lần lượt lấy các điểm N, P, Q thuộc các cạnh CD, SD, SA thỏa $MN // BC$, $NP // SC$, $PQ // AD$. Suy ra $\alpha \equiv MNPQ$ và $\alpha // SBC$.

Theo cách dựng trên thì thiết diện là hình thang. **Chọn C.**

Câu 44:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Câu 45:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

Câu 46:

A. . **B.** . **C.** . **D.** .

Lời giải.

Chọn A.

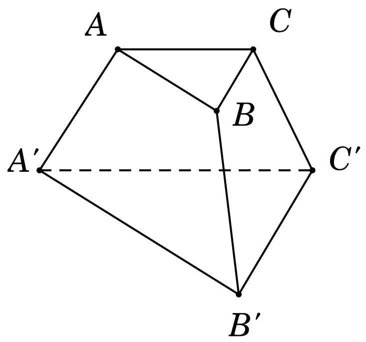
Dạng toán liên quan đến tỉ số

Câu 47: Cho hình chóp cụt tam giác $ABC.A'B'C'$ có 2 đáy là 2 tam giác vuông tại A và A' và có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$. Khi đó tỉ số diện tích $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. . **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. . **D.** 4. .

Lời giải.

Chọn B.



Hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có hai mặt đáy là hai mặt phẳng song song nên tam giác ABC đồng dạng tam giác $A'B'C'$ suy ra $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}.AB.AC}{\frac{1}{2}.A'B'.A'C'} = \frac{AB}{A'B'}.\frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{4}$.

Câu 48:

A. .　　**B.** .　　**C.** .　　**D.** .

Lời giải.

Chọn A.

BÀI KIỂM TRA TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng α và β song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong α đều song song với β .

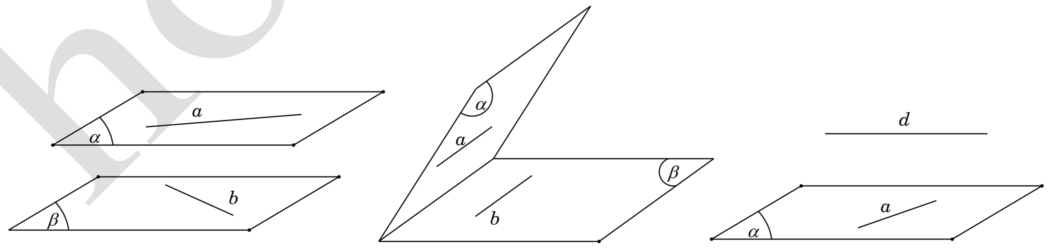
B. Nếu hai mặt phẳng α và β song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong α cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong β .

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng α và β phân biệt thì $a \,//\, \beta$.

D. Nếu đường thẳng d song song với $mp\ \alpha$ thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong $mp\ \alpha$.

Lời giải.

Chọn A.



Hình 1　　Hình 2　　Hình 3

Nếu hai mặt phẳng α và β song song với nhau thì hai đường thẳng bất kì lần lượt thuộc α và β có thể chéo nhau (Hình 1) $\Rightarrow$ Loại B.

Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng α và β phân biệt thì hai mặt phẳng α và β có thể cắt nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ Loại C.

Nếu đường thẳng d song song với $mp\ \alpha$ thì nó có thể chéo nhau với một đường thẳng nào đó nằm trong α . (Hình 3).

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a (các đỉnh lấy theo thứ tự đó), AC cắt BD tại O còn $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O'. Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BB', $C'D'$, DA sao cho $BM = C'N = DP = b$ $(0 < b < a)$. Khi đó mặt phẳng (MNP) sẽ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(A'OC')$ **B.** (BDC') **C.** (BDA') **D.** (BCD)

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ABD. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $(G_1G_2G_3)//(BCD)$ **B.** $(G_1G_2G_3)//(ACD)$

C. $(G_1G_2G_3)$ cắt (BCD) **D.** $(G_1G_2G_3)//(ABC)$

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Đường thẳng $B'C$ song song với mặt phẳng nào sau đây ?

A. (AHC'). **B.** $(AA'H)$. **C.** (HAB). **D.** $(HA'C')$.

Hướng dẫn giải:.

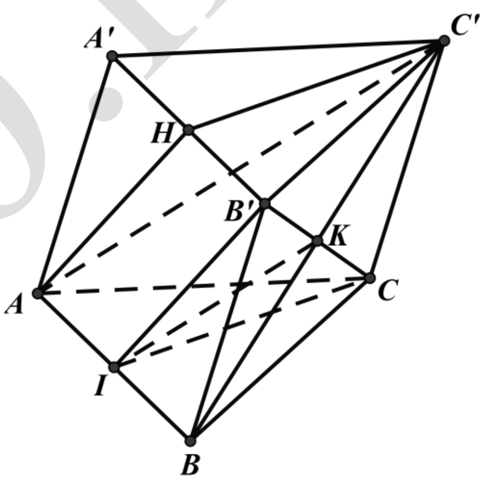
Chọn A.

Gọi K là giao điểm của $B'C$ và BC', I là trung điểm của AB.

Do $HB' = AI; HB'//AI$ nên $AHB'I$ là hình bình hành hay $AH//B'I$.

Mặt khác $KI//AC'$ nên $(AHC')//(B'CI)$.

Khi đó : $B'C//(AHC')$



Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD) .Thiết diện là hình gì?

A. Tam giác **B.** Hình thang **C.** Hình bình hành **D.** Tứ giác

Hướng dẫn giải::

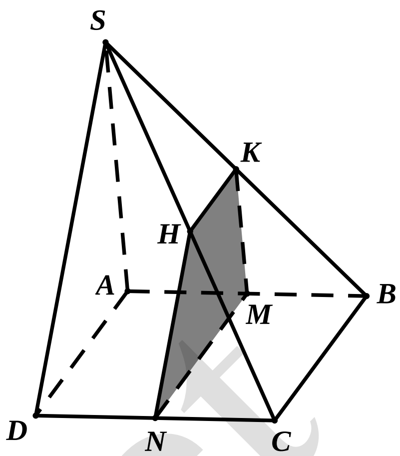
Ta có $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MK \parallel SA, K \in SB$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (SCD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel (SAD) \\ (SCD) \cap (SAD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = NH \parallel SD, H \in SC$.

Dễ thấy $HK = (\alpha) \cap (SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$

Ba mặt phẳng $(ABCD),(SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel HK$. Vậy thiết diện là một hình thang.



Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm AB. Mp$(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Hình thang. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật.

***Hướng dẫn giải:*.**

Chọn B.

$(IB'D') \cap (AA'B'B) = IB'$.

$(IB'D') \cap (A'B'C'D') = B'D'$.

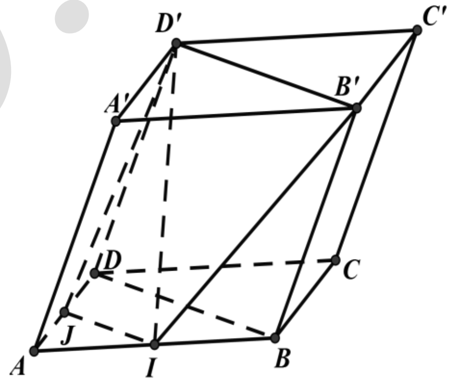
$\left.\begin{array}{l} I \in (IB'D') \cap (ABCD) \\ B'D' // BD \\ B'D' \subset (A'B'C'D') \\ BD \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow (IB'D') \cap (ABCD) = d$ với d là đường thẳng qua I và song song với BD.

Gọi J là trung điểm của AD.

Khi đó $(IB'D') \cap (ABCD) = IJ$.

$(IB'D') \cap (ADD'A') = JD'$.

Thiết diện cần tìm là hình thang $IJD'B'$ với $IJ // D'B'$.



Câu 6: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, qua M dựng mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (BCD). Tìm diện tích thiết diện của (P) và tứ diện

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ B. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$ C. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$ D. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Câu 7. Cho hai mặt phẳng song song P và Q. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên P và Q. Gọi I là trung điểm của MN. Chọn khẳng định đúng.

A. Tập hợp các điểm I là đường thẳng song song và cách đều P và Q.

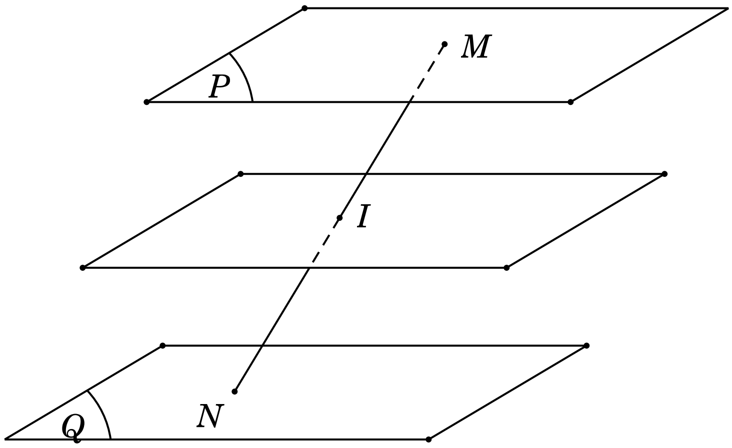
B. Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều P và Q.

C. Tập hợp các điểm I là một mặt phẳng cắt P.

D. Tập hợp các điểm I là một đường thẳng cắt P.

Lời giải.

Chọn B.



Ta có: I là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ I đến P bằng khoảng cách từ I đến Q

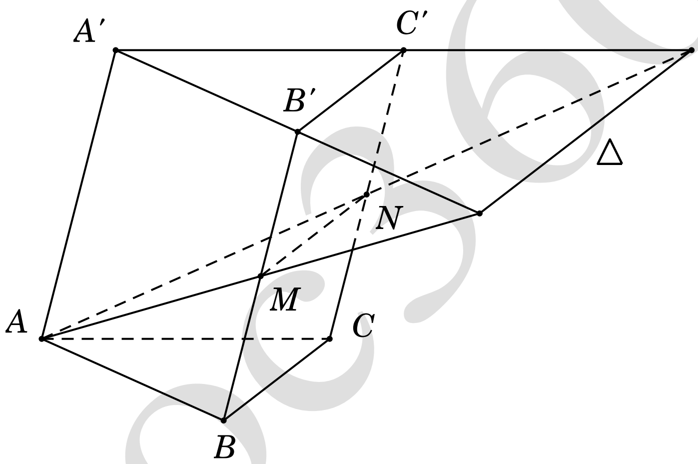
$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều P và Q .

Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng AMN và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\Delta \,//\, AB.$. **B.** $\Delta \,//\, AC.$. **C.** $\Delta \,//\, BC.$. **D.** $\Delta \,//\, AA'.$

Lời giải.

Chọn C.



Ta có $\begin{cases} MN \subset AMN \\ B'C' \subset A'B'C' \\ MN \,//\, B'C' \end{cases} \longrightarrow \Delta$ là giao tuyến của hai mặt phẳng AMN và $A'B'C'$ sẽ song song với MN và $B'C'$. Suy ra $\Delta \,//\, BC.$

Câu 9. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

A. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau. .

B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành..

C. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau..

D. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Lời giải.

Chọn C.

Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình hình hành, chúng bằng nhau nếu hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A^{'}B^{'}C^{'}$. Gọi G là trọng tâm tam giác $ABA^{'}$ và M là điểm tùy ý trên đường thẳng $B^{'}C^{'}$. Đường thẳng MG cắt mặt phẳng $\left(ABC\right)$ tại điểm N. Tính tỉ số $\dfrac{GM}{GN}$.

A. 3. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{3}$