

CHUYÊN ĐỀ: ELIP

I: LÝ THUYẾT

1. Nếu $M \in (E)$ thì $F_1M + F_2M = 2a$

2. Phương trình chính tắc (PTCT) của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$)

a) $a^2 = b^2 + c^2$

b) Tiêu điểm: $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$

c) * Đỉnh trục lớn: $A_1(-a; 0), A_2(a; 0)$

* Đỉnh trục nhỏ: $B_1(0; -b), B_2(0; b)$

d) * Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a$

* Độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$

e) Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$

g) PT cạnh hình chữ nhật cơ sở: $x = \pm a, y = \pm b$

II: PHƯƠNG PHÁP LÀM BÀI TẬP

1. Xác định các thành phần của elip khi biết PTCT của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

B1: Tìm a, b và $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

B2: Liệt kê các thành phần của elip

Bài 1: Cho PTCT của (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Xác định độ dài các trục, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ

các đỉnh và tiêu điểm của (E)

Giải: Ta có: $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$ suy ra: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

a) Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a = 2.5 = 10$, Độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b = 2.4 = 8$

b) Tiêu điểm: $F_1(-3; 0), F_2(3; 0)$

c) Đỉnh trục lớn: $A_1(-5; 0), A_2(5; 0)$, Đỉnh trục nhỏ: $B_1(0; -4), B_2(0; 4)$

d) Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = 2.3 = 6$

Bài 2: Cho elip (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$. Xác định độ dài các trục, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh và tiêu điểm của (E)

Giải: Từ (E): $4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (chia 2 vế cho 36)

Ta có: $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ suy ra: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

a) Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a = 2.3 = 6$, Độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b = 2.2 = 4$

b) Tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$

c) Đỉnh trục lớn: $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, Đỉnh trục nhỏ: $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$

d) Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{5}$

2. Lập PTCT của elip

B1: Tìm a và b (hoặc a^2 và b^2)

Vdct liên quan: $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = c^2 + b^2 \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}$ **Chú ý:** $a > b > 0$

B2: Thay a, b (hoặc a^2 và b^2) vào PTCT của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Bài 2: Lập PTCT của (E), biết:

a) Độ dài 2 trục lớn và nhỏ lần lượt là 10 và 8

b) Độ dài trục lớn bằng 12 và tiêu cự bằng 6

c) Có 1 tiêu điểm $F_1(-\sqrt{2}; 0)$ và đi qua điểm $M(\sqrt{2}; 1)$

d) Đi qua điểm $A(2; -\frac{5}{3})$ và tỉ số $\frac{c}{a}$ bằng $\frac{2}{3}$

e) Độ dài trục lớn bằng 26 và tỉ số $\frac{c}{a}$ bằng $\frac{5}{13}$

f) Độ dài trục lớn bằng 12 và đi qua $M(-2\sqrt{5}; 2)$

Giải: a) Ta có: $2a = 10 \Rightarrow a = 5$ và $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

Vậy: PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) Ta có: $2a = 12 \Rightarrow a = 6$ và $2c = 6 \Rightarrow c = 3$ Suy ra: $b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$

Vậy: PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

c) Từ tiêu điểm $F_1(-\sqrt{2}; 0) \Rightarrow c = \sqrt{2}$. Gọi PTCT của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có: $M(\sqrt{2}; 1) \in (E)$, nên: $\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ mà $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 2$

Suy ra: $\frac{2}{b^2+2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 2b^2 + b^2 + 2 = b^2(b^2 + 2) \Leftrightarrow b^4 - b^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = -1(\text{loại}) \\ b^2 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 = 2 + 2 = 4$. Vậy: PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

d) Gọi PTCT của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ta có: $A(2; -\frac{5}{3}) \in (E)$, nên: $\frac{4}{a^2} + \frac{\frac{25}{9}}{b^2} = 1$

Từ tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow c = \frac{2}{3}a$ mà $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \frac{4}{9}a^2 = \frac{5}{9}a^2$

Suy ra: $\frac{4}{a^2} + \frac{\frac{25}{9}}{\frac{5}{9}a^2} = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{5}{9}a^2 + \frac{25}{9}a^2 = a^2 \cdot \frac{5}{9}a^2 \Leftrightarrow \frac{5}{9}a^4 - 5a^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ a^2 = 0(\text{loại}) \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 = \frac{5}{9}a^2 = \frac{5}{9} \cdot 9 = 5$. Vậy: PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

e) Ta có: $2a = 26 \Rightarrow a = 13$ và tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{5}{13} \Rightarrow c = \frac{5}{13}a = \frac{5}{13} \cdot 13 = 5$

Suy ra: $b^2 = a^2 - c^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$. Vậy: PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

f) Ta có: $2a = 12 \Rightarrow a = 6$

Gọi PTCT của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ta có: $M(-2\sqrt{5}; 2) \in (E)$, nên: $\frac{20}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{20}{36} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 20b^2 + 144 = 36b^2 \Leftrightarrow 16b^2 = 144 \Leftrightarrow b^2 = 9$

Vậy: PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

Bài 3: Lập PTCT của (E), biết:

a) Đi qua 2 điểm $E(0; 1)$ và $F\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) Đi qua 2 điểm $M\left(4; \frac{9}{5}\right)$ và $N\left(3; \frac{12}{5}\right)$

Giải: a) Gọi PTCT của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có: $E(0; 1)$ và $F\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E)$, ta có hệ:
$$\begin{cases} \frac{0}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{\frac{3}{4}}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

Vậy: PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

b) Gọi PTCT của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có: $M\left(4; \frac{9}{5}\right)$ và $N\left(3; \frac{12}{5}\right) \in (E)$, ta có hệ:
$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{\frac{81}{25}}{b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{\frac{144}{25}}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{25} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases}$$

Vậy: PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Bài 4: Cho (E): $9x^2 + 25y^2 = 225$. Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho M nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông

Giải: Ta có: $9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Suy ra: $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

M nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông $\Rightarrow M \in$ đường tròn (C) tâm O và bán kính bằng $c = 4$

\Rightarrow PT đường (C) là: $x^2 + y^2 = 16$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{175}{16} \\ y^2 = \frac{81}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4} \\ y = \pm \frac{9}{4} \end{cases}$$

Vậy: $M_{1,2}\left(\pm \frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{4}\right)$ và $M_{3,4}\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; \pm \frac{9}{4}\right)$

Bài 5: Viết PTCT của (E) đi qua điểm $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và điểm M nhìn 2 tiêu điểm dưới 1 góc vuông.

Giải: Điểm M nhìn 2 tiêu điểm dưới 1 góc vuông $\Leftrightarrow c = OM \Leftrightarrow c^2 = OM^2$

$\Leftrightarrow c^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{5}} - 0\right)^2 = 5$ Gọi PTCT của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có: $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \in (E)$, nên: $\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$ mà $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 5$

Suy ra: $\frac{9}{b^2 + 5} + \frac{16}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{5}b^2 + \frac{16}{5}(b^2 + 5) = b^2(b^2 + 5) \Leftrightarrow \frac{9}{5}b^2 + \frac{16}{5}b^2 + 16 = b^4 + 5b^2$

$\Leftrightarrow b^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 4 \\ b^2 = -4(\text{loại}) \end{cases}$ suy ra: $a^2 = b^2 + 5 = 4 + 5 = 9$

Vậy: PTCT của (E) là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Xác định độ dài các trục, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh và tiêu điểm của (E), biết:

a) (E): $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) (E): $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

c) (E): $x^2 + 5y^2 = 5$

d) $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$

Bài 2: Lập PTCT của (E), biết:

a) Độ dài 2 trục lớn và nhỏ lần lượt là 20 và 8

- b) Độ dài trục lớn bằng 14 và tiêu cự bằng 10
- c) Có 1 tiêu điểm $F_1(-3; 0)$ và đi qua điểm $M(-2; \sqrt{2})$
- d) Đi qua điểm $A(-2; 12)$ và tỉ số $\frac{c}{a}$ bằng $\frac{1}{2}$
- e) Tiêu cự bằng 6 và tỉ số $\frac{c}{a}$ bằng $\frac{3}{5}$
- f) Độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{5}$ và đi qua $M(\sqrt{15}; -1)$

Bài 3: Lập PTCT của (E), biết:

- a) Đi qua 2 điểm $E(0; 3)$ và $F\left(3; -\frac{12}{5}\right)$
- b) Đi qua 2 điểm $M(4; -\sqrt{3})$ và $N(2\sqrt{2}; 3)$
- c) Đi qua 2 điểm $A(2; 1)$ và $B\left(\sqrt{5}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- d) Đi qua 2 điểm $E(3; 0)$ và $F\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; 2\right)$

Bài 4: Cho (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho $MF_1 = 2MF_2$

Bài 5: Cho (E): $7x^2 + 16y^2 = 112$. Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho M nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông

Bài 6: Viết PTCT của (E) đi qua điểm $M\left(\frac{5}{\sqrt{13}}; -\frac{12}{\sqrt{13}}\right)$ và điểm M nhìn 2 tiêu điểm dưới 1 góc vuông.