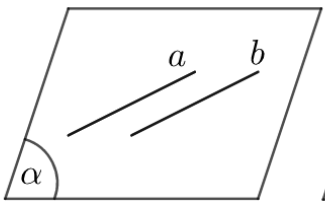
HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

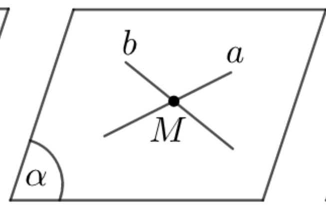
PHẦN 1 – LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

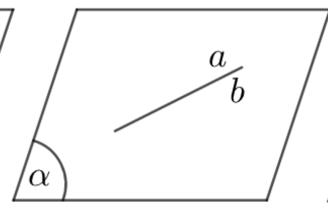
Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong các trường hợp sau:



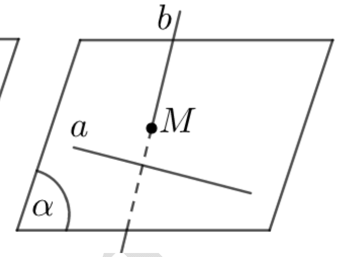
$a // b$



$a \cap b = M$



$a \equiv b$



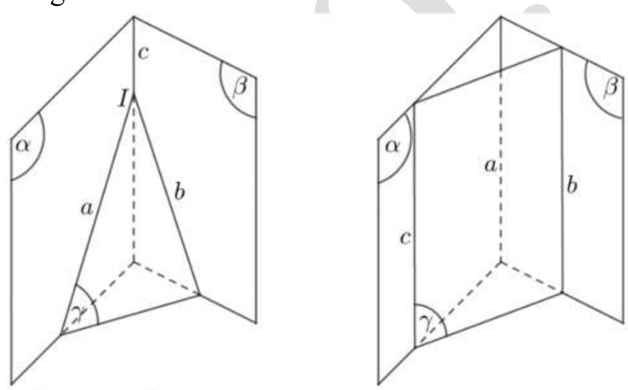
a và b chéo nhau

2. Tính chất

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lý 1: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



Hệ quả *(của định lý 1)*: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

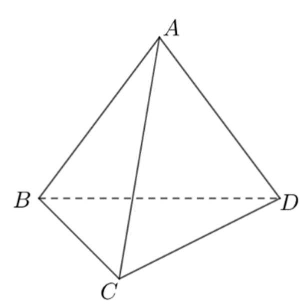
PHẦN 2 – CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1: *Chứng minh hai đường thẳng chéo nhau*

Phương pháp giải: Để chứng minh hai đường thẳng a và b chéo nhau, ta thường dùng phương pháp phản chứng, nghĩa là giả sử a và b không chéo nhau, rồi tìm ra điều mâu thuẫn so với giả thiết bài toán.

Ví dụ điển hình

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.



Hướng dẫn giải

Giả sử AB và CD không chéo nhau, nghĩa là hai đường thẳng này đồng phẳng.

Khi đó AB và CD có thể song song với nhau, cắt nhau tại một điểm hoặc trùng nhau (vô lý).

Vậy AB và CD chéo nhau.

Dạng 2: *Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng a và b song song với nhau.*

Phương pháp giải: Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng, từ đó kết luận giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng Δ, với $M \in \Delta$ và $\Delta // a // b$.

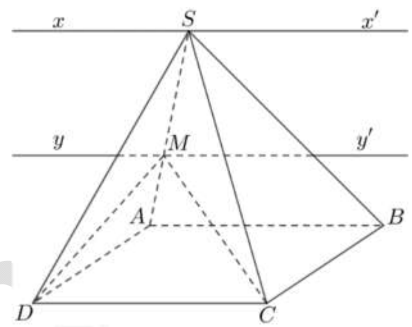
Ví dụ điển hình

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) (SAD) và (SBC).

b) (MCD) và (SAB), với M là một điểm bất kì thuộc cạnh SA.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = xx'$, với $S \in xx'$ và $xx' // AB // CD$.

b) Ta có: $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (MCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (MCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

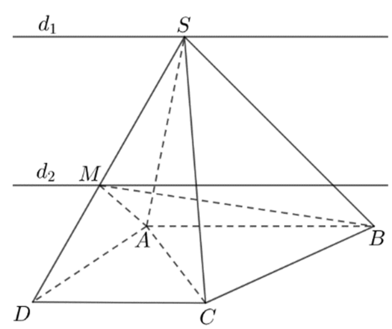
$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = yy'$, với $yy' // AB // CD$ và $M \in yy'$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng SD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) $d_1 = (SAB) \cap (SCD)$.

b) $d_2 = (SCD) \cap (MAB)$. Từ đó chứng minh $d_1 // d_2$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d_1$, với $S \in d_1$ và $d_1 // AB // CD$ (1).

b) Ta có: $\begin{cases} M \in (MAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (MAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

$\Rightarrow (MAB) \cap (SCD) = d_2$, với $M \in d_2$ và $d_2 // AB // CD$ (2).

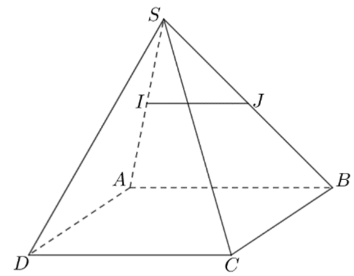
Từ (1) và (2) suy ra: $d_1 // d_2$.

Dạng 3: *Chứng minh hai đường thẳng a và b song song với nhau.*

Phương pháp giải: Dựa vào hình học phẳng: Định lý Ta-lét đảo, đường trung bình...; hoặc đưa về dạng $a // c$ và $b // c$, từ đó suy ra $a // b$.

Ví dụ điển hình:

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Chứng minh rằng $IJ//AB$, từ đó suy ra $IJ//CD$.



Hướng dẫn giải

Vì I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB nên IJ là đường trung bình của tam giác SAB. Từ đó suy ra $IJ//AB$.

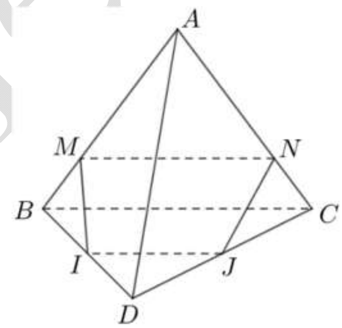
Lại có $AB//CD$ nên từ đó ta có $IJ//CD$ (vì cùng song song với đường thẳng AB).

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$; I, J lần lượt là trung điểm của BD, CD.

a) Chứng minh rằng $MN//BC$.

b) Tứ giác $MNJI$ là hình gì. Tìm điều kiện để tứ giác $MNJI$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$, từ đó suy ra $MN//BC$ (1) (Định lý Ta-lét đảo).

b) Vì I, J lần lượt là trung điểm của BD, CD nên IJ là đường trung bình của tam giác BCD. Từ đó suy ra $IJ//BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MN//IJ$. Vậy tứ giác $MNJI$ là hình thang.

Để $MNJI$ là hình bình hành thì $MI//NJ$. Lại có ba mặt phẳng $(MNJI)$, (ABD), (ACD) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MI, NJ, AD nên theo định lý 1 ta có $MI//AD//NJ$. Từ đó suy ra điều kiện để hình thang $MNJI$ trở thành hình bình hành là M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

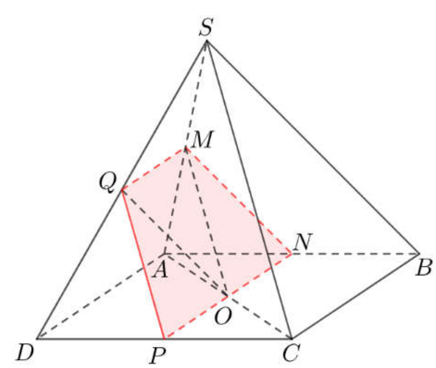
Dạng 4: *Thiết diện chứa một điểm M và song song với hai đường thẳng a và b chéo nhau.*

Phương pháp giải: Qua điểm M ta lần lượt kẻ các đường thẳng $d_1//a$ và $d_2//b$. Sau đó tìm giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng (d_1,d_2) với các mặt của hình chóp.

Ví dụ điển hình:

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SA. Tìm thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp $S.ABCD$, biết (P) là mặt phẳng qua điểm M và song song với SC, AD.

Hướng dẫn giải



Qua M kẻ các đường thẳng $MQ//AD$ $(Q\in SD)$ và $MO//SC$ $(O\in AC)$.

Ta có: SC và AD lần lượt song song với mặt phẳng (OMQ) nên $(OMQ)\equiv(P)$.

Dễ dàng tìm được $(OMQ)\cap(ABCD)=NP$, với $NP//MQ//BC$ và $O\in NP$. Từ đó ta có:

$\begin{cases}(OMQ)\cap(SAD)=MQ\\(OMQ)\cap(SCD)=QP\\(OMQ)\cap(ABCD)=PN\\(OMQ)\cap(SAB)=NM\end{cases}$, vậy thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp là hình thang $MNPQ$.

Dạng 5: *Thiết diện chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng khác.*

Phương pháp giải:

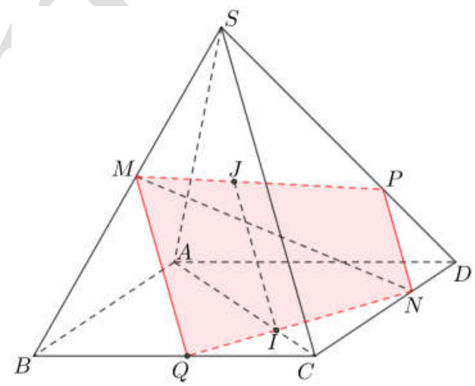
Ví dụ điển hình:

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên SB, CD và (P) là mặt phẳng qua MN và song song với SC.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng (SCD), (SBC), (SAC).

b) Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P).

Hướng dẫn giải



a) Qua N kẻ $NP//SC$ $(P\in SD)$.

Ta có: $\begin{cases}NP//SC\\NP\subset(MNP)\\SC\not\subset(MNP)\end{cases}\Rightarrow SC//(MNP)$.

Từ đó ta có: (MNP) là mặt phẳng qua MN và song song với SC.

Vậy $(P)\equiv(MNP)$.

Ta có: $(P)\cap(SCD)=NP$.

Ta có: $\begin{cases}M\in(MNP)\cap(SBC)\\NP\subset(MNP),\ SC\subset(SBC)\\NP//SC\end{cases}\Rightarrow(MNP)\cap(SBC)=MQ$, với $MQ//SC//NP$, $M\in MQ$ và $Q\in BC$.

Trong $(ABCD)$ gọi $I=QN\cap AC$.

Ta có: $\begin{cases}I\in(MNP)\cap(SAC)\\NP\subset(MNP),\ SC\subset(SAC)\\NP//SC\end{cases}\Rightarrow(MNP)\cap(SAC)=IJ$, với $IJ//SC//NP$, $I\in IJ$ và $J\in MP$.

b) Dễ thấy thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp là tứ giác $MPNQ$.

BÀI TẬP KIỂM TRA

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc đoạn thẳng AB, AC (I, J không trùng với hai đầu đoạn thẳng). Chứng minh rằng:

a) AB và CD chéo nhau, AC và BD chéo nhau.

b) IJ và lần lượt chéo nhau với các đường thẳng AD, BD, CD.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD và CD. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (AMN) và (ABC).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD. Tìm giao tuyến của (AIJ) và (ACD).

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, BC. Chứng minh $MH // SC$; $MN // AB // CD$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Chứng minh $MN // CD$.

b) Tìm giao điểm P của SC và (AND).

c) Kéo dài AN cắt DP tại I. Chứng minh $SI // AB // CD$. Tứ giác $SABI$ là hình gì?

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) Chứng minh $MSNR$ là hình bình hành.

b) Chứng minh MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$ và M thuộc AB. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với BC, AD. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và tứ diện, thiết diện là hình gì?

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của CD. Mặt phẳng (P) qua M, song song với SA và BC. Tìm thiết diện và cho biết thiết diện là hình gì?

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi (P) là mặt phẳng qua CD, cắt SA và SB tại M và N.

a) Chứng minh tứ giác $DCMN$ là hình thang.

b) Gọi I là giao điểm của MC và DN. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC; K là một điểm trên cạnh BD sao cho $KD < KB$.

a) Tìm giao tuyến của (IJK) và (ACD). b) Tìm giao tuyến của (IJK) và (ABD).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD; P là điểm trên SC sao cho $SP > PC$.

a) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAC). b) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAB).

c) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAD). d) Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, BC.

a) Chứng minh $MN // CD$ và $NH // (SCD)$.

b) Tìm giao tuyến của (MNH) và $(ABCD)$.

c) Tìm giao tuyến của (MNH) và (NAC).

Bài 4. Cho tam giác ABC nằm trong mặt phẳng (P). Gọi Bx, Cy là hai tia song song với nhau và nằm về cùng phía đối với mặt phẳng (P); M và N là 2 điểm di động lần lượt trên Bx, Cy sao cho $CN = 2BM$.

a) Chứng minh rằng MN luôn đi qua điểm cố định I.

b) Gọi E là điểm thuộc đoạn AM và $EM = \frac{1}{3}EA$; F là giao điểm của IE và AN; Q là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng $AQ//Bx//Cy$ và mặt phẳng (QMN) luôn chứa một đường thẳng cố định khi M, N di động.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là là các điểm thuộc các đoạn thẳng BC, SC, SD, AD sao cho $MN//SB$, $NP//CD$, $MQ//CD$.

a) Chứng minh $PQ//SA$.

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh $SK//AD//BC$.

c) Qua Q dựng $Qx//SC$, $Qy//SB$. Tìm giao điểm của Qx và mặt phẳng (SAB); giao điểm của Qy và mặt phẳng (SCD).

Bài 6. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong mặt phẳng. Trên hai đường thẳng chéo AC và BF lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM : AC = BN : BF = 1:3$. Chứng minh $MN//DE$.

Bài 7. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong mặt phẳng. Trên hai đường thẳng chéo AC và BF lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM : AC = BN : BF = 5$. Dựng các đường thẳng $MM'//AB$ với M' trên AD; $NN'//AB$ với N' trên AF.

a) Chứng minh $MM'//CD$ và $NN'//CD$. b) Chứng minh $M'N'//DF$.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) Mặt phẳng (P) qua M và song song với SO và AD.

b) Mặt phẳng (P) qua O và song song với AM và SC.

PHẦN 3 – CÁC DẠNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Hướng dẫn giải

Chọn A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng có thể song song với nhau (khi chúng đồng phẳng) hoặc chéo nhau (khi chúng không đồng phẳng).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.

B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.

C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

• A sai. Trong trường hợp 2 đường thẳng cắt nhau thì chúng chỉ có 1 điểm chung.

• B và C sai. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.

C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.

D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.

B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.

C. Hai đường thẳng song song với nhau thì có thể chéo nhau.

D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 5: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai đường thẳng AD và BC?

A. Có thể song song hoặc cắt nhau. **B.** Cắt nhau.

C. Song song với nhau. **D.** Chéo nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì a và b chéo nhau nên bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng, từ đó dẫn đến AD và BC chéo nhau.

Câu 6: Cho ba mặt phẳng phân biệt (α), (β), (γ) có $(\alpha)\cap(\beta)=d_1$; $(\beta)\cap(\gamma)=d_2$; $(\alpha)\cap(\gamma)=d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3:

A. Đôi một cắt nhau. **B.** Đôi một song song.

C. Đồng quy. **D.** Đôi một song song hoặc đồng quy.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dựa vào định lý 1.

Câu 7: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c, biết $a // b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c:

A. Trùng nhau hoặc chéo nhau. **B.** Cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Chéo nhau hoặc song song. **D.** Song song hoặc trùng nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 8: Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a // b$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a // c$ thì $b // c$.

B. Nếu c cắt a thì c cắt b.

C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.

D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

c có thể chéo nhau với b.

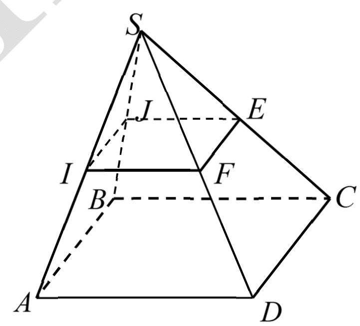
Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào **không song song** với IJ?

A. EF. **B.** DC. **C.** AD. **D.** AB.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Ta có IJ là đường trung bình tam giác SAB nên $IJ // AB$, nên **D.** đúng.

$ABCD$ là hình bình hành nên $AB // CD$. Suy ra $IJ // CD$. Nên **B.** đúng.

EF là đường trung bình tam giác SCD nên $EF // CD$. Suy ra $IJ // EF$, nên **A.** đúng.

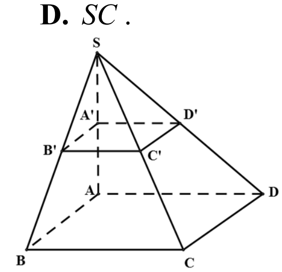
Do đó chọn đáp án. **C.**

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC và SD. Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào **không song song** với $A'B'$?

A. AB. **B.** CD. **C.** $C'D'$. **D.** SC.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $A'B'$ sẽ song song với các đường thẳng AB, CD và $C'D'$. Do vậy các phương án A, B và C đều sai.

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AB'C'D$ và $A'BCD'$ là hai hình bình hành có chung một đường trung bình.

B. BD' và $B'C'$ chéo nhau.

C. $A'C$ và DD' chéo nhau.

D. DC' và AB' chéo nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

DC' và AB' song song với nhau.

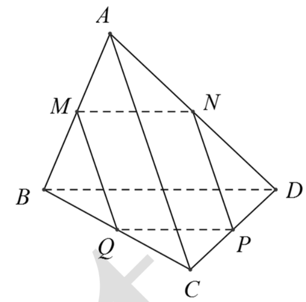
Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, CD, BC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $MN // BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$. **B.** $MN // PQ$ và $MN = PQ$.

C. $MNPQ$ là hình bình hành. **D.** MP và NQ chéo nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Có MN, PQ lần lượt là đường trung bình tam giác ABD, BCD

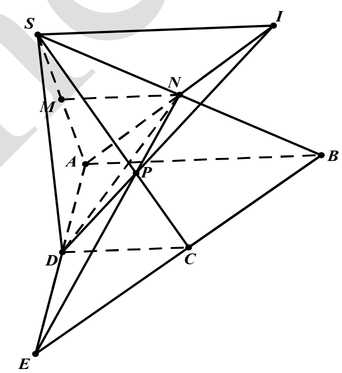
nên $\begin{cases} MN // BD, MN = \dfrac{1}{2}BD \\ PQ // BD, PQ = \dfrac{1}{2}BD \end{cases}$.

Nên $MN // PQ, MN = PQ$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Do đó MP và NQ cùng thuộc mặt phẳng $MNPQ$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB.



a) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

A. MN song song với CD.

B. MN chéo với CD.

C. MN cắt với CD.

D. MN trùng với CD.

b) Gọi P là giao điểm của SC và (ADN), I là giao điểm của AN và DP. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. SI song song với CD.

B. SI chéo với CD.

C. SI cắt với CD.

D. SI trùng với CD.

Hướng dẫn giải:

a) **Chọn A.**

Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN // AB$.

Lại có $ABCD$ là hình thang $\Rightarrow AB // CD$.

Vậy $\begin{cases} MN // AB \\ CD // AB \end{cases} \Rightarrow MN // CD$.

b) **Chọn A.**

Trong $(ABCD)$ gọi $E = AD \cap BC$, trong (SCD) gọi $P = SC \cap EN$.

Ta có $E \in AD \subset (ADN) \Rightarrow EN \subset (AND) \Rightarrow P \in (ADN)$.

Vậy $P = SC \cap (ADN)$.

Do $I = AN \cap DP \Rightarrow \begin{cases} I \in AN \\ I \in DP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAB) \\ I \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Ta có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI // CD$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC. Biết $AD = a, BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q.

a) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. MN song song với PQ.

B. MN chéo với PQ.

C. MN cắt với PQ.

D. MN trùng với PQ.

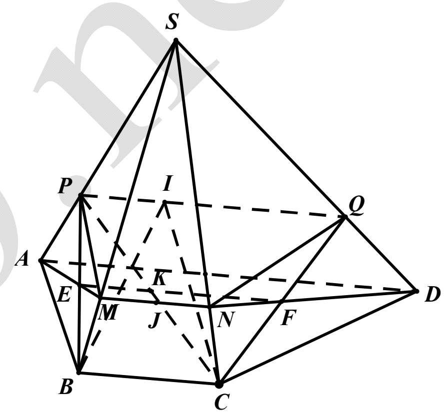
b) Giải sử AM cắt BP tại E; CQ cắt DN tại F. Chứng minh EF song song với MN và PQ. Tính EF theo a, b.

A. $EF = \frac{1}{2}(a+b)$. **B.** $EF = \frac{3}{5}(a+b)$. **C.** $EF = \frac{2}{3}(a+b)$. **D.** $EF = \frac{2}{5}(a+b)$

Hướng dẫn giải:

a) **Chọn A.**

Ta có $I \in (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (IBC)$.



Vậy $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (IBC) \\ AD // BC \\ (SAD) \cap (IBC) = PQ \end{cases}$

$\Rightarrow PQ // AD // BC \quad (1)$.

Tương tự $J \in (SBC) \Rightarrow J \in (SBC) \cap (ADJ)$

Vậy $\begin{cases} AD \subset (ADJ) \\ BC \subset (SBC) \\ AD // BC \\ (SBC) \cap (ADJ) = MN \end{cases}$

$\Rightarrow MN // AD // BC \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $MN // PQ$.

b) **Chọn D.**

Ta có $E = AM \cap BP \Rightarrow \begin{cases} E \in (AMND) \\ E \in (PBCQ) \end{cases}$; $F = DN \cap CQ \Rightarrow \begin{cases} F \in (AMND) \\ F \in (PBCQ) \end{cases}$

Do đó $EF = (AMND) \cap (PBCQ)$. Mà $\begin{cases} AD // BC \\ MN // PQ \end{cases} \Rightarrow EF // AD // BC // MN // PQ$.

Tính EF: Gọi $K = CP \cap EF \Rightarrow EF = EK + KF$

Ta có $EK // BC \Rightarrow \frac{EK}{BC} = \frac{PE}{PB} \quad (1)$, $PM // AB \Rightarrow \frac{PE}{EB} = \frac{PM}{AB}$

Mà $\frac{PM}{AB} = \frac{SP}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{PE}{EB} = \frac{2}{3}$.

Từ (1) suy ra $\frac{EK}{BC} = \frac{PE}{PB} = \frac{PE}{PE + EB} = \frac{1}{1 + \frac{EB}{PE}} = \frac{2}{5} \Rightarrow EK = \frac{2}{5} BC = \frac{2}{5} b$

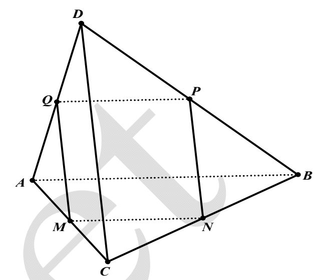
Tương tự $KF = \frac{2}{5}a$. Vậy $EF = EK + KF = \frac{2}{5}(a+b)$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AC, BC, BD, AD. Tìm điều kiện để $MNPQ$ là hình thoi.

A. $AB = BC$. **B.** $BC = AD$. **C.** $AC = BD$. **D.** $AB = CD$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có: MN song song với PQ vì cùng song song với AB, MQ song song với PN vì cùng song song với CD nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Tứ giác $MNPQ$ là hình thoi khi $MQ = PQ \Leftrightarrow AB = CD$.

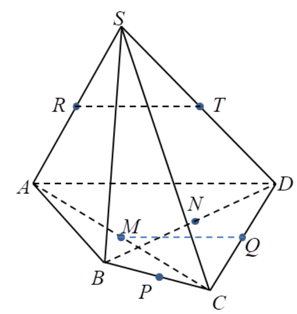
Dạng 3. Chứng minh bốn điểm đồng phẳng, ba đường đồng quy.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD. Bốn điểm nào sau đây đồng phẳng?

A. M, P, R, T. **B.** M, Q, T, R. **C.** M, N, R, T. **D.** P, Q, R, T.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Ta có RT là đường trung bình của tam giác SAD nên $RT // AD$.

MQ là đường trung bình của tam giác ACD nên $MQ // AD$.

Suy ra $RT // MQ$. Do đó M, Q, R, T đồng phẳng.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC và SD.

a) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. ME, NF, SO đôi một song song (O là giao điểm của AC và BD).

B. ME, NF, SO không đồng quy (O là giao điểm của AC và BD).

C. ME, NF, SO đồng quy (O là giao điểm của AC và BD).

D. ME, NF, SO đôi một chéo nhau (O là giao điểm của AC và BD).

b) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

B. Bốn điểm M, N, E, F không đồng phẳng.

C. MN, EF chéo nhau.

D. Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

a) **Chọn C.**

Trong (SAC) gọi $I = ME \cap SO$, dễ thấy I là trung điểm của SO, suy ra FI là đường trung bình của tam giác SOD.

Vậy $FI // OD$.

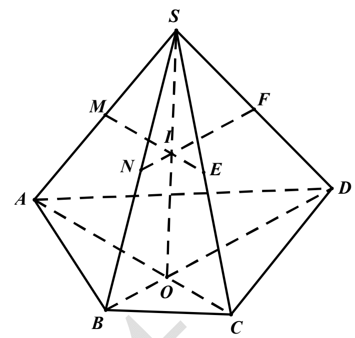
Tương tự ta có $NI // OB$ nên N, I, F thẳng hàng hay $I \in NF$.

Vậy minh ME, NF, SO đồng quy.

b) **Chọn A.**

Do $ME \cap NF = I$ nên ME và NF xác định một mặt phẳng.

Suy ra M, N, E, F đồng phẳng.



Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, AD, BC, CD. Bốn điểm nào sau đây đồng phẳng?

A. P, Q, R, S. **B.** M, N, R, S. **C.** M, N, P, Q. **D.** M, P, R, S.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Do PQ là đường trung bình của tam giác $ABD \Rightarrow PQ // BD$.

Tương tự, ta có $RS // BD$. Vậy $PQ // RS \Rightarrow P, Q, R, S$ cùng nằm trên một mặt phẳng.

Các bộ bốn điểm M, N, R, S; M, N, P, Q và M, P, R, S đều không đồng phẳng.