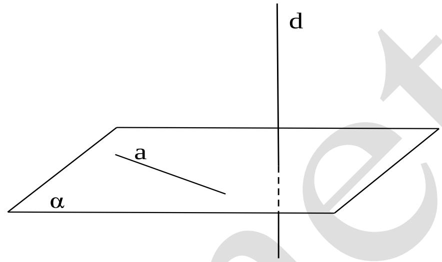
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN
ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. Định nghĩa:

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó:

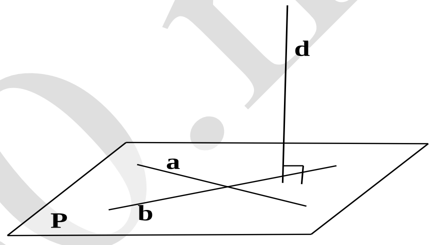
$$d\perp mp(\alpha)\Leftrightarrow d\perp a,\forall a\subset(\alpha)$$



II. Các định lý:

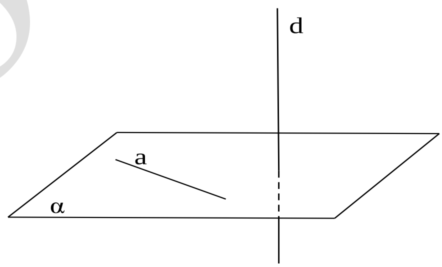
Định lý 1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P):

$$\begin{cases} d\perp a\ , d\perp b\\ a\ ,b\subset(P)\\ a\ ,b\ \text{ cắt nhau}\end{cases}\Rightarrow d\perp(P)$$



Định lý 2: (Ba đường vuông góc)

Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).



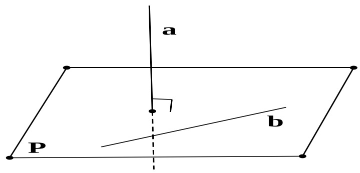
PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Để chứng minh $a\perp b$ ta thường sử dụng những phương pháp chứng minh sau:

1. Sử dụng các phương pháp Hình học phẳng: Góc nội tiếp, Định lí Pitago đảo, . . .
3. Sử dụng phương pháp tích vô hướng của hai véctơ: nếu $\vec{a}.\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow a\perp b$ $(\vec{a},\vec{b}$ là hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b).
4. Sử dụng tính chất bắc cầu: $\begin{cases} c\perp b\\ c\ //\ a\end{cases}\Rightarrow \quad a\perp b$

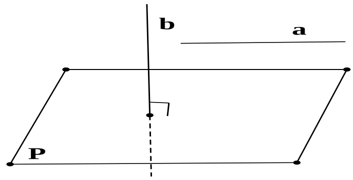
5. Tìm một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b. Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), thì $a \perp b$:

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$



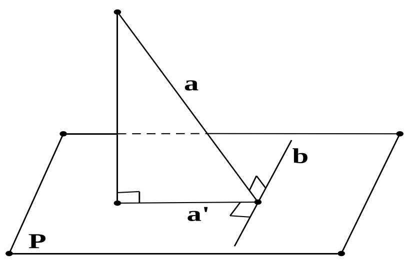
6. Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P), thì suy ra $a \perp b$:

$$\begin{cases} a \,//\, (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$



7. Áp dụng định lí 3 đường vuông góc:

a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P) $, b \subset (P)$. *Đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b khi và chỉ khi b vuông góc với a'. Nói ngắn gọn b vuông góc với hình chiếu thì b vuông góc với đường xiên.*



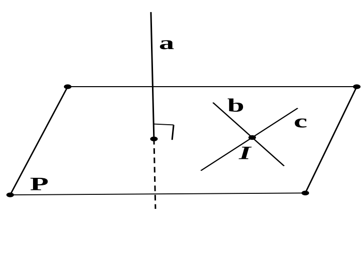
ĐÂY LÀ PHƯƠNG PHÁP RẤT HAY SỬ DỤNG! Các bạn phải thành thạo phương pháp này.

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

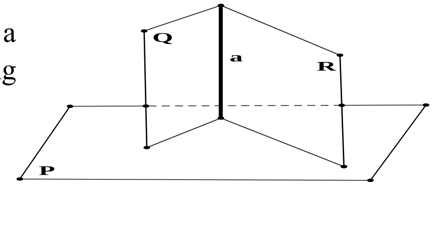
Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta thường sử dụng các phương pháp sau:

1). Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P). Ta phải chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P).

$$\begin{cases} a \perp b \text{ vaø } a \perp c \\ b \cap c \neq I \\ b; c \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

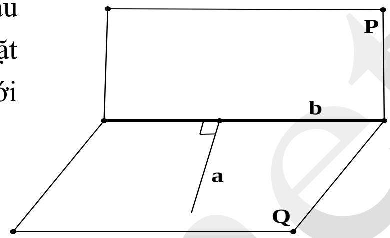


2). Hai mặt phẳng (Q) và (R) có giao tuyến a cùng vuông góc với mặt phẳng (P), thì a vuông góc với (P).



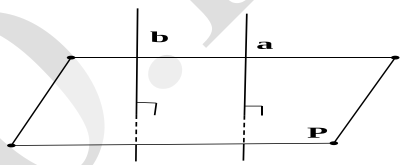
$$\begin{cases}(Q)\perp(P)\\(R)\perp(P)\\(Q)\cap(R)=a\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

3). Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến b. Một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (Q) vuông góc với b, thì a vuông góc với mặt phẳng (P).



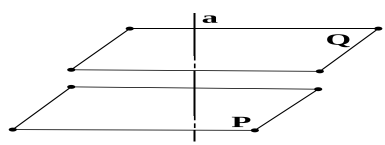
$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=b\\a\subset(Q)\\a\perp b\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

4). Chứng minh đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) , đường thẳng a song song với b ,suy ra a vuông góc với (P).



$$\begin{cases}a\,//\,b\\b\perp(P)\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

5). Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q), mặt phẳng (P) song song với (Q), nên a vuông góc với (P).



$$\begin{cases}a\perp(Q)\\(Q)\,//\,(P)\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

Hai trụ cột để giải toán của dạng này :

– Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P), ta phải chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P).

– Khi đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với **mọi đường** thuộc mặt phẳng (P).

BÀI TẬP

Câu 1: Hai tam giác cân ABC và DBC nằm trong hai mp khác nhau tạo nên tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của BC.

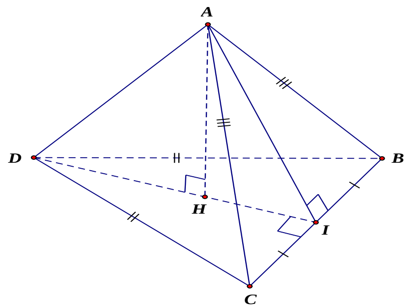
a). Chứng minh $BC\perp AD$.

b). Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh AH $\perp$ (BCD).

LỜI GIẢI

a). Chứng minh BC $\perp$ AD.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AI \perp BC$, và tam giác DBC cân tại D nên $DI \perp BC$.



Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp DI \\ AI, DI \subset (ADI), AI \cap DI = I \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp mp(ADI) \Rightarrow BC \perp AD$$

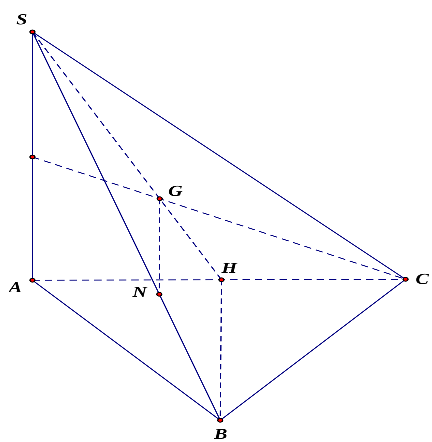
b). Chứng minh AH $\perp$ (BCD).

$$\text{Có} \begin{cases} AH \perp DI(gt) \\ AH \perp BC(\text{vì } BC \perp (ADI) \supset AH) \\ BC, DI \subset (BCD), BC \cap DI = I \end{cases} \Rightarrow AH \perp mp(BCD).$$

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy (ABC), tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho SN = 2NB. Chứng minh:

a) BC $\perp$ (SAB). b) NG $\perp$ (SAC).

LỜI GIẢI



$$\text{a). Có} \begin{cases} BC \perp AB(gt) \\ BC \perp SA(\text{vì } SA \perp (ABC) \supset BC) \\ AB, SA \subset (SAB) \,\&\, AB \cap SA = A \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB).$$

b). Gọi H trung điểm của AC . Tam giác ABC vuông cân tại B nên $BH \perp AC$

$$\text{Có} \begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA(\text{vì } SA \perp (ABC) \supset BH) \\ SA, AC \subset (SAC) \,\&\, SA \cap AC = A \end{cases}$$

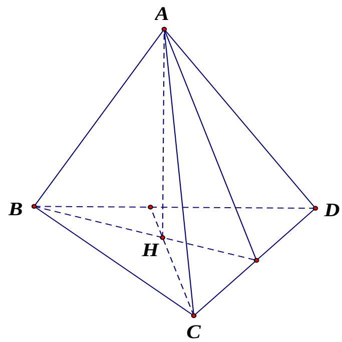
$$\Rightarrow BH \perp (SAC).$$

Xét tam giác SBH có $\frac{SN}{SB} = \frac{SG}{SH} = \frac{2}{3} \Rightarrow NG \parallel BH$ (Định lý đảo Talét).

Mà $BH \perp (SAC) \Rightarrow NG \perp (SAC)$.

Câu 3: Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD) . Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác BCD và $AD \perp BC$.

LỜI GIẢI



Có $\begin{cases} CD \perp AB(gt) \\ CD \perp AH(\text{do } AH \perp (ABC)) \Rightarrow CD \perp (ABH) \\ AB, AH \subset (ABH) \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp BH(\text{do } BH \subset (ABH))$ (1)

Chứng minh tương tự $BD \perp mp(ACH)$

$\Rightarrow BD \perp AH$ (2)

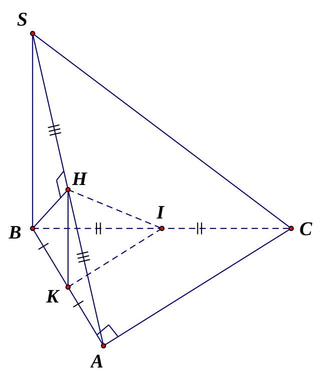
Từ (1) và (2) suy ra H trực tâm của tam giác ABC.

Vì $\begin{cases} BC \perp DH \\ BC \perp AH(gt) \\ AH, DH \subset (ADH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(ADH) \Rightarrow BC \perp AD(\text{do } AD \subset (ADH))$

Cho tứ diện SABC có đáy ABC vuông tại A, biết $SB \perp (ABC), SB = AB$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, AB, BC. Chứng minh rằng:

a). $AC \perp (SAB)$ b). $BH \perp (SAC)$ c). $KI \perp SA$ d). $AB \perp IH$

LỜI GIẢI



a). Có $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp SB \\ AB, SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB)$

b). Vì $SB = AB \Rightarrow \Delta SAB$ cân tại $B \Rightarrow BH \perp SA$

Có $\begin{cases} BH \perp SA \\ BH \perp AC(\text{do } AC \perp (SAB) \supset BH) \Rightarrow BH \perp (SAC) \\ SA, AC \subset (SAC) \end{cases}$

c). KI là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow KI \parallel AC$,

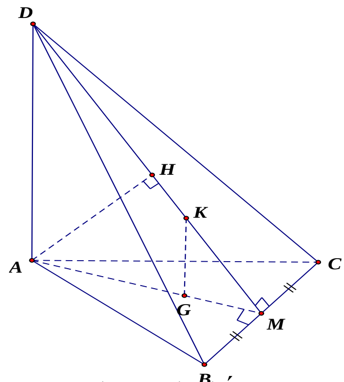
mà $AC \perp (SAB) \Rightarrow KI \perp (SAB)$ $\Rightarrow KI \perp SA(\text{do } SA \subset (SAB))$.

d). Có HK là đường trung bình của $\Delta SAB \Rightarrow HK \parallel SB$, mà $SB \perp AB \Rightarrow HK \perp AB$.

Vậy $\begin{cases} AB \perp HK \\ AB \perp KI \\ HK, KI \subset (HIK) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (HIK) \Rightarrow AB \perp IH$

Câu 4: Cho tứ diện ABCD có $DA \perp (ABC)$, ABC là tam giác cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $AH \perp MD$ tại H .
a). Chứng minh $AH \perp (BCD)$.
b). Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Chứng minh $GK \perp (ABC)$.

LỜI GIẢI



a). Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Vì ΔABC cân tại A nên $BC \perp AM$,

và $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp mp(DAM)$.

Ta có: $\begin{cases} AH \perp BC\left(BC \perp (DAM)\right) \\ AH \perp DM(gt) \\ BC, DM \subset (BCD),\ BC \cap DM = M \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (BCD)$.

b). Chứng minh $GK \perp (ABC)$.

Vì G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Theo tính chất trọng tâm:

$\begin{cases} \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{DK}{DM} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{DK}{DM} \Rightarrow AD \parallel KG$ (theo định lý Talet đảo).

Mà $AD \perp (ABC) \Rightarrow KG \perp (ABC)$ (đpcm)

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD , có đáy là hình vuông tâm O. SA ⊥ (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.
a) CMR: BC ⊥ (SAB), CD ⊥ (SAD), BD ⊥ (SAC).
b) CMR: AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra 3 đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.
c) CMR: HK ⊥ (SAC). Từ đó suy ra HK ⊥ AI.

LỜI GIẢI

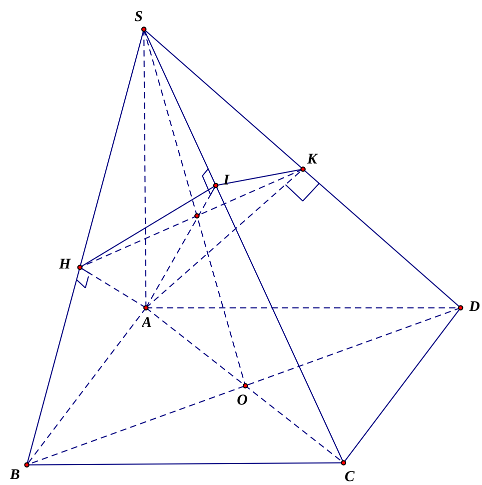
a) CMR: BC ⊥ (SAB) , CD ⊥ (SAD) , BD ⊥ (SAC).

Chứng minh $BC \perp (SAB)$. Có

$\begin{cases} BC \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \\ BC \perp AB(gt) \\ SA, AB \subset (SAB),\ SA \cap AB = A \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

Chứng minh $CD \perp (SAD)$.



Vì $\begin{cases} CD \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \\ CD \perp AD(gt) \\ SA, AD \subset (SAD),\ SA \cap AD = A \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAD)$

Chứng minh $BD \perp (SAC)$. Vì $\begin{cases} DB \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \\ BD \perp AC(gt) \\ SA, AC \subset (SAC),\ SA \cap AC = A \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$

b) CMR: AH, AK cùng vuông góc với SC

Có $\begin{cases} AH \perp SB(gt) \\ AH \perp BC\left(BC \perp (SAB)\right) \\ SB, BC \subset (SBC)\ \&\ SB \cap BC = B \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Có $\begin{cases} AK \perp SD(gt) \\ AK \perp CD\left(CD \perp (SAD)\right) \\ SD, CD \subset (SCD),\ SD \cap CD = D \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$

Vì AH, AK, AI có chung điểm A và cùng vuông góc với SC. Nên ba đường thẳng AH, AK, AI đồng phẳng.

c). Ta có tam giác $\Delta SAB = \Delta SAD(c.g.c)$. Nên 2 đường cao xuất phát từ đỉnh A bằng nhau $\Rightarrow AH = AK$, như vậy $\Delta SHA = \Delta SKA$ (cạnh huyền cạnh góc vuông) $\Rightarrow SH = SK$.

Từ đó có: $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \parallel BD$ (theo định lý đảo Talet).

Mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AI\left(AI \subset (SAC)\right)$.

Cho đường tròn (C) đường kính AB nằm trong mp(P). Gọi (d) là đường vuông góc với (P) tại A. Gọi S là một điểm trên (d), $M \in (C)$)

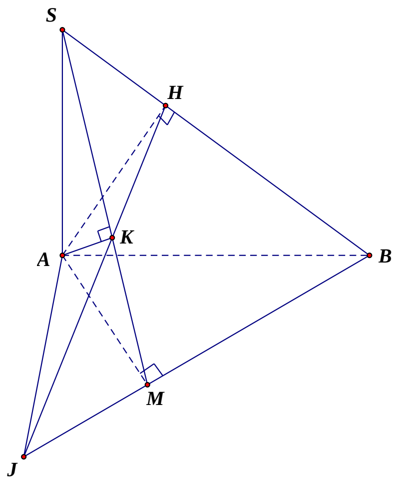
a). Chứng minh rằng $MB \perp (SAM)$

b). Dựng $AH \perp SB, AK \perp SM$ lần lượt tại H và K. Chứng minh $AK \perp (SMB)$ và $SB \perp (AHK)$.

c). Gọi J là giao điểm của HK và MB. Chứng minh AJ là tiếp tuyến của (C).

LỜI GIẢI

a). Do tam giác ABM nội tiếp trong đường tròn (C) đường kính AB, nên ΔABM vuông tại M.



Có $\begin{cases} BM \perp AM \\ BM \perp SA \\ AM, SA \subset (SAM) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAM)$

b). Có $\begin{cases} AK \perp SM \\ AK \perp BM\left(\text{do } BM \perp (SAM) \supset AK\right) \\ SM, BM \subset (SBM) \end{cases}$

$\Rightarrow AK \perp (SBM)$.

Có $\begin{cases} SB \perp AH \\ SB \perp AK\left(\text{do } AK \perp (SBM) \supset SB\right) \\ AH, AK \subset (AHK) \end{cases}$

$\Rightarrow SB \perp (AHK)$

c). Có $SA \perp (ABM)$ mà $AJ \subset (ABM) \Rightarrow SA \perp AJ$ (1). Ngoài ra có $SB \perp (AHK)$ mà $AJ \subset (AHK) \Rightarrow SB \perp AJ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AJ \perp (SAB) \Rightarrow AJ \perp AB$. Trong mp(P) có AJ vuông góc với AB là đường kính của đường tròn (C). Suy ra AJ là tiếp tuyến của (C).

Câu 6: Cho tứ diện O.ABC có 3 cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Chứng minh :

a. $OA \perp BC,\ OB \perp CA,\ OC \perp AB$.

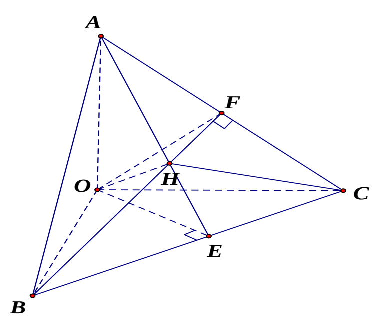
b. H là trực tâm của tam giác ABC.

c. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

d. $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}$.

e. Các góc của tam giác ABC đều là góc nhọn.

LỜI GIẢI



a). Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \\ OB, OC \subset (OBC) \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$

$\Rightarrow OA \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \\ OA, OC \subset (OAC) \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC)$

$\Rightarrow OB \perp AC$.

Chứng minh tương tự ta được $OC \perp AB$.

b). H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi $E = AH \cap BC$, $F = BH \cap AC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OA\left(OA \perp (OBC)\right) \\ BC \perp OH\left(OH \perp (ABC)\right) \\ OA, OH \subset (OAE) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAE) \Rightarrow BC \perp AE$ (1).

Ta có $\begin{cases} AC \perp OB, AC \perp OH \\ OB, OH \subset (OBF) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBF) \Rightarrow AC \perp BF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

c). Chứng minh $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Trong ΔOAE vuông tại O có OH là đường cao : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OE^2}$ (3).

Trong ΔOBC vuông tại O có OE là đường cao : $\dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ (4).

Thay (4) vào (3) được $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ (đpcm)

Công thức này được sử dụng trực tiếp để tính khoảng cách , các bạn nhớ công thức này nhé!

d). Chứng minh : $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}$.

Trong ΔOAE vuông tại O có OH là đường cao

$$OE^2 = EH.EA \Leftrightarrow OE^2.BC^2 = EH.BC.EA.BC \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}OE.BC\right)^2 = \frac{1}{2}.EH.BC.\frac{1}{2}EA.BC$$

$$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} = S_{\Delta HBC}.S_{\Delta ABC} \quad (*)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được: $S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC}$ (**)

$S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC}$ (***)

Cộng từng vế (*) ,(**) , (***) :

$$S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta HBC}.S_{\Delta ABC} + S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC} + S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC}$$

$$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta ABC}.\left(S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HAC} + S_{\Delta HAC}\right)$$

$$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta ABC}.S_{\Delta ABC}$$

$$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAC} = S^2_{\Delta ABC}.$$

Cách 2 : $S^2_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4}AE^2BC^2 = \dfrac{1}{4}\left(OA^2 + OE^2\right)BC^2 = \dfrac{1}{4}OA^2.BC^2 + \dfrac{1}{4}OE^2.BC^2$

$$=\frac{1}{4}OA^2\left(OB^2+OC^2\right)+\frac{1}{4}OE^2.BC^2$$

$$=\frac{1}{4}OA^2.OB^2+\frac{1}{4}OA^2.OC^2+\frac{1}{4}OE^2.BC^2$$

$$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC}+S^2_{\Delta OAC}+S^2_{\Delta OAC}=S^2_{\Delta ABC}$$

e). Các góc của tam giác ABC đều là góc nhọn.

Gọi độ dài ba cạnh $OA=a, OB=b, OC=c$.

Trong tam giác ABC áp dụng định lý cosin có

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\frac{a^2+b^2+a^2+c^2-\left(b^2+c^2\right)}{2.AB.AC}=\frac{a^2}{AB.AC}>0\ .$$

Kết luận A là góc nhọn

Chứng minh tương tự góc B và góc C nhọn .

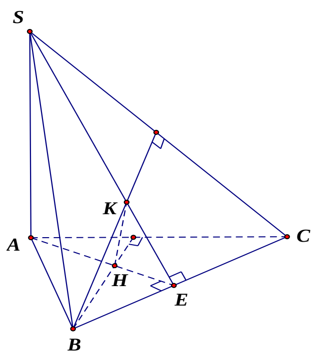
Câu 7: Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H , K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng :

a). AH , SK , BC đồng quy.

b). SC vuông góc với mặt phẳng (BHK).

c). HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

LỜI GIẢI



a). Gọi $E=AH\cap BC$

Ta có $\begin{cases}BC\perp AE\\BC\perp SA\\AE,SA\subset(SAE)\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAE\right)$

$\Rightarrow BC\perp SE\left(SE\subset\left(SAE\right)\right)$.

Vì $\begin{cases}SK\perp BC\\SE\perp BC\end{cases}$, suy ra ba điểm S, K, E thẳng hàng.

Kết luận ba đường thẳng AH, BC, SK đồng qui tại điểm E .

b). SC vuông góc với mặt phẳng (BHK).

Có $\begin{cases}BH\perp AC\\BH\perp SA\end{cases}\Rightarrow BH\perp\left(SAC\right)\Rightarrow BH\perp SC\left(SC\subset\left(SAC\right)\right)$.

Có $\begin{cases}SC\perp BH\left(BH\perp\left(SAC\right)\right)\\SC\perp BK\end{cases}\Rightarrow SC\perp\left(BHK\right)$

c). HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Có $BC\perp\left(SAE\right)\ \Rightarrow BC\perp HK\left(KH\subset\left(SAE\right)\right)$ (1) .

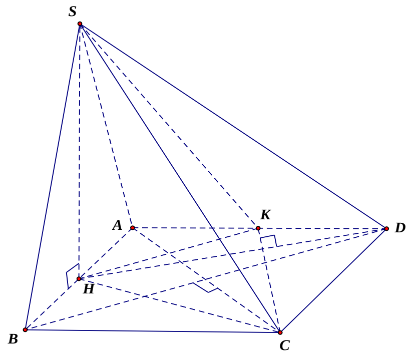
Có $SC\perp\left(BHK\right)\ \Rightarrow SC\perp HK$ (2) .

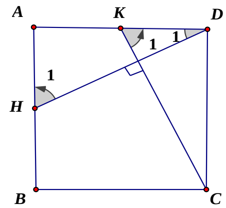
Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (SBC)$

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SAB là tam giác đều và SC = $a\sqrt{2}$. Gọi H, K là trung điểm của AB, AD.
a). Chứng minh SH ⊥ (ABCD). b). Chứng minh AC ⊥ SK và CK ⊥ SD.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh SH ⊥ (ABCD).





Hình 1

Trong ΔBCH có: $HC^2 = BH^2 + BC^2 = \frac{5a^2}{4}$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (SH đường cao của ΔSAB đều).

Trong Δ SCH ta có: $SC^2 = SH^2 + HC^2 = 2a^2$. Suy ra tam giác SHC vuông tại H.

Có $\begin{cases} SH \perp AB(gt) \\ SH \perp HC \\ AB, HC \subset (ABCD),\ AB \cap HC = H \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

b). Chứng minh AC ⊥ SK . Ta có $\begin{cases} HK \parallel BD \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp HK$.

Có $\begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp HK \\ SH, HK \subset (SHK),\ SH \cap HK = H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.

Chứng minh CK ⊥ SD.

Vì đáy ABCD hình vuông (hình 1), dễ dàng chứng minh $\Delta CDK = \Delta DAH$. Suy ra:

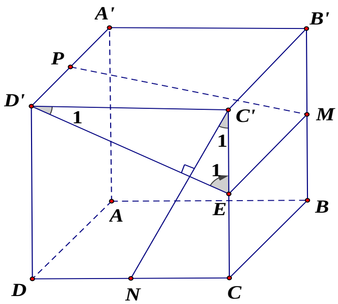
$K_1 = H_1$, mà $H_1 + D_1 = 90^0 \Rightarrow K_1 + D_1 = 90^0 \Rightarrow CK \perp DH$

Ta có : $\begin{cases} CK \perp SH \\ CK \perp DH \\ SH, DH \subset (SHD), SH \cap DH = H \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SHD) \Rightarrow CK \perp SD$ (đpcm)

Câu 9: ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2002

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD, A'D'. Chứng minh: $MP \perp C'N$.

LỜI GIẢI



Gọi E trung điểm của CC'. Ta có $ME \parallel A'D'$ nên ED và PD' đồng phẳng.

Vì có CDD'C' là hình vuông nên dễ dàng chứng minh hai tam giác D'C'E và C'CN bằng nhau , suy ra $D'_1 = C'_1$, mà

$D'_1 + E = 90^0 \Rightarrow C'_1 + E = 90^0 \Rightarrow ED' \perp NC'$ (1) .

Ta có $BC \perp (CDD'C') \Rightarrow BC \perp NC'$ mà

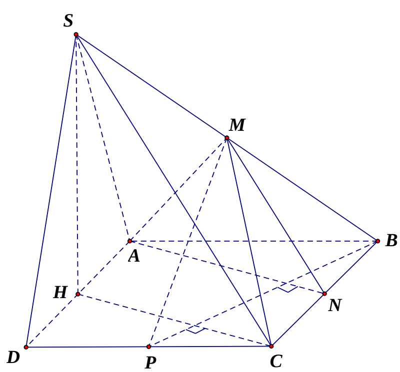
$ME \parallel BC, \quad \Rightarrow ME \perp NC'$ (2) .

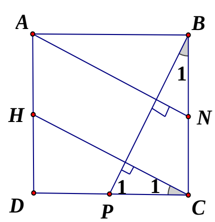
Từ (1) và (2) suy ra $NC' \perp (MED'P) \Rightarrow NC' \perp PM\left(PM \subset mp(MED'P)\right)$.

Câu 10: ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều và ở trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh $AM \perp BP$.

LỜI GIẢI:





Hạ $SH \perp AD$ tại H. Vì SAD là tam giác đều nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vì mặt phẳng (SAD) vuông góc mặt phẳng (ABCD) có AD là giao tuyến . Suy ra $SH \perp mp(ABCD)$.

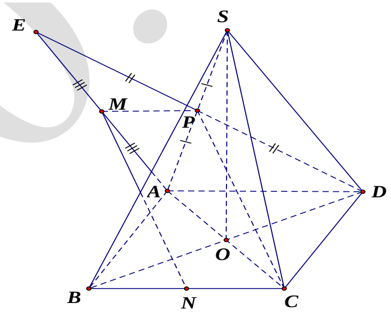
Ta có $\begin{cases} AN \parallel HC,\ MN \parallel SC \\ AM, MN \subset (AMN) \Rightarrow (AMN) \parallel (SHC) \\ HC, SC \subset (SHC) \end{cases}$

Trong hình vuông ABCD có $\Delta BCP = \Delta CDH\left(c.g.c\right)$ nên $B_1 = C_1$ mà $B_1 + P_1 = 90^0 \Rightarrow C_1 + P_1 = 90^0 \Rightarrow CH \perp PB$.

Ta có $\begin{cases} BP \perp CH \\ BP \perp SH \end{cases} \Rightarrow BP \perp \left(SHC\right) \Rightarrow BP \perp \left(AMN\right) \Rightarrow BP \perp AM$.

Câu 11: ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007
Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm của SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh $MN \perp BD$.

LỜI GIẢI



Gọi O giao điểm của AC và BD. P trung điểm của SA. Vì S.ABCD là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Trong Δ EAD có MP là đường trung bình của tam giác nên có $\overrightarrow{MP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (1)

Vì N trung điểm của BC nên $\overrightarrow{NC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác CPMN là hình bình hành, nên MN // PC

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \\ AC, SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp \left(SAC\right) \Rightarrow BD \perp CP\left(CP \subset \left(SAC\right)\right)$,

mà $MN \parallel CP \Rightarrow BD \perp MN$. Kết luận $BD \perp MN$

Câu 12: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và biết rằng A'H $\perp$ (ABC). Chứng minh rằng:
a) $AA' \perp BC$ và $AA' \perp B'C'$.
b) Gọi MM' là giao tuyến của hai mp(AHA') và (BCC'B') trong đó M $\in$ BC và M' $\in$ B'C'. Chứng minh tứ giác BCC'B' là hình chữ nhật và MM' là đường cao của hình chữ nhật đó.

LỜI GIẢI

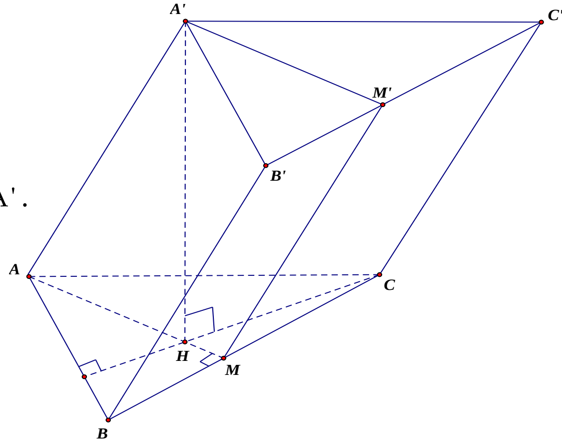
a) Chứng minh $BC \perp (A'AH)$.

$\begin{cases} BC \perp AH(gt) \\ BC \perp A'H(\text{vì } A'H \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp mp(A'AH) \Rightarrow BC \perp AA'$.

Vì $B'C' \parallel BC$ mà

$BC \perp AA' \Rightarrow AA' \perp B'C'$.



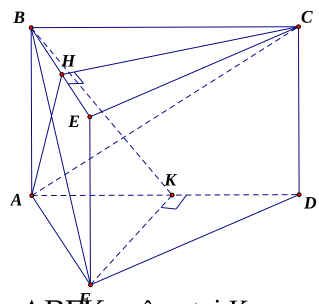
b. $\begin{cases} (AHA') \cap (BCC'B') = MM' \\ AA' \parallel BB' \\ AA' \subset (AHA')\ ,\ BB' \subset (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow MM' \parallel AA' \parallel BB'$

Mà $BC \perp (AHA') \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow BB' \perp BC$. Vậy BCC'B' là hình chữ nhật.

Câu 13: Cho hai hình chữ nhật ABCD, ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau sao cho $AC \perp BF$. Gọi CH và FK là hai đường cao của tam giác BCE và ADF. Chứng minh:

a). ACH và BFK là các tam giác vuông. b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

LỜI GIẢI



a). Ta có ABCD, ABEF là hình chữ nhật nên :

Có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCE) \Rightarrow AB \perp CH \quad (1)$.

Có $\begin{cases} CH \perp BE(gt) \\ CH \perp AB(\text{do } (1)) \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABEF) \Rightarrow CH \perp AH$.

Vậy Δ ACH vuông tại H.

Chứng minh tương tự $FK \perp (ABCD) \Rightarrow FK \perp BK$ .Vậy ΔBFK vuông tại K.

b. Chứng minh: BF $\perp$ AH và AC $\perp$ BK.

Có $\begin{cases} BF \perp AC(gt) \\ BF \perp CH(\text{vì } CH \perp (ABEF)) \end{cases} \Rightarrow BF \perp (ACH) \Rightarrow BF \perp AH(AH \subset (ACH))$.

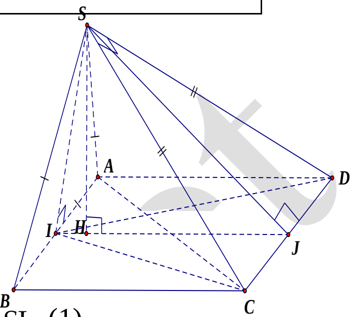
Có $\begin{cases} AC \perp FB(gt) \\ AC \perp FK(\text{vì } FK \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BKF) \Rightarrow AC \perp BK$.

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J là trung điểm của AB và CD.

a). Tính các cạnh của tam giác SIJ và chứng minh SI $\perp$ (SCD), SJ$\perp$ (SAB).

b). Gọi SH là đường cao của tam giác SIJ. Chứng minh $SH \perp (ABCD)$ và tính độ dài SH.

LỜI GIẢI



a). Vì ΔSAB đều nên $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. ΔSCD vuông cân tại S suy ra

$SJ = CJ = DJ$

$= \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$, $SC = SD = \frac{a}{\sqrt{2}}$ và $IJ = AD = BC = a$.

Xét ΔSIJ: $IJ^2 = SI^2 + SJ^2 = a^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại S, nên $SI \perp SJ$ (1)

Trong tam giác IBC vuông tại B có $IC^2 = BI^2 + BC^2 = \frac{5a^2}{4}$.

Xét ΔSIC: $IC^2 = SI^2 + SC^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow \Delta SIC$ vuông tại S, suy ra $SI \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) có $\begin{cases} SI \perp SJ,\ SI \perp SC \\ SJ, SC \subset mp(SCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp mp(SCD)$

Chứng minh tương tự $\begin{cases} SJ \perp SI,\ SJ \perp SB \\ SI, SB \subset mp(SAB) \end{cases} \Rightarrow SJ \perp mp(SAB)$

b). Đầu tiên ta chứng minh $CD \perp (SIJ)$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp IJ \\ CD \perp SI \left(\text{vì } SI \perp (SCD)\right) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH \left(\text{do } SH \subset (SIJ)\right)$ (1)

Ta lại có $\begin{cases} SH \perp IJ\,(gt) \\ SH \perp CD\,(\text{do } (1)) \\ IJ, CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp mp(ABCD)$.

Tính SH : Xét ΔSIJ vuông tại S có

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SJ^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

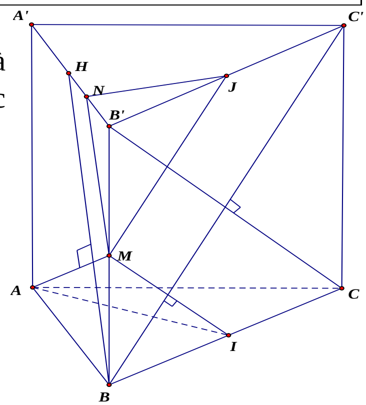
Câu 15: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và CC' = a.

a). Gọi I trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.

b). Gọi M trung điểm của BB'. Chứng minh $AM \perp BC'$.

c). Lấy điểm N thuộc A'B' sao cho $NB' = \frac{a}{4}$ và gọi J là trung điểm của B'C'. Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.

LỜI GIẢI



Vì ABC.A'B'C' lăng trụ đứng và $AB = BC = CA = CC' = a$ Nên các mặt bên là các hình vuông

a) Chứng minh $AI \perp BC'$**.**

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AI \perp mp(BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$$

b) Chứng minh $AM \perp BC'$**.**

$IM \parallel CB'$, $CB' \perp BC'$ (tính chất hình vuông) .

Suy ra $IM \perp BC'$

Ta có $AI \perp BC'$ (câu a)) và $IM \perp BC'$ .Vậy $BC' \perp (AMI) \Rightarrow BC' \perp AM$ (đpcm).

c). Chứng minh $AM \perp (MNJ)$**.**

Gọi H trung điểm của A'B', suy ra N trung điểm của HB'.

Ta có $MN \parallel BH$, $BH \perp AM$ (tính chất hình vuông) . Suy ra $MN \perp AM$ (1).

$MJ \parallel BC'$, $AM \perp BC'$ (do câu b)) . Suy ra $AM \perp MJ$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $AM \perp mp(MNJ)$

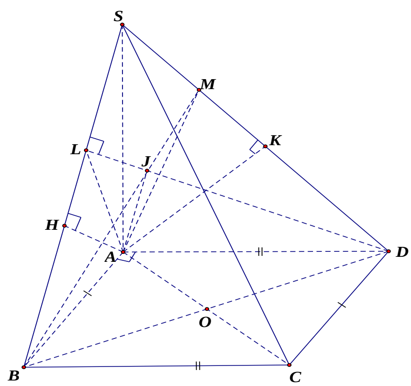
Nhận xét: *Bài này không có độ khó, chứng minh được nhờ số liệu bài cho đặc biệt cạnh bên bằng cạnh đáy, và các bạn phải nhớ 2 đường trung tuyến xuất phát từ hai đỉnh kề nhau của hình vuông thì vuông góc với nhau.*

Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm O, SA $\perp$ (ABCD).

a). Gọi H, K là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh SC $\perp$ (AHK).

b). Dựng AJ $\perp$ (SBD), $J \in (SBD)$. Chứng minh J là trực tâm của tam giác SBD.

LỜI GIẢI



a). Chứng minh $BC \perp (SAB)$:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$$

Có $\begin{cases} AH \perp SB(gt) \\ AH \perp BC(do\ (1)) \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC \qquad (*)$

Chứng minh $CD \perp (SAD)$:

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK \qquad (2)$$

Có $\begin{cases} AK \perp SD(gt) \\ AK \perp CD(\text{do } (2)) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC \quad (**)$.

Từ (*) và (**) suy ra $SC \perp (AHK)$.

b). Trong mp(SBD), gọi $L = DJ \cap SB$, $M = BJ \cap SD$.

Dễ dàng chứng minh $AD \perp mp(SAB) \Rightarrow AD \perp SB \qquad (3)$.

$$\begin{cases} SB \perp AD(\text{do } (3)) \\ SB \perp AJ(\text{do } AJ \perp (SBD)) \\ AD, AJ \subset (ADL) \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ADL) \Rightarrow SB \perp DL \qquad (I).$$

Chứng minh tương tự thì $SD \perp BM \qquad (II)$

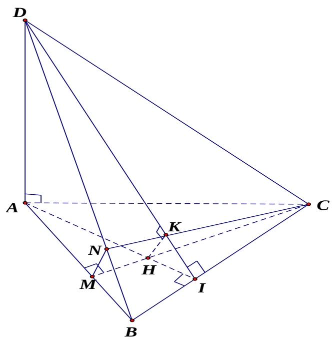
Từ $(I),(II)$ xét trong tam giác SBD có J là giao điểm của hai đường cao. Suy ra J là trực tâm của ΔSBD.

Câu 17: Cho tứ diện ABCD có DA $\perp$ (ABC). Gọi AI là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC. Hạ HK vuông góc với DI tại K . Chứng minh:

a). HK $\perp$ BC. b). K là trực tâm của tam giác DBC.

LỜI GIẢI

Trong tam giác ABC gọi $M = CH \cap AB$. Trong tam giác BCD gọi $N = CK \cap BD$.



a). Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp DA \\ AI, DA \subset (DAI), DA \cap AI = A \end{cases}$

$$\Rightarrow BC \perp (DAI) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp DI \end{cases} (*)$$

b). K là trực tâm của tam giác DBC.

Có $\begin{cases} HK \perp DI(gt) \\ HK \perp BC(\text{do a)}) \\ DI, BC \subset mp(BCD); DI \cap BC = I \end{cases} \Rightarrow HK \perp (BCD)$.

Có $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp DA \\ AB, DA \subset (ABD); AB \cap DA = A \end{cases} \Rightarrow CM \perp mp(DAB) \Rightarrow CM \perp BD \ (1)$

Có $\begin{cases} BD \perp CM(do(1)) \\ BD \perp HK(do\ HK \perp (BCD)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp mp(CMN) \Rightarrow BD \perp CN \ (**)$

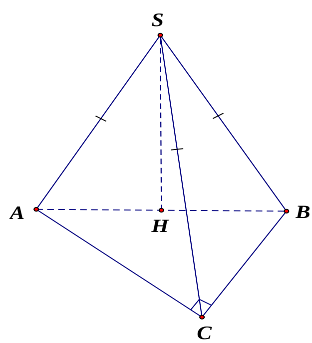
Từ $(*),(**) \Rightarrow$ K là trực tâm của tam giác BCD.

Câu 18: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $ASB = 120^0$, $BSC = 90^0$, $CSA = 60^0$.

a). Chứng minh tam giác ABC vuông.

b). Xác định hình chiếu H của S trên mp(ABC). Tính SH theo a.

LỜI GIẢI



a). $AB^2 = AS^2 + SB^2 - 2AS.BS.\cos ASB = 3a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$

$BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

$AC^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos ASB = a^2 \Rightarrow AC = a$

Ta có $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Vậy ABC là tam giác vuông tại C.

b). Vì $\begin{cases} SH \perp mp(ABC) \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow HA = HB = HC$.

Vậy H là trung điểm của AB.

Vì tam giác ASH là nữa tam giác đều nên $SH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Câu 19: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là tứ giác , có ABD là tam giác đều , BCD là tam giác cân tại C có $BCD = 120^0$. SA $\perp$ mp(ABCD).

a). Gọi H , K là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh SC $\perp$ (AHK).

b). Gọi C' là giao điểm của SC với mp(AHK). Tính diện tích tứ giác AHC'K khi AB = SA = a.

LỜI GIẢI

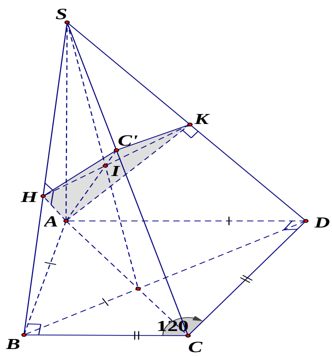
a). Vì $\begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \end{cases}$ suy ra AC là đường trung trực của đoạn BD.

Tam giác ABD đều , $ABD = ADB = 60^0$.

Tam giác BCD cân tại C có $BCD = 120^0 \Rightarrow CBD = CDB = 30^0$.

Vậy $ABC = ADC = 90^0$.

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA\left(\text{do } SA \perp (ABCD)\right) \\ AB, SA \subset (SAB),\ AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.



$\begin{cases} DC \perp AD \\ DC \perp SA\left(\text{do } SA \perp (ABCD)\right) \\ AD, SA \subset (SAD),\ AB \cap SA = A \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp mp(SAD) \Rightarrow DC \perp AK$.

Có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp mp(SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (1).

Có $\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{cases} \Rightarrow AK \perp mp(SCD) \Rightarrow AK \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp mp(AHK)$

b). $BD \perp AC,\ BD \perp SA \ \Rightarrow BD \perp mp(SAC)$.

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAD(c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} ASB = ASD \\ SB = SD \end{cases}$

Xét hai tam giác vuông SAH và SAK, có : SA cạnh chung, $ASB = ASD$ $\Rightarrow \Delta SAH = \Delta SAK$ nên $SH = SK$, mà $SB = SD$. Suy ra $HK \parallel BD$ (định lý đảo Talet).

Có $\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ BD \parallel HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp mp(SAC)$. Vậy $HK \perp AC'$ (Vì $AC' \subset mp(SAC)$) (*).

Ta có $AB = SA \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại A nên H trung điểm của SB.

Xét ΔSBD có HK là đường trung bình nên $HK = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$.

Xét ΔABC vuông tại B : $AC = \frac{AB}{\sin 60^0} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Vì $SC\perp (AHK)\Rightarrow SC\perp AC'$ $\quad (\text{vì } AC'\subset mp(AHK))$.

Xét ΔSAC vuông tại A : $\dfrac{1}{AC'^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4a^2}=\dfrac{7}{4a^2}\Rightarrow AC'=\dfrac{2a}{\sqrt{7}}$

Từ (*) thì tứ giác AHC'K có 2 đường chéo vuông góc nên $S_{AHC'K}=\dfrac{1}{2}HK.AC'=\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{2}.\dfrac{2a}{\sqrt{7}}=\dfrac{a^2}{2\sqrt{7}}$.

Câu 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh tâm O, AB = SA = a , SA vuông góc với đáy (ABCD). Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, (P) cắt SB, SC, SD tại H, I, K .

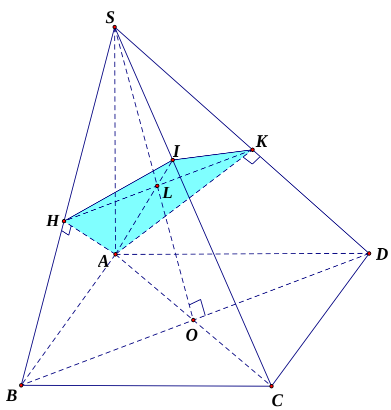
a). Chứng minh $HK\parallel BD$.

b). Chứng minh AH $\perp$ SB , AK $\perp$ SD.

c). Chứng minh tứ giác AHIK có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích AHIK theo a.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh $HK\parallel BD$**.**



Ta có $(SAC)\cap(ABD)=SO;(P)\cap(SAC)=AI$.

Gọi $L=AI\cap SO$.

Vì $\begin{cases}BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC\\ mp(P)\perp SC\end{cases}\Rightarrow BD\parallel mp(P)$.

Có $\begin{cases}L\in(P)\cap(SBD)\\ BD\parallel(P)\end{cases}\Rightarrow(P)\cap(SBD)=HK$, với HK đi qua L và $HK\parallel BD$.

b). Chứng minh AH $\perp$ SB , AK $\perp$ SD.

Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$, $\quad\begin{cases}CD\perp AD\\ CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)$.

Theo chứng minh trên có :

$$\begin{cases}AH\perp BC\left(BC\perp(SAB)\right)\\ AH\perp SC\left(SC\perp(P)\right)\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SB.$$

Tương tự ta chứng minh được $AK\perp mp(SCD)\Rightarrow AK\perp SD$

c). Chứng minh tứ giác AHIK có hai đường chéo vuông góc

Do $BD \perp (SAC)$ và $BD \parallel HK$ suy ra $HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AI\left(AI \subset (SAC)\right)$.

Tính diện tích AHIK theo a.

Trong ΔSAC có AI là đường cao :

$$AI.SC = SA.AC \Rightarrow AI = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vì ΔSAB vuông cân tại A nên H là trung điểm BC, suy ra $HK = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kết luận $S_{AHIK} = \frac{1}{2}AI.HK = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Câu 21: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = a , BC = $a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B , SCD vuông tại D có SD = $a\sqrt{5}$.

a). Chứng minh SA $\perp$ (ABCD) và tính SA.

b). Đường thẳng qua A vuông góc với AC, cắt CB, CD tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC , K và L là giao điểm của SB, SD với mp(HIJ) . Chứng minh AK $\perp$ (SBC) và AL $\perp$ (SCD).

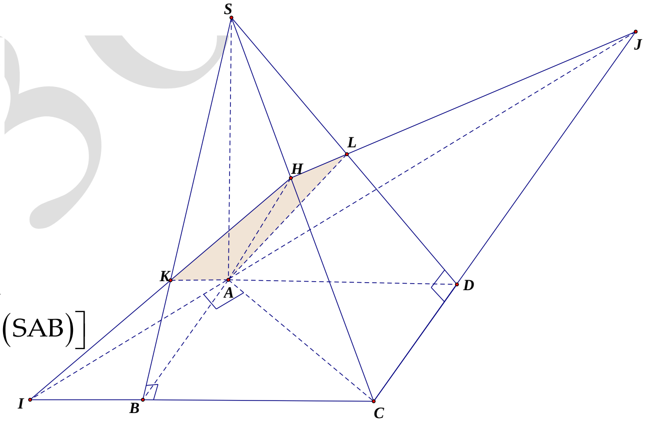
c). Tính diện tích tứ giác AKHL.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh SA $\perp$ (ABCD) và tính SA.

$BC \perp AB$ (vì ABCD là hình chữ nhật) (1) , $BC \perp SB$ (vì ΔSBC vuông tại B) (2) .

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp mp(SAB)\left[\text{vì } AB, SB \subset (SAB)\right]$



Vậy $mp(SAB) \perp mp(ABCD)\left[\text{vì } BC \subset (ABCD)\right]$ (*).

Chứng minh tương tự thì $CD \perp mp(SAD) \Rightarrow mp(SAD) \perp mp(ABCD)$ (**)

Ta có $(SAB) \cap (SAD) = SA$, và từ (*) (**) suy ra $SA \perp mp(ABCD)$.

Xét ΔSAD vuông tại A : $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a\sqrt{2}$

b). Chứng minh AK $\perp$ (SBC) và AL $\perp$ (SCD).

$(IJH) \cap (SBC) = IH$, gọi $K = SB \cap IH \Rightarrow K = SB \cap mp(IJH)$

$(IJH)\cap(SCD)=JH$, gọi $L=SD\cap JH\Rightarrow L=SD\cap mp(IJH)$

Chứng minh AK $\perp$ (SBC) :

$$\begin{cases} IA\perp AC(gt) \\ IA\perp SA\left(SA\perp(ABCD), IA\subset(ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow IA\perp mp(SAC) \quad \Rightarrow IA\perp SC \ (3)$$

$$\begin{cases} SC\perp AH(gt) \\ SC\perp IA(do(3)) \end{cases} \Rightarrow SC\perp mp(P) \ ; \ \begin{cases} SC\perp mp(P) \\ SC\subset mp(SBC) \end{cases} \Rightarrow mp(P)\perp mp(SBC)$$

$$\begin{cases} mp(P)\cap(SAB)=AK \\ mp(P) \quad \perp mp(SBC) \\ mp(SAB)\perp mp(SBC) \end{cases} \Rightarrow AK\perp mp(SBC)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự $AL\perp mp(SCD)$.

c). *Tính diện tích tứ giác AKHL.*

Xét ΔSAB vuông tại A :

$$SB=\sqrt{AS^2+AB^2}=a\sqrt{3}, \ AK.SB=AB.AS\Rightarrow AK=\frac{AB.AS}{SB}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Xét ΔSAD vuông tại A : $AL.SD=AD.AS\Rightarrow AL=\frac{AD.AS}{SD}=\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Xét ΔSAC vuông tại A :

$$SC=\sqrt{AS^2+AC^2}=a\sqrt{6}, \ AH.SC=AC.AS\Rightarrow AH=\frac{AC.AS}{SC}=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Vì $AK\perp(SBC)\Rightarrow AK\perp KH$. Xét ΔAKH vuông tại K :

$$KH=\sqrt{AH^2-AK^2}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

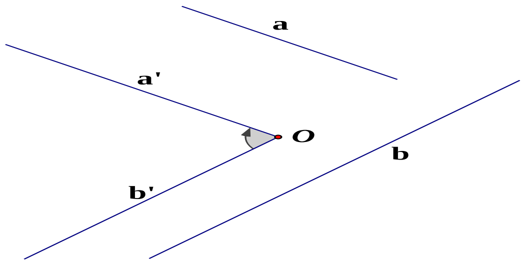
Vì $AL\perp(SCD)\Rightarrow AL\perp LH$. Xét ΔALH vuông tại L : $LH=\sqrt{AH^2-AL^2}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

$$S_{AKHL}=S_{\Delta AKH}+S_{\Delta ALH}=\frac{1}{2}AK.HK+\frac{1}{2}AL.HL=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right)=\frac{8a^2}{15}.$$

GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

• Cách xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b:

Chọn điểm O thích hợp, rồi kẻ hai đường thẳng đi qua điểm O: a’// a và b’// b.



• Các phương pháp tính góc:

+ Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác:

Định lí sin: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

Định lí cos: $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

+ Tính góc theo vectơ chỉ phương: $\cos\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$

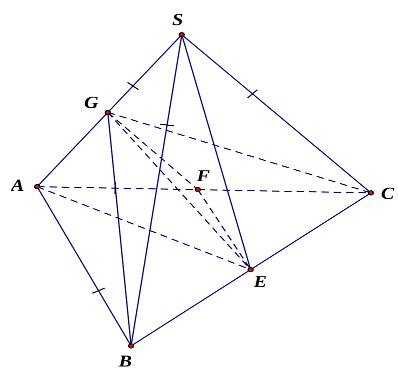
• Chú ý. + $0^0\le\varphi\le 90^0$

+ $AB\perp CD\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0.$

+ Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì $\varphi=0^0$.

Câu 1: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a, BC = $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

LỜI GIẢI



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, AC, SA. Ta có $EF\parallel AB,\ FG\parallel SC$ $\Rightarrow\left[SC,AB\right]=\left[EF,FG\right]=EFG$ hoặc 180^0-EFG. Ta có $FE=FG=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a}{2}$

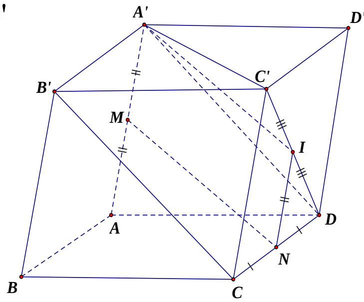
$\Delta BAG=\Delta CAG\left(c.g.c\right)\Rightarrow GB=GC$. Tam giác GBC cân tại G có GE là đường cao

$GE=\sqrt{BG^2-BE^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a}{2}.$

Tam giác EFG đều vì có 3 cạnh bằng nhau. Vậy $EFG=60^0$.

Câu 2: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a > 0 và $BAD = DAA' = A'AB = 60^0$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AA' , CD. Chứng minh $MN \parallel mp\left(A'C'D\right)$ và tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng NM và B'C.

LỜI GIẢI



Gọi I trung điểm của DC'. Trong tam giác CDC' có NI là đường trung bình của tam giác, nên :

$$\begin{cases} NI \parallel CC' \\ NI = \dfrac{1}{2}CC' \end{cases}$$

mà $\begin{cases} CC' \parallel AA' \\ CC' = AA' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NI \parallel AA' \\ NI = \dfrac{1}{2}AA' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} NI \parallel MA' \\ NI = MA' \end{cases}$

Vậy tứ giác MNIA' là hình bình hành nên $MN \parallel IA'$ mà $IA' \subset \left(A'C'D'\right) \Rightarrow MN \parallel \left(A'C'D\right)$.

Vì $\begin{cases} MN \parallel IA' \\ CB' \parallel DA' \end{cases} \Rightarrow \left(CB',MN\right) = \left(DA',IA'\right) = DA'I$ hoặc $180^0 - DA'I$

Ta có tam giác DAA' đều nên DA' = a .

Áp dụng định lý cosin cho Δ ABC có $ABC = 120^0$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 120^0 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

$AB' = a\sqrt{3}$.

Vậy có $AC = A'C' = a,\ AB' = DC' = a\sqrt{3}$.

Trong $\Delta DA'C'$ có A'I là đường trung tuyến :

$$IA'^2 = \frac{DA'^2 + A'C'^2}{2} - \frac{DC'^2}{4} = \frac{a^2 + 3a^2}{2} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow IA' = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

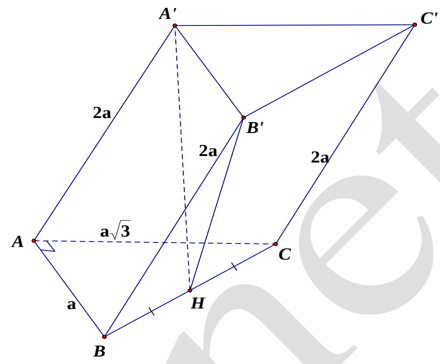
Trong ΔA'DI ta cã : $\cos DA'I = \dfrac{DA'^2 + IA'^2 - DI^2}{2.DA'.IA'} = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} > 0$.

Kết luận : $\cos\left[MN, CB'\right] = \left|\cos DA'I\right| = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 3: TSĐH K.A 2008

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = a $\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

LỜI GIẢI



Gọi H trung điểm của BC , theo đề $A'H \perp mp(ABC)$.

Mà mp $(ABC) // mp\ (A'B'C')$

$\Rightarrow A'H \perp mp(A'B'C')$

Tam giác ABC vuông tại A :

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow BH = a$

Ta có: $\begin{cases} AA' \parallel BB' \\ B'C' \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \left(AA', B'C'\right) = \left(BB', BC\right) = B'BH$.

Trong tam giác A'B'H vuông tại A' có : $HB' = \sqrt{A'B^2 + A'H^2} = 2a$.

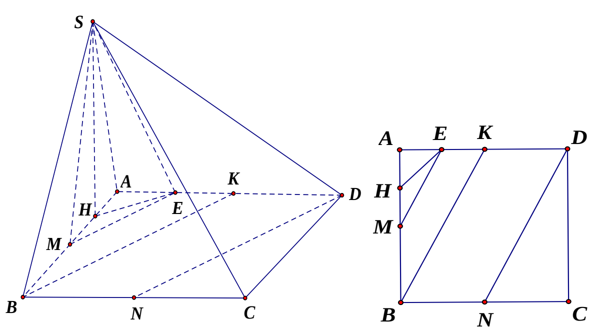
Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác B'BH có :

$$\cos B'BH = \frac{BB'^2 + BH^2 - B'H^2}{2.BB'.BH} = \frac{4a^2 + a^2 - 4a^2}{2.2a.a} = \frac{1}{4} > 0\ (\text{thỏa}) \Rightarrow B'BH = \arccos\frac{1}{4}.$$

Câu 4: TSĐH K.B 2008

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

LỜI GIẢI



Hạ $SH \perp AB$ tại H. Vì mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABCD) theo giao tuyến AB. Suy ra $SH \perp mp(ABCD)$.

Trong mặt phẳng (ABCD) từ M kẻ $ME \parallel DN$ với E thuộc AD.

Vậy góc giữa SM và DN chính là góc giữa SM và ME .

Xét tam giác SAB có : $AB^2 = SA^2 + SB^2 = 4a^2$. Vậy ΔSAB vuông tại S.

Và : $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SHA vuông tại H : $HA = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$.

Gọi K trung điểm của AD ta có $ME \parallel BK \parallel DN$, nên ME là đường trung bình tam giác ABK.

Vậy $AE = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a}{2}$; $\quad ME = \dfrac{1}{2}BK = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Tam giác HAE vuông tại A : $HE = \sqrt{AH^2 + AE^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SHE vuông tại H : $SE = \sqrt{SH^2 + EE^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác SME có :

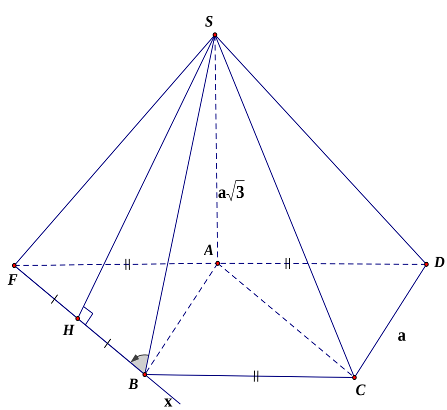
$$\cos SME = \frac{SM^2 + ME^2 - SE^2}{2.SM.ME} = \frac{a^2 + \dfrac{5a^2}{4} - \dfrac{5a^2}{4}}{2.a.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} > 0 \Rightarrow SME = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Kết luận $\left(SM, DN\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 5: Cho khối chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

LỜI GIẢI

Qua B kẻ đường thẳng Bx song song với AC . Bx cắt AD tại F. Góc giữa AC và SB , chính là góc giữa Bx và AC. Ta có AFBC là hình bình hành , nên AF = BC và AC = FB. Suy ra SF = SB , tam giác SBF cân tại S. Có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$. $FB = AC = a\sqrt{2}$

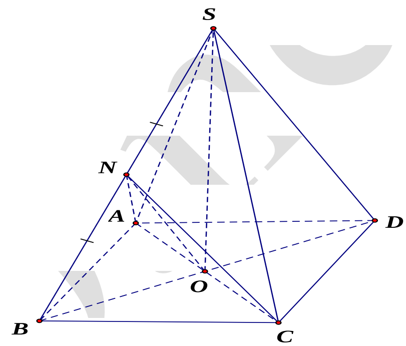


Hạ $SH \perp FB$, thì H trung điểm FB

$$\cos SBF = \frac{HB}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SBF = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là hình vuông. Gọi N là trung điểm SB. Tính góc giữa AN và CN; AN và SD.

LỜI GIẢI



Theo đề bài

$SA = SB = SC = SD = AB = BC = CD = DA = a$

Gọi $O = AC \cap BD$, có

$AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔSAB đều). $CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔSBC đều).

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ANC:

$$\cos ANC = \frac{AN^2 + CN^2 - AC^2}{2.AN.CN} = \frac{-1}{3} < 0 \Rightarrow ANC = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Trong tam giác BDS có ON là đường trung bình của tam giác.

$(AN, SD) = (AN, NO) = ANO$ hoặc $180 - ANO$

Áp dụng định lý cosin cho ΔANO:

$$\cos ANO = \frac{AN^2 + ON^2 - AO^2}{2.AN.ON} = \frac{\sqrt{3}}{3} > 0 \Rightarrow ANO = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Vậy $(AN, SD) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

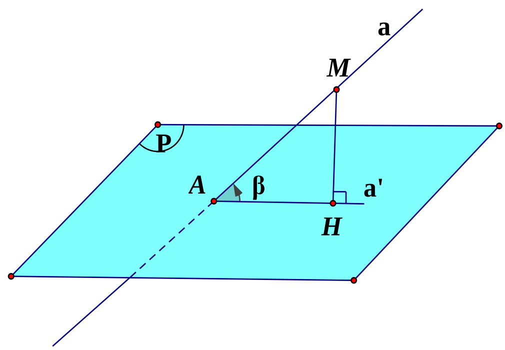
Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Phương pháp giải toán.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P)

Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì $0^0 \le \alpha \le 90^0$

Đầu tiên tìm giao điểm của d và (P) gọi là điểm A.

Trên d chọn điểm B khác A , dựng BH vuông góc với (P) tại H. Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P).



Vậy góc giữa d và (P) là góc BAH.

Nếu khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng BH vuông góc với (P)) , thì ta sử dụng công thức sau đây . Gọi α là góc giữa d và (P) suy ra :

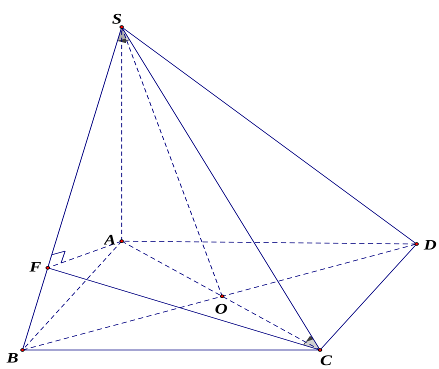
$$\sin\alpha = \frac{d\left(M, mp\left(P\right)\right)}{AM}.$$

Ta phải chọn điểm M trên d, mà có thể tính khoảng cách được đến mặt phẳng (P). Còn A là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ đáy và SA = $a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a). SC và (ABCD). b). SC và (SAB). c). AC và (SBC). d). SB và (SAC).

LỜI GIẢI



a). Có AC là hình chiếu của SC lên mp(ABCD) nên $\left[SC,\left(ABCD\right)\right] = SCA$,

Trong ΔSAC vuông tại A: $\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SCA = 60^0$.

Vậy $\left[SC,\left(ABCD\right)\right] = 60^0$.

b). Có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp\left(SAB\right)$. Vậy SB là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAB) $\Rightarrow \left(SC,\left(SAB\right)\right) = CSB$.

Trong ΔSBC vuông tại B: $\tan \widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \widehat{CSB} = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Vậy $\left(SC,(SAB)\right) = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

c). Dựng $AF \perp SB$ tại F. Có $\begin{cases} AF \perp SB \\ AF \perp BC \end{cases} \Rightarrow AF \perp mp(SBC)$. Vậy FC là hình chiếu vuông góc của AC trên mp(SBC). Vậy $\left(AC,(SBC)\right) = \widehat{ACF}$.

Trong ΔAFC vuông tại F có:

$$\sin \widehat{ACF} = \frac{AF}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{42}}{7}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \widehat{ACF} = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$$

với $\dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{6a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{6a^2} \Rightarrow AF = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Vậy $\left(AC,(SBC)\right) = \arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

d). Có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp mp(SAC)$. Nên SO là hình chiếu của SB lên mp(SAC), nên $\left(SB,(SAC)\right) = \widehat{BSO}$.

Trong ΔSBO vuông tại O: $\tan \widehat{BSO} = \dfrac{OB}{OS} = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}} \Rightarrow \widehat{BSO} = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Với $SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{6a^2 + \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

Vậy $\left(SB,(SAC)\right) = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

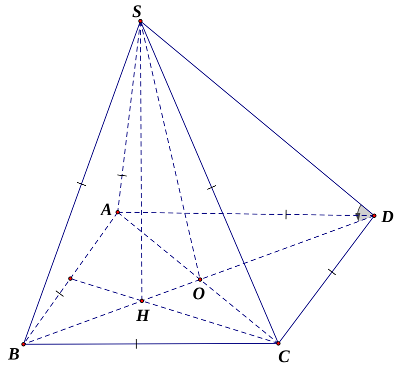
Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi. Biết SD = $a\sqrt{3}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a.

a). Chứng minh (SBD) là mặt phẳng trung trực của AC và SBD là tam giác vuông.

b). Xác định góc giữa SD và mp(ABCD).

LỜI GIẢI

a). Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABCD).



Theo đề bài $SA = SB = SC$, Suy ra $HA = HB = HC$ (đường xiên bằng nhau thì hình chiếu bằng nhau). Vậy H thuộc BD (BD là đường trung trực của đoạn AC).

Vì $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SH\left(SH \subset (SBD)\right) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

Từ $AC \perp mp(SBD)$ & $(SBD) \cap AC = O$, với O là trung điểm của AC. Vậy (SBD) là mp trung trực của đoạn AC.

Ta có $\Delta SAC = \Delta BAC(c.c.c) \Rightarrow SO = BO$ (2 đường trung tuyến xuất phát từ 2 đỉnh tương ứng bằng nhau)

Trong Δ SBD: có SO là đường trung tuyến và $SO = \frac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S .

ΔSBD vuông tại S nên: $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SD^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

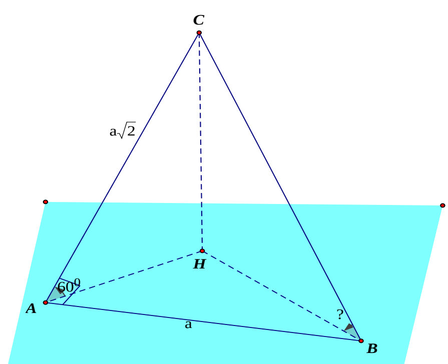
b). HD là hình chiếu của SD trên mp(ABCD), nên $\left[SD,(ABCD)\right] = SDH$.

Trong tam giác vuông SHD: $\sin SDH = \frac{SH}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow SDH = 30^0$

Vậy $\left[SD,(ABCD)\right] = 30^0$.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a nằm trong mp(P), cạnh AC = $a\sqrt{2}$ và tạo với (P) một góc 60^0. Tính góc giữa BC và (P).

LỜI GIẢI



$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên mp (P).

AH là hình chiếu vuông góc của AC trên mp(P).

$\left[AC,(P)\right] = CAH = 60^0$,

$\sin CAH = \frac{CH}{CA} \Rightarrow CH = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

BH là hình chiếu vuông góc của BC trên mp(P). $\left[BC,(P)\right] = CBH$

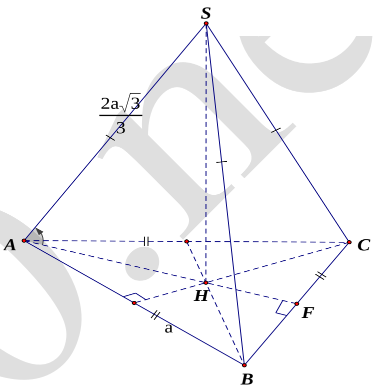
$$\sin CBH = \frac{CH}{CB} = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right):\left(a\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CBH = 45^0$$

Câu 4: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a.

a). Gọi H là hình chiếu của S trên mp(ABC). Tính SH.

b). Tính góc giữa SA và (ABC).

LỜI GIẢI



a). Vì H là hình chiếu của S trên (ABC) và $SA = SB = SC \Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, vì ABC đều nên H cũng là trọng tâm và trực tâm.

Nên có $AH = \frac{2}{3}AF = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

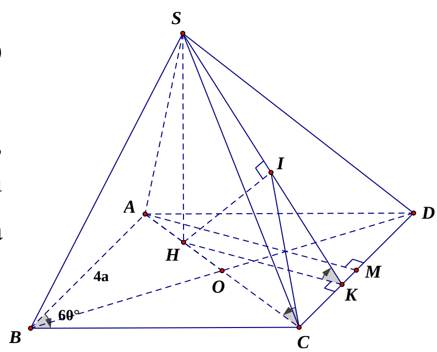
$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a$$

b). AH là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC), nên $\left[SA,(ABC)\right] = SAH$

Trong ΔSAH vuông tại H: $\tan SAH = \frac{SH}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow SAH = 60^0$.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh 4a, góc $ABC = 60^0$, H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABCD) là trung điểm của OA, góc giữa mp(SCD) và đáy (ABCD) bằng 60^0. Tính cosin của góc tạo bởi OA và (SCD).

LỜI GIẢI



Vì $ABC = 60^0$ nên tam giác ABC và ACD đều, nên $AC = 4a, BO = 2a\sqrt{3} \Rightarrow BD = 4a\sqrt{3}$

Gọi M trung điểm của CD có $AM \perp CD$, dựng $HK \perp CD, (K \in CD)$. Suy ra $CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK$. Vậy góc giữa mp(SCD) và đáy (ABCD) là góc $SKH = 60^0$.

Trong ΔCAM có $\frac{CH}{CA}=\frac{HK}{AM}=\frac{3}{4}\Rightarrow HK=\frac{3}{4}AM=\frac{3}{4}\cdot\frac{4a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Có $\tan SKH=\frac{SH}{HK}\Rightarrow SH=HK\tan 60^0=\frac{3a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{9a}{2}$.

Hai mặt phẳng (SCD) và (SHK) vuông góc với nhau theo giao tuyến SK. Dựng $HI\perp SK,(I\in SK)\Rightarrow HI\perp\left(SCD\right)$.

Suy ra CI là hình chiếu vuông góc của HC trên mp(SCD), vậy góc giữa AO và (SCD) là góc HCI.

Trong ΔSHK có $\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HK^2}=\frac{16}{81a^2}\Rightarrow HI=\frac{9a}{4}$.

Trong ΔHIC vuông tại I có $CI=\sqrt{HC^2-HI^2}=\sqrt{\left(3a\right)^2-\left(\frac{9a}{4}\right)^2}=\frac{3a\sqrt{7}}{4}$.

$\cos HCI=\frac{CI}{CH}=\frac{\frac{3a\sqrt{7}}{4}}{3a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Vậy $\cos\left(SO,(SCD)\right)=\frac{\sqrt{7}}{4}$.