CHUYÊN ĐỀ: BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

VẤN ĐỀ I: BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Bài 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{3x+1}{2}-\frac{3-x}{3}\le\frac{x+1}{4}-\frac{2x-1}{3}$ b) $-2x+\frac{3}{5}>\frac{3(2x-7)}{3}$

c) $(x + 2)(2x - 1) - 2 \le x^2 + (x - 1)(x + 3)$

Giải: a) $\frac{3x+1}{2}-\frac{3-x}{3}\le\frac{x+1}{4}-\frac{2x-1}{3} \Leftrightarrow 6(3x + 1) - 4(3 - x) \le 3(x + 1) - 4(2x - 1)$

$\Leftrightarrow 18x + 6 - 12 + 4x \le 3x + 3 - 8x + 4 \Leftrightarrow 18x + 4x - 3x + 8x \le 3 + 4 - 6 + 12$

$\Leftrightarrow 27x \le 13 \Leftrightarrow x\le\frac{13}{27}$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $x\le\frac{13}{27}$ hay $T = (-\infty; \frac{13}{27}]$

b) $-2x+\frac{3}{5}>\frac{3(2x-7)}{3} \Leftrightarrow 15(-2x) + 3.3 > 3.5(2x - 7) \Leftrightarrow -30x + 9 > 30x - 105$

$\Leftrightarrow -30x - 30x > -105 - 9 \Leftrightarrow -60x > -114 \Leftrightarrow x < \frac{19}{10}$.

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x < \frac{19}{10}$ hay $T = (-\infty; \frac{19}{10})$

c) $(x + 2)(2x - 1) - 2 \le x^2 + (x - 1)(x + 3) \Leftrightarrow 2x^2 - x + 4x - 2 - 2 \le x^2 + x^2 + 3x - x - 3$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 4x - 2 - 2 - x^2 - x^2 - 3x + x + 3 \le 0 \Leftrightarrow x - 1 \le 0 \Leftrightarrow x \le 1$

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x \le 1$ hay $T = (-\infty; 1]$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x^2+x+1}{x^2+2}>\frac{x^2+x}{x^2+1}$ b) $\sqrt{x^2+2x+2}>\sqrt{x^2-2x+3}$

Giải: a) Vì $x^2 + 2 > 0$, $x^2 + 1 > 0$, ta có: $\frac{x^2+x+1}{x^2+2} > \frac{x^2+x}{x^2+1} \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 + 1) > (x^2 + x)(x^2 + 2)$

$\Leftrightarrow x^4 + x^2 + x^3 + x + x^2 + 1 > x^4 + 2x^2 + x^3 + 2x \Leftrightarrow -x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x > 1$ hay $T = (1; +\infty)$

b) Vì $x^2 + 2x + 2 > 0$, $x^2 - 2x + 3 > 0$, ta có: $(\sqrt{x^2+2x+2})^2 > (\sqrt{x^2-2x+3})^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 > x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow 4x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x > \frac{1}{4}$ hay $T = \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$

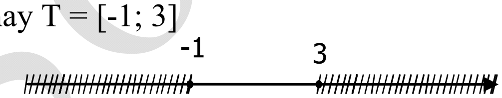
Bài 3: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3-x \ge 0 \\ x+1 \ge 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{4x-2}{3} < x-6 \\ \frac{1}{2}(3x-1) < 2x+5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{1}{3}(2x+3) < 2 - \frac{x+5}{2} - \frac{x}{6} \\ 1 - \frac{x+5}{8} + \frac{4-x}{2} > 3x - \frac{1}{4}(x+1) \end{cases}$

Giải: a) * *Cách 1:* $\begin{cases} 3-x \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$

Vậy: Nghiệm của hệ BPT là: $-1 \le x \le 3$ hay T = [-1; 3]

- *Cách 2:* * $3 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 3$

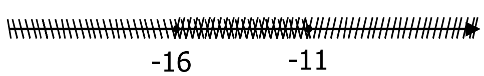


* $x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$

Vậy: Nghiệm của hệ BPT là: $-1 \le x \le 3$ hay T = [-1; 3]

b) * *Cách 1:* $\begin{cases} \frac{4x-2}{3} < x-6 \\ \frac{1}{2}(3x-1) < 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2 < 3x-18 \\ 3x-1 < 4x+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -16 \\ -x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -16 \\ x > -11 \end{cases} \Leftrightarrow$ vô nghiệm

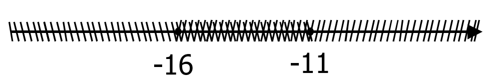
Vậy: Hệ BPT vô nghiệm



- *Cách 2:* * $\frac{4x-2}{3} < x - 6 \Leftrightarrow 4x - 2 < 3x - 18 \Leftrightarrow x < -16$

* $\frac{3x-1}{2} < 2x + 5 \Leftrightarrow 3x - 1 < 4x + 10 \Leftrightarrow -x < 11 \Leftrightarrow x > -11$

Vậy: Hệ BPT vô nghiệm



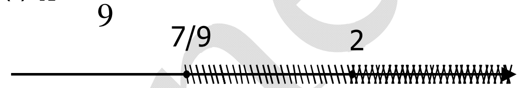
c) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{1}{3}(2x+3)<2-\dfrac{x+5}{2}-\dfrac{x}{6} \\ 1-\dfrac{x+5}{8}+\dfrac{4-x}{2}>3x-\dfrac{1}{4}(x+1) \end{cases}$

* $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{1}{3}(2x+3)<2-\dfrac{x+5}{2}-\dfrac{x}{6} \Leftrightarrow 3(x-1)-2(2x+3)<2.6-3(x+5)-x$

$\Leftrightarrow 3x-3-4x-6<12-3x-15-x \Leftrightarrow 2x<6 \Leftrightarrow x<2$

* $1-\dfrac{x+5}{8}+\dfrac{4-x}{2}>3x-\dfrac{1}{4}(x+1) \Leftrightarrow 8.1-(x+5)+4(4-x)>8.3x-2(x+1)$

$\Leftrightarrow 8-x-5+16-4x>24x-2x-2 \Leftrightarrow -27x>-21 \Leftrightarrow x<\dfrac{7}{9}$



Vậy: Nghiệm của hệ BPT là: $x<\dfrac{7}{9}$ hay $T=(-\infty;\dfrac{7}{9})$

II: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{x-2}{3}<\dfrac{1-2x}{4}$

b) $\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-1}{4}\geq 3+\dfrac{x}{2}$

c) $(2x-1)(x+3)-3x+1\leq(x-1)(x+3)+x^2-5$

d) $x(7-x)+6(x-1)<x(2-x)$

e) $2(x-1)+x>\dfrac{x+3}{3}+3$

f) $\dfrac{2x+5}{3}-3\leq\dfrac{3x-7}{4}+x+2$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+4x+11}<\sqrt{x^2-5x+29}$

b) $\dfrac{x^2-x+10}{5+2x^2}>\dfrac{1}{2}$

Bài 3: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7}<4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2}<2x+5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 15x-2>2x+\dfrac{1}{3} \\ 2(x-4)<\dfrac{3x-14}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-5>\dfrac{10x-3}{2} \\ x+5>\dfrac{3x-7}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x+\dfrac{3}{5}>\dfrac{2}{3}(2x-7) \\ x-\dfrac{1}{2}<\dfrac{5}{2}(3x-1) \end{cases}$

e) $\begin{cases} 45x-2>6x+\dfrac{1}{3} \\ 2(3x-4)<\dfrac{9x-14}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{4x+5}{6}<x-3 \\ 2x+3>\dfrac{7x-4}{3} \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x+1 \geq 2x+7 \\ 4x+3 > 2x+19 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2-5x \geq x-10 \\ 2x-3 < -x+6 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x-3 \leq 0 \\ x-4 \leq 3x \end{cases}$

VẤN ĐỀ II: DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I: LÝ THUYẾT

Quy tắc: "**Phải** cùng, **Trái** trái theo dấu hệ số a" hoặc "**Trước** trái, **Sau** cùng theo dấu hệ số a"

+ Bảng xét dấu nhị thức y = f(x) = ax + b

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f(x) = ax + b		Trái dấu với hệ số a	0	Cùng dấu với hệ số a	

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Xét dấu các nhị thức sau:

a) f(x) = – 3x + 6 b) f(x) = (– 2x + 3)(x – 2) c) f(x) = (4x – 1)(3x + 5)(– 2x + 7)

d) f(x) = $4x^2$ – 1 e) f(x) = x(3x + 6)$(x – 3)^2$

Giải: a) f(x) = – 3x + 6; Ta có: $-3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f(x)		+	0	–	

Vậy: + f(x) > 0 khi $x \in (-\infty; 2)$ + f(x) < 0 khi $x \in (2; +\infty)$ + f(x) = 0 khi x = 2

b) f(x) = (– 2x + 3)(x – 2); Ta có: * $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$; * $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		3/2		2		$+\infty$
– 2x + 3		+	0	–	|	–	
x – 2		–	|	–	0	+	
f(x)		–	0	+	0	–	

Vậy: + f(x) > 0 khi $x \in (\frac{3}{2}; 2)$ + f(x) < 0 khi $x \in (-\infty; \frac{3}{2})$ hoặc $x \in (2; +\infty)$

+ $f(x) = 0$ khi $x = \frac{3}{2}$ hoặc $x = 2$

* *Cách khác*: Dùng quy tắc ***đan dấu*** : $a_1.a_2 = -2.1 = -2 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ trên $(2; +\infty)$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		3/2		2		$+\infty$
f(x)		–	0	+	0	–	

c) $f(x) = (4x-1)(3x+5)(-2x+7)$

Ta có: * $4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$; * $3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$; * $-2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		– 5/3		1/4		7/2		$+\infty$
4x – 1		–		–	0	+		+	
3x + 5		–	0	+		+		+	
– 2x + 7		+		+		+	0	–	
f(x)		+	0	–	0	+	0	–	

Vậy: + $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -\frac{5}{3})$ hoặc $x \in (\frac{1}{4}; \frac{7}{2})$ + $f(x) < 0$ khi $x \in (-\frac{5}{3}; \frac{1}{4})$ hoặc $x \in (\frac{7}{2}; +\infty)$

+ $f(x) = 0$ khi $x = \frac{1}{4}$ hoặc $x = -\frac{5}{3}$ hoặc $x = \frac{7}{2}$

* *Cách khác*: Dùng quy tắc ***đan dấu*** : $a_1.a_2.a_3 = 4.3.(-2) = -24 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ trên $(\frac{7}{2}; +\infty)$

x	$-\infty$		– 5/3		1/4		7/2		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	0	–	

d) $f(x) = 4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$; Ta có: * $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$; * $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-1/2$		1/2		$+\infty$
2x + 1		–	0	+		+	
2x – 1		–		–	0	+	
f(x)		+	0	–	0	+	

Vậy: + f(x) > 0 khi $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$ hoặc $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$

+ f(x) < 0 khi $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ + f(x) = 0 khi $x = -\frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{1}{2}$

e) $f(x) = x(3x + 6)(x - 3)^2$; Ta có: * x = 0; * $3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$; * $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
x		–		–	0	+		+	
3x + 6		–	0	+		+		+	
$(x-3)^2$		+		+		+	0	+	
f(x)		+	0	–	0	+	0	+	

Vậy: + f(x) > 0 khi $x \in (-\infty; -2)$ hoặc $x \in (0; +\infty)$

+ f(x) < 0 khi $x \in (-2; 0)$ + f(x) = 0 khi x = – 2 hoặc x = 0 hoặc x = 3

Bài tập 2: Xét dấu các nhị thức sau:

a) $f(x) = \frac{2x}{3x-4}$ b) $f(x) = \frac{(4x-2)(1-3x)}{5x-10}$ c) $f(x) = \frac{3}{2-x} - 1$

Giải: a) $f(x) = \frac{2x}{3x-4}$; Ta có: * $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; * $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		$4/3$		$+\infty$
2x		–	0	+		+	
3x – 4		–		–	0	+	
f(x)		+	0	–	‖	+	

Vậy: + f(x) > 0 khi $x \in (-\infty; 0)$ hoặc $x \in (\frac{4}{3}; +\infty)$ + f(x) < 0 khi $x \in (0; \frac{4}{3})$

+ f(x) = 0 khi x = 0 + f(x) không xác định khi $x = \frac{4}{3}$

* *Cách khác:* Dùng quy tắc ***đan dấu:*** $a_1.a_2 = 2.3 = 6 > 0 \Rightarrow$ f(x) > 0 trên $(\frac{4}{3}; +\infty)$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	$4/3$	$+\infty$

f(x)		+	0	–	‖	+	

b) $f(x) = \dfrac{(4x-2)(1-3x)}{5x-10}$; Ta có: * $4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$; * $1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$; * $5x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1/3		1/2		2		$+\infty$
4x – 2		–	|	–	0	+	|	+	
1 – 3x		+	0	–	|	–	|	–	
5x – 10		–	|	–	|	–	0	+	
f(x)		+	0	–	0	+	‖	–	

Vậy: + f(x) > 0 khi $x \in (-\infty; \dfrac{1}{3})$ hoặc $x \in (\dfrac{1}{2}; 2)$ + f(x) < 0 khi $x \in (\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2})$ hoặc $x \in (2; +\infty)$

+ f(x) = 0 khi $x = \dfrac{1}{3}$ hoặc $x = \dfrac{1}{2}$ + f(x) không xác định khi x = 2

* *Cách khác:* Dùng quy tắc ***đan dấu:*** $a_1.a_2.a_3 = 4.(-3).5 = -60 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ trên $(2; +\infty)$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1/3		1/2		2		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	‖	–	

c) $f(x) = \dfrac{3}{2-x} - 1 = \dfrac{3 - 1.(2-x)}{2-x} = \dfrac{1+x}{2-x}$; Ta có: * $1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$; * $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		–1		2		$+\infty$
1 + x		–	0	+	|	+	
2 – x		+	|	+	0	–	
f(x)		–	0	+	‖	–	

Vậy: + f(x) > 0 khi $x \in (-1; 2)$ + f(x) < 0 khi $x \in (-\infty; -1)$ hoặc $x \in (2; +\infty)$

+ f(x) = 0 khi x = –1 + f(x) không xác định khi x = 2

Bài tập 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{8x-5}{3-x} \geq 0$ b) $\dfrac{x+9}{x-1} > 5$ c) $\dfrac{x^2+2x+5}{x+1} \geq x-3$

d) $\dfrac{3}{2x-1} \leq \dfrac{1}{x+2}$ e) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} > \dfrac{1}{x-2}$ f) $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{2}{(x-2)^2}$

Giải: a) $\frac{8x-5}{3-x} \geq 0$; Ta có: * $8x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{8}$; * $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		5/8	$\leq$ **x** <	3		$+\infty$
$8x - 5$		–	0	+	|	+	
$3 - x$		+	|	+	0	–	
VT		–	0	+		–	

Vậy: Nghiệm của BPT là: $\frac{5}{8} \leq x < 3$ hay $T = \left[\frac{5}{8}; 3\right)$

* *Cách khác:* (Sử dụng quy tắc ***đan dấu***): $a_1.a_2 = 8.(-1) = -8 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ trên $(3; +\infty)$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		5/8	$\leq$ **x** <	3		$+\infty$
VT		–	0	+		–	

b) $\frac{x+9}{x-1} > 5 \Leftrightarrow \frac{x+9}{x-1} - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+9-5(x-1)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-4x+14}{x-1} < 0$

* *Cách 1*: Ta có: * $-4x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$; * $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	**x** <	1	**hoặc**	7/2	< **x**	$+\infty$
$-4x + 14$		+	|	+	0		
$x - 1$		–	0	+	|	+	
VT		–		+	0	–	

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x < 1$ hoặc $x > \frac{7}{2}$ hay $T = (-\infty; 1) \cup (\frac{7}{2}; +\infty)$

* *Cách 2:* (Sử dụng quy tắc ***đan dấu***):

c) $\frac{x^2+2x+5}{x+1} \geq x - 3 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+5}{x+1} - x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+5-x(x+1)+3(x+1)}{x+1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+5-x^2-x+3x+3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x+8}{x+1} \geq 0$, Ta có:* 4x + 8 = 0 $\Leftrightarrow$ x = –2; * x + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ x = – 1

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	**x $\leq$**	-2	**hoặc**	-1	**< x**	$+\infty$
VT		+	0	–		+	

Vậy: Nghiệm của BPT là: x $\leq$–2 hoặc x > – 1 hay T = $(-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$

d) $\dfrac{3}{2x-1} \leq \dfrac{1}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{1}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(x+2)-1.(2x-1)}{(2x-1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+6-2x+1}{(2x-1)(x+2)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+7}{(2x-1)(x+2)} \leq 0$, Ta có: * x + 7 = 0 $\Leftrightarrow$ x = – 7; * 2x – 1 = 0 $\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{1}{2}$; * x + 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = – 2

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	x$\leq$	-7	hoặc	-2	< x <	1/2	$+\infty$
VT		–		+		–		+

Vậy: Nghiệm của BPT là: x $\leq$–7 hoặc –2 < x < $\dfrac{1}{2}$ hay T = $(-\infty;-7] \cup (-2; \dfrac{1}{2})$

e) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} > \dfrac{1}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1(x+2)(x-2)+1(x-1)(x-2)-1(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4+x^2-2x-x+2-x^2+x-2x+2}{(x+2)(x-1)(x-2)} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x}{(x+2)(x-1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-4)}{(x+2)(x-1)(x-2)} > 0$

Ta có: * x = 0; * x – 4 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 4; * x + 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = – 2; * x – 1 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 1; * x – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
VT		–		+		–		+		–		+	

Vậy: Nghiệm của BPT là: –2 < x < 0 hoặc 1 < x < 2 hoặc x > 4 hay T = $(-2; 0) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$

f) $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{2}{(x-2)^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{(x-2)^2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1.(x-2)^2-2.(x+2)}{(x+2)(x-2)^2} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+4-2x-4}{(x-2)(x+2)^2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6x}{(x-2)(x+2)^2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-6)}{(x-2)(x+2)^2} < 0$

Ta có: * x = 0; * x – 6 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 6; * x – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2; * x + 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = – 2

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	0	2	6	$+\infty$
VT	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Vậy: Nghiệm của BPT là: x < – 2 hoặc – 2< x < 0 hoặc 2 < x < 6 hay T = $(-\infty; -2)\cup(-2; 0)\cup(2; 6)$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $|3x-2| > -8$ b) $|2-5x| \le 12$ c) $|4x+4| > 12$

d) $|-2x+1| + x - 3 < 5$ e) $|1-4x| \ge 2x+1$ f) $2 - 2|x-4| \le x$

Giải: a) $|3x-2| > -8$; vì $|3x-2| \ge 0$ nên $|3x-2| > -8, \forall x$ .Vậy: Tập nghiệm của BPT là: T = $\mathbb{R}$

b) $|2-5x| \le 12$

* *Cách 1:* Vận dụng công thức: $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow -g(x) \le f(x) \le g(x)$ ***hay*** $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases}$

Ta có: $|2-5x| \le 12 \Leftrightarrow -12 \le 2-5x \le 12 \Leftrightarrow -14 \le -5x \le 10 \Leftrightarrow \dfrac{14}{5} \ge x \ge -2$

Vậy: Nghiệm của BPT là: $-2 \le x \le \dfrac{14}{5}$

* *Cách 2:* Vận dụng công thức: $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ [f(x)+g(x)][f(x)-g(x)] \le 0 \end{cases}$

Ta có: $|2-5x| \le 12 \Leftrightarrow (2-5x+12)(2-5x-12) \le 0 \Leftrightarrow (-5x+14)(-5x-10) \le 0$

$* -5x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{14}{5}$; $* -5x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	$\le x \le$	$14/5$	$+\infty$
VT	$+$		$-$		$+$

Vậy: Nghiệm của BPT là: $-2 \le x \le \dfrac{14}{5}$ hay T = $[-2; \dfrac{14}{5}]$

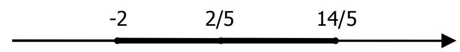
* *Cách 3*: + Nếu $2 - 5x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \dfrac{2}{5}$, ta có: (1) $\Leftrightarrow 2 - 5x \le 12 \Leftrightarrow -5x \le 10 \Leftrightarrow x \ge -2$

Giao với đk $x \le \dfrac{2}{3}$, ta được: $-2 \le x \le \dfrac{2}{5}$ (a)

+ Nếu 2 – 5x < 0 $\Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$, ta có: –2 + 5x ≤ 12 $\Leftrightarrow$ 5x ≤ 14 $\Leftrightarrow x \le \frac{14}{5}$

Giao với đk $x > \frac{2}{5}$, ta được: $\frac{2}{5} < x \le \frac{14}{5}$ (b)

Hợp (a) và (b), ta được: $-2 \le x \le \frac{14}{5}$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $-2 \le x \le \frac{14}{5}$



c) $|4x+4| > 12$

* *Cách 1:* Vận dụng công thức: $|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right.$

Ta có: $|4x+4| > 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+4 > 12 \\ 4x+4 < -12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x > 8 \\ 4x < -16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -4 \end{array}\right.$

Vậy: Nghiệm của BPT là: $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -4 \end{array}\right.$ hay x < – 4 hoặc x > 2

* *Cách 2:* Vận dụng công thức: $|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow [f(x)+g(x)][f(x)-g(x)] \ge 0$

Ta có: $|4x+4| > 12 \Leftrightarrow (4x+4+12)(4x+4-12) > 0 \Leftrightarrow (4x+16)(4x-8) > 0$

* 4x + 16 = 0 $\Leftrightarrow$ x = – 4; * 4x – 8 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2

Bảng xét dấu:

x	–∞ x < – 4	hoặc 2	< x +∞
VT	+	–	+

Vậy: Nghiệm của BPT là: x < – 4 hoặc x > 2 hay T = (–∞; – 4) ∪ (2; + ∞)

d) $|-2x+1| + x - 3 < 5$

* *Cách 1:* Ta có: $|-2x+1| + x - 3 < 5 \Leftrightarrow |-2x+1| < 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 < 8-x \\ -2x+1 > -8+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+x < 8-1 \\ -2x-x > -8-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x < 7 \\ -3x > -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -7 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < x < 3$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $-7 < x < 3$ hay T = (–7; 3)

* *Cách 2:* Ta có: $|-2x+1| + x - 3 < 5 \Leftrightarrow |-2x+1| < 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x > 0 \\ (-2x+1+8-x)(-2x+1-8+x) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 8 \\ (-3x+9)(-x-7) < 0 \end{cases}$ * –3x + 9 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 3; * –x – 7 = 0 $\Leftrightarrow$ x = – 7

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$ $\quad -7$	$< x <$ $\quad 3$	8	$+\infty$
VT	+	–	+	+

Vậy: Nghiệm của BPT là: $-7 < x < 3$ hay T = (–7; 3)

e) Ta có: $|1-4x| \geq 2x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-4x \geq 2x+1 \\ 1-4x \leq -2x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6x \geq 0 \\ -2x \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$

Vậy: Nghiệm của BPT là: $\left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$ hay $x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$ hay T = $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

f) Ta có: $2-2|x-4| \leq x \Leftrightarrow 2-x \leq 2|x-4| \Leftrightarrow 2|x-4| \geq 2-x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(x-4) \geq 2-x \\ 2(x-4) \leq -2+x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-8 \geq 2-x \\ 2x-8 \leq -2+x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x \geq 10 \\ x \leq 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{10}{3} \\ x \leq 6 \end{array}\right.$

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: T = $\mathbb{R}$

Ghi nhớ: **+ Dấu $\{$: lấy giao "gạch bỏ"**
+ Dấu $[$: lấy hợp "tô đậm"
1. Gặp trường hợp: "x ≤ a" hoặc "x ≥ a"
a) Nếu "gạch bỏ" thì gạch phần "lõm"
b) Nếu "tô đậm" thì tô phần "lồi"

2. Gặp trường hợp: "x ≤ b hoặc x ≥ a"
a) Nếu "gạch bỏ" thì gạch phần "trong"
b) Nếu "tô đậm" thì tô phần "ngoài"
3. Gặp trường hợp: "$b \leq x \leq a$"
a) Nếu "gạch bỏ" thì gạch phần "ngoài"
b) Nếu "tô đậm" thì tô phần "trong"

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Xét dấu các nhị thức sau:

a) f(x) = – 4x + 12 b) f(x) = (2x – 1)(x + 3) c) f(x) = (– 3x – 3)(x + 2)(x – 3)

d) f(x) = –x(2x – 4)^2(x – 5) e) f(x) = 1 – 9x^2

Bài 2: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = \dfrac{-4}{3x+1} - \dfrac{3}{2-x}$ b) $f(x) = \dfrac{4-3x}{2x+1}$ c) $f(x) = \dfrac{3x}{2-4x}$

d) $f(x) = 1 - \dfrac{2-x}{3x-2}$ e) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(1-x)(x+2)}$ f) $f(x) = \dfrac{x(x-3)^2}{(x-5)(2-x)}$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $x(2x-4)(3x+2) \geq 0$ b) $x^2(3-x)(4x+2) < 0$ c) $x(x-5) - x(x-2) < 0$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{2}{x-1} \leq \dfrac{5}{2x-1}$ b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+4} < \dfrac{3}{x+3}$ c) $\dfrac{3}{1-x} \geq \dfrac{5}{2x+1}$

d) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{(x-1)^2}$ e) $\dfrac{(3-x)(x-2}{x+1} \le 0$ f) $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1} < 1$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau:

a) $|-4x+7| > -10$ b) $|2x+3| < -1$ c) $|5-2x| \le 11$

d) $|3x+2| - 7 > 0$ e) $|5x-4| \ge 6$ f) $|5-8x| < 3$

Bài 6: Giải các bất phương trình sau:

a) $|2x-1| - 3x < 5$ b) $5x - |-2x+4| > 3$ c) $|2x-1| - 2 \le x$

d) $5 - 3|2x+7| \ge x - 1$ e) $|3-6x| - 1 \ge 2x + 2$ f) $\dfrac{|2x-1|}{(x+2)(x-2)} > \dfrac{1}{2}$

VẤN ĐỀ III: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 2 ẨN: ax + by $\le$ c ($\ge$ c) (*)

I: LÝ THUYẾT

: Quy tắc thực hành ***biểu diễn hình học tập nghiệm*** (hay ***biểu diễn miền nghiệm***)

+ *Bước 1*: Vẽ đường thẳng (d): ax + by = 0 (cho x = 0 $\Rightarrow$ y = ?: A(0; ?); cho y = 0 $\Rightarrow$ x = ?: B(?; 0))

+ *Bước 2*: Lấy 1 điểm không thuộc đường thẳng:

- Nếu đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ O thì lấy điểm M(1; 0) hoặc M(0; 1)
- Nếu đường thẳng (d) không đi qua gốc tọa độ O thì lấy điểm O(0; 0)
- Nếu đường thẳng (d) trùng với trục Ox (y = 0) thì lấy điểm M(0; 1) hoặc M(0; –1)
- Nếu đường thẳng (d) trùng với trục Oy (x = 0) thì lấy điểm M(1; 0) hoặc M(–1; 0)

+ *Bước 3*: Thay tọa độ điểm M vào bất phương trình (*)

+ *Bước 4*: * Nếu "hợp lí" thì miền chứa điểm M là miền nghiệm (miền còn lại gạch bỏ)

* Nếu "vô lí" thì miền chứa điểm M không phải là miền nghiệm (gạch bỏ) (miền còn lại là miền nghiệm

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình sau:

a) 2x + 3y $\le$ 6 b) – 3x + 2y > 0 c) 4(x + 1) – 2(y – 3) < 10 – 2y

Giải:

a) $2x + 3y \leq 6$

+ Vẽ đường thẳng (d): $2x + 3y = 6$: đi qua 2 điểm A(0; 2), B(3; 0)

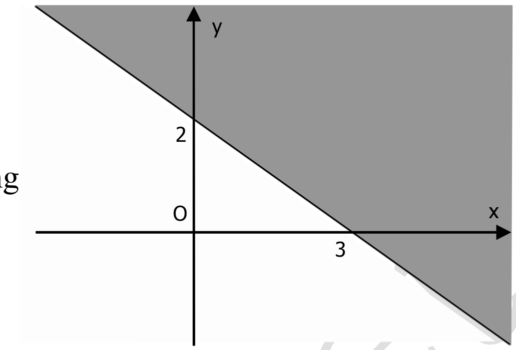
+ Chọn điểm O(0; 0) thay vào bất phương trình,

ta được: $0 \leq 6$: thỏa

Vậy: Miền chứa điểm gốc tọa độ O(0; 0)

(miền không tô đậm) là miền nghiệm của bất phương

(kể cả biên)



b) $-3x + 2y > 0$

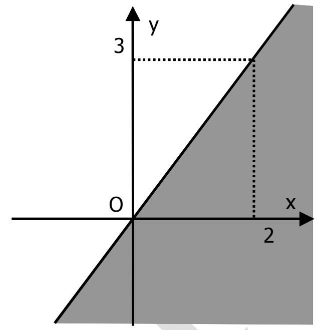
+ Vẽ đường thẳng (d): $-3x + 2y = 0$: Đi qua 2 điểm O(0; 0), A(2; 3)

+ Chọn điểm M(1; 0) thay vào bất phương trình,

ta được: $-3 > 0$: không thỏa

Vậy: Miền không chứa điểm M(1; 0) (miền không tô đậm)

là miền nghiệm của bất phương trình đã cho (không kể biên)



c) $4(x + 1) - 2(y - 3) < 10 - 2y \Leftrightarrow 4x + 4 - 2y + 6 < 10 - 2y$

$\Leftrightarrow 4x < 0$

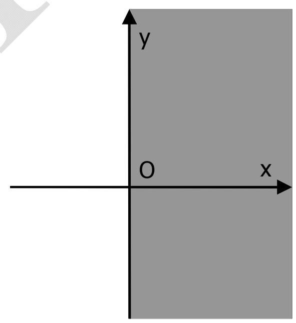
+ Vẽ đường thẳng (d): $4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (chính là trục tung Oy)

+ Chọn điểm M(–1; 0) thay vào bất phương trình,

ta được: $-4 < 0$: thỏa

Vậy: Miền chứa điểm M(–1; 0) (miền không tô đậm)

là miền nghiệm của bất phương trình đã cho (không kể biên)

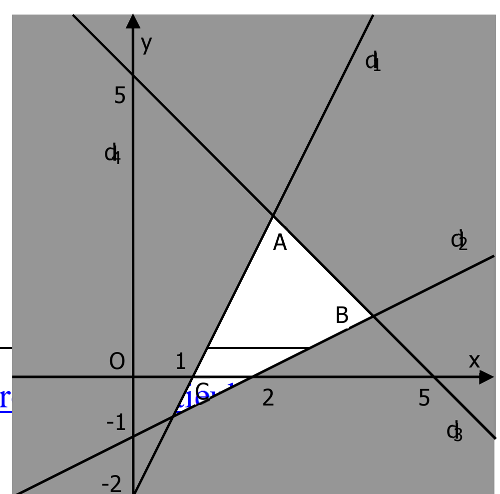


Bài 2: Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - y \ge 2 \\ x \le 2y + 2 \\ x + y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y - 6 \ge 0 \\ 2(x-1) + \dfrac{3y}{2} \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$

Giải: a) $\begin{cases} 2x - y \ge 2 \\ x \le 2y + 2 \\ x + y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$

+ Vẽ các đường thẳng:



(d_1): $2x - y = 2$: Đi qua 2 điểm (0; –2), (1; 0)

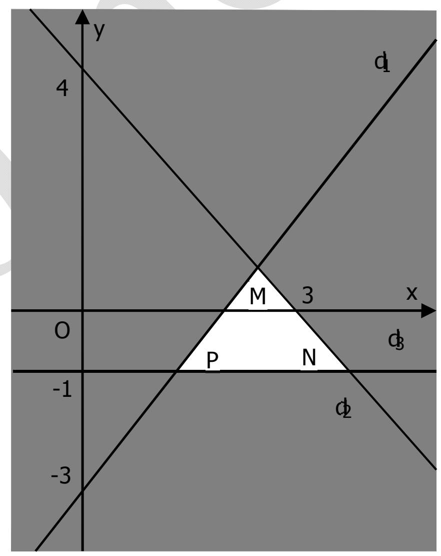
(d_2): $x - 2y = 2$: Đi qua 2 điểm (0; –1), (2; 0)

(d_3): $x + y = 5$: Đi qua 2 điểm (0; 5), (5; 0)

(d_4): $x = 0$: (là trục tung Oy)

Vậy: Miền nghiệm của bất phương trình là tam giác ABC

b) $\begin{cases} 3x - 2y - 6 \geq 0 \\ 2(x-1) + \dfrac{3y}{2} \leq 4 \\ y \geq -1 \end{cases}$



+ Vẽ các đường thẳng:

(d_1): $3x - 2y - 6 = 0$: qua 2 điểm (0; –3), (2; 0)

(d_2): $2(x-1) + \dfrac{3y}{2} = 4$

$\Leftrightarrow 4x + 3y = 12$: qua 2 điểm (0; 4), (3; 0)

(d_3): $y = -1$ (là đường thẳng song song với trục Ox và đi qua điểm có tung độ bằng –1

Vậy: Miền nghiệm của bất phương trình là tam giác MNP

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $x + 4 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$

b) $3(x - 1) + 4(y - 2) > 5x - 3$

c) $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$

d) $3x \geq 6$

Bài 2: Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-3 \\ y<3+x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y\ge 9 \\ x\ge y-3 \\ 2y\ge 8-x \\ y\le 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y+3>0 \\ -2x+3y-6<0 \\ 2x+y+4>0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y-3x>0 \\ x-2y+4<0 \\ 5x+2y+10>0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x\le 10 \\ y\le 9 \\ 2x+y\ge 14 \\ 2x+5y\ge 30 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1>0 \\ 2(x-1)+\dfrac{y}{2}<4 \end{cases}$

VẤN ĐỀ 4: DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI: $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$

I: LÝ THUYẾT

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\begin{cases} \Delta<0\text{(vô nghiệm)} \\ a>0 \end{cases}$ thì $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\begin{cases} \Delta<0\text{(vô nghiệm)} \\ a<0 \end{cases}$ thì $f(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\begin{cases} \Delta=0\text{(nghiệm kép)} \\ a>0 \end{cases}$ thì $f(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\begin{cases} \Delta=0\text{(nghiệm kép)} \\ a<0 \end{cases}$ thì $f(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thì dùng quy tắc:

"Trong trái ngoài cùng theo dấu của hệ số a"

Bảng xét dấu tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		Trái dấu hệ số a	0	Cùng dấu hệ số a	0	Trái dấu hệ số a	

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Xét dấu các tam thức bậc hai

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ b) $f(x) = -x^2 + 2x - 6$ c) $f(x) = 9x^2 - 24x + 16$

d) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ e) $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$ f) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$

g) $f(x) = (4x^2 - 1)(-x^2 + x + 12)$ h) $f(x) = (2x^2 - 2)(3x + 6)$

i) $f(x) = x^2(9 - x^2)(x^2 + 7x - 8)$ j) $f(x) = (x - 2)^2(x^2 - 3x)(x^2 + 5x + 4)$

Giải: a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

* *Cách 1:* Vì f(x) có $\begin{cases} \Delta = -24 < 0 \\ a = 2 > 0 \end{cases}$ Vậy: $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

* *Cách 2:* Vì f(x) vô nghiệm và a = 2 > 0. Vậy: $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 6$

* *Cách 1:* Vì f(x) có $\begin{cases} \Delta = -20 < 0 \\ a = -1 < 0 \end{cases}$ Vậy: $f(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

* *Cách 2:* Vì f(x) vô nghiệm và a = –1 < 0. Vậy: $f(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = 9x^2 - 24x + 16$

* *Cách 1:* Vì f(x) có $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a = 9 > 0 \end{cases}$ Vậy: $f(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

* *Cách 2:* Vì f(x) có nghiệm kép và a = 9 > 0. Vậy: $f(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

* *Cách 1:* Vì f(x) có $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a = -4 < 0 \end{cases}$ Vậy: $f(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

* *Cách 2:* Vì f(x) có nghiệm kép và a = – 4 < 0. Vậy: $f(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$, f(x) có 2 nghiệm $x = \dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$, $x = \dfrac{4+\sqrt{10}}{3}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{4+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

Vậy: + $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; \dfrac{4-\sqrt{10}}{3})$ hoặc $x \in (\dfrac{4+\sqrt{10}}{3}; +\infty)$

+ $f(x) < 0$ khi $x \in (\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}; \dfrac{4+\sqrt{10}}{3})$ + $f(x) = 0$ khi $x = \dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$ hoặc $x = \dfrac{4+\sqrt{10}}{3}$

f) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$, f(x) có 2 nghiệm $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		$1/2$		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy: + $f(x) > 0$ khi $x \in (-2; \frac{1}{2})$ + $f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -2)$ hoặc $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$

+ $f(x) = 0$ khi $x = -2$ hoặc $x = \frac{1}{2}$

g) $f(x) = (4x^2 - 1)(-x^2 + x + 12)$ Ta có: * $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ * $-x^2 + x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc khoảng)

x	$-\infty$		-3		$-1/2$		$1/2$		4		$+\infty$
$4x^2 - 1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2 + x + 12$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy: + $f(x) > 0$ khi $x \in (-3; -\frac{1}{2})$ hoặc $x \in (\frac{1}{2}; 4)$

+ $f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -3)$ hoặc $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ hoặc $x \in (4; +\infty)$

+ $f(x) = 0$ khi $x = -3$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 4$

* *Cách khác:* (dùng quy tắc ***đan dấu***)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		$-1/2$		$1/2$		4		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

h) $f(x) = (2x^2 - 2)(3x + 6)$ Ta có: * $2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; * $3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc ***khoảng***)

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$2x^2 - 2$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$3x + 6$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy: + $f(x) > 0$ khi $x \in (-2; 1)$ hoặc $x \in (1; +\infty)$

+ $f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -2)$ hoặc $x \in (-1; 1)$ + $f(x) = 0$ khi $x = \pm 1$ hoặc $x = -2$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc ***đan dấu***)

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

i) $f(x) = x^2(9 - x^2)(x^2 + 7x - 8)$

Ta có: * $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; * $9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$; * $x^2 + 7x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -8 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc ***khoảng***)

x	$-\infty$		-8		-3		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$9 - x^2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x^2 + 7x - 8$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy: + $f(x) > 0$ khi $x \in (-8; -3)$ hoặc $x \in (3; 4)$

+ $f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -8)$ hoặc $x \in (-3; 0)$ hoặc $x \in (0; 3)$ hoặc $x \in (4; +\infty)$

+ $f(x) = 0$ khi $x = \pm 3$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = -8$ hoặc $x = 1$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc ***đan dấu***)

x	$-\infty$		-8		-3		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

j) $f(x) = (x - 2)^2(x^2 - 3x)(x^2 + 5x + 4)$

Ta có: $(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; * $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$; * $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc ***đan dấu***)

x	$-\infty$		-4		-1		0		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy: + $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -4)$ hoặc $x \in (-1; 0)$ hoặc $x \in (3; +\infty)$

+ $f(x) < 0$ khi $x \in (-4; -1)$ hoặc $x \in (0; 2)$ hoặc $x \in (2; 3)$

+ f(x) = 0 khi x = – 4 hoặc x = – 1 hoặc x = 0 hoặc x = 2 hoặc x = 3

Bài 2: Xét dấu các tam thức bậc hai

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 9}$ b) $f(x) = \dfrac{(2x+1)(x^2 + x - 30)}{-3x^2 + 10x - 3}$ c) $f(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + 10}{(6-2x)^2(4x^2 + 8x)}$

Giải: a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 9}$ Ta có: * $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$; * $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Bảng xét dấu: Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$		-3		$1/2$		1		3		$+\infty$
f(x)		+		–	0	+	0	–		+	

Vậy: + f(x) > 0 khi $x \in (-\infty; -3)$ hoặc $x \in (\frac{1}{2}; 1)$ hoặc $x \in (3; +\infty)$

+ f(x) < 0 khi $x \in (-3; \frac{1}{2})$ hoặc $x \in (1; 3)$

+ f(x) = 0 khi $x = \frac{1}{2}$ hoặc x = 1 + f(x) không xác định khi $x = \pm 3$

b) $f(x) = \dfrac{(2x+1)(x^2 + x - 30)}{-3x^2 + 10x - 3}$

Ta có: * $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$; * $x^2 + x - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -6 \end{array}\right.$; * $-3x^2 + 10x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu: Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$		-6		$-1/2$		$1/3$		3		5		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+		–		+	0	–	

Vậy: + f(x) > 0 ⇔ khi $x \in (-\infty; -6)$ hoặc $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$ hoặc $x \in (3; 5)$

+ f(x) < 0 khi $x \in (-6; -\frac{1}{2})$ hoặc $x \in (\frac{1}{3}; 3)$ hoặc $x \in (5; +\infty)$

+ f(x) = 0 khi x = – 6 hoặc $x = -\frac{1}{2}$ hoặc x = 5 + f(x) không xác định khi $x = \frac{1}{3}$ hoặc x = 3

c) $f(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + 10}{(6-2x)^2(4x^2 + 8x)}$

Ta có: * $-x^2 - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -5 \end{array}\right.$; * $(6 - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$; * $4x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu: Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$		-5		-2		0		2		3		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$		$-$		$+$	0	$-$		$-$	

Vậy: + f(x) > 0 khi $x \in (-5; -2)$ hoặc $x \in (0; 2)$

+ f(x) < 0 khi $x \in (-\infty; -5)$ hoặc $x \in (-2; 0)$ hoặc $x \in (2; 3)$ hoặc $x \in (3; +\infty)$

+ f(x) = 0 khi x = – 5 hoặc x = 2 + f(x) không xác định khi x = – 2 hoặc x = 0 hoặc x = 3

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $4x^2 - 2x + 7 > 0$ b) $x^2 + 4x + 6 < 0$ c) $25x^2 - 20x + 4 > 0$

d) $x^2 + 6x + 9 \le 0$ e) $4x^2 - 12x + 9 \ge 0$ f) $3x^2 + 5x - 8 < 0$

g) $-2x^2 - 3x - 1 \le 0$ h) $3x^2 - 4x > 0$ i) $3 - x^2 \ge 0$

Giải: a) $4x^2 - 2x + 7 > 0$. * *Cách 1:* Tam thức bậc hai $4x^2 - 2x + 7$ vô nghiệm và a = 4 > 0

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: $T = \mathbb{R}$

* *Cách 2:* Tam thức bậc hai $4x^2 - 2x + 7$ có $\Delta = -108 < 0$ và a = 4 > 0

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: $T = \mathbb{R}$

b) $x^2 + 4x + 6 < 0$. * *Cách 1:* Tam thức bậc hai $x^2 + 4x + 6$ vô nghiệm và a = 1 > 0

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: $T = \varnothing$

* *Cách 2:* Tam thức bậc hai $4x^2 - 2x + 7$ có $\Delta = -8 < 0$ và a = 1 > 0

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: $T = \varnothing$

c) $25x^2 - 20x + 4 > 0$. * *Cách 1*: Tam thức bậc hai $25x^2 - 20x + 4$ có nghiệm kép $x = \frac{2}{5}$ và a = 25 > 0

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x \ne \frac{2}{5}$

* *Cách 2:* $25x^2 - 20x + 4 > 0 \Leftrightarrow (5x - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{2}{5}$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $x \ne \frac{2}{5}$

d) $x^2 + 6x + 9 \le 0$. * *Cách 1*: Tam thức bậc hai $x^2 + 6x + 9$ có nghiệm kép x = –3 và a = 1 > 0

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x = -3$

* *Cách 2:* $x^2 + 6x + 9 \le 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = -3$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $x = -3$

e) $4x^2 - 12x + 9 \ge 0$. Tam thức bậc hai $4x^2 - 12x + 9$ có nghiệm kép $x = -\frac{3}{2}$ và a = 4 > 0

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: $T = \mathbb{R}$

Ghi nhớ: $+$ Nếu $(ax+b)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{b}{a}$ $\quad$ $+$ Nếu $(ax-b)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{b}{a}$
$+$ Nếu $(ax+b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ $\quad$ $+$ Nếu $(ax-b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$

f) $3x^2 + 5x - 8 < 0$. * *Cách 1*: Tam thức $3x^2 + 5x - 8$ có 2 nghiệm $x = 1$, $x = -\frac{8}{3}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-8/3$		1		$+\infty$
VT		+		–		+	

Vậy: Nghiệm của BPT là: $-\frac{8}{3} < x < 1$ hay $T = (-\frac{8}{3}; 1)$

* *Cách 2:* Ta có: $3x^2 + 5x - 8 < 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} < x < 1$ (bảng xét dấu làm nháp)

g) $-2x^2 - 3x - 1 \leq 0$ * *Cách 1*: Tam thức $-2x^2 - 3x - 1$ có 2 nghiệm $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		$+\infty$
VT		–		+		–	

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x \leq -1$ hoặc $x \geq -\frac{1}{2}$ hay $T = (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$

* *Cách 2:* Ta có: $-2x^2 - 3x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq -\frac{1}{2}$ (bảng xét dấu làm nháp)

h) $3x^2 - 4x > 0$ * *Cách 1*: Tam thức $3x^2 - 4x$ có 2 nghiệm $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		$4/3$		$+\infty$
VT		+		–		+	

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x < 0$ hoặc $x > \frac{4}{3}$ hay $T = (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{3}; +\infty)$

* *Cách 2:* Ta có: $3x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > \frac{4}{3}$ (bảng xét dấu làm nháp)

i) $3 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-5x+6} \geq 0$ b) $\dfrac{2x^2-16x+27}{x^2-7x+10} \leq 2$ c) $\dfrac{x+1}{x-1}+2 > \dfrac{x-1}{x}$

Giải: a) $\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-5x+6} \geq 0$. Ta có: $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -2 \end{array}\right.$; * $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$	-2		$1/2$		2		3		$+\infty$
VT		+		−		+		−		+

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x \leq -2$ hoặc $\dfrac{1}{2} \leq x < 2$ hoặc $x > 3$ hay $T = (-\infty; -2] \cup [\dfrac{1}{2}; 2) \cup (3; +\infty)$

b) $\dfrac{2x^2-16x+27}{x^2-7x+10} \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-16x+27}{x^2-7x+10} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-16x+27-2(x^2-7x+10)}{x^2-7x+10} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x+7}{x^2-7x+10} \leq 0$. Ta có: * $-2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$; * $x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$	2		$7/2$		5		$+\infty$
VT		+		−		+		−

Vậy: Nghiệm của BPT là: $2 < x \leq \dfrac{7}{2}$ hoặc $x > 5$ hay $T = (2; \dfrac{7}{2}] \cup (5; +\infty)$

c) $\dfrac{x+1}{x-1}+2 > \dfrac{x-1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}+2-\dfrac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x+1)+2x(x-1)-(x-1)(x-1)}{x(x-1)} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+2x^2-2x-x^2+x+x-1}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-x} > 0$

Ta có: * $2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$; * $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$	-1		$1/2$		0		1		$+\infty$
VT		+		–		+		–		+

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x < -1$ hoặc $\frac{1}{2} < x < 0$ hoặc $x > 1$ hay $T = (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; 0) \cup (1; +\infty)$

Ghi nhớ:

1) Để PT có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$

2) Để PT có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

3) Để PT vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

* Xét thêm TH: a = 0

4) Để PT có 2 n₀ phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

5) Để PT có 2 n₀ dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

6) Để PT có 2 n₀ dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

7) Để PT có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

* Xét thêm TH: a = 0

8) Để biểu thức f(x) luôn dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

* Xét thêm TH: a = 0

9) Để biểu thức f(x) luôn âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

* Xét thêm TH: a = 0

10) Định lí Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Bài 5: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm trái dấu

$$2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$$

Giải: Để PT có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow 2(2m^2 - 3m - 5) < 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 6m - 10 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}$

* nháp

x	$-\infty$	-1		$5/2$		$+\infty$
VT		+		–		+

Bài 6: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

$$x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$$

Giải: Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4.1.(m^2 - 2m + 1) = 4m^2 - 4m^2 + 8m - 4 = 8m - 4$

Để PT có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 8m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

Vậy: Với $m > \frac{1}{2}$ thì PT có 2 nghiệm phân biệt

Bài 7: Tìm các giá trị của m để phương trình sau vô nghiệm: $(m-3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$

Giải: * Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$: PT trở thành: $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Suy ra: m = 3 (loại)

* Nếu $m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$. Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4.(m-3).(m-6)$

$= 4m^2 - 4(m^2 - 6m - 3m + 18) = 36m - 72$

Để PT vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 \neq 0 \\ 36m - 72 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2$

Vậy: Với m < 2 thì PT vô nghiệm

Bài 8: Cho phương trình: $mx^2 + 2(m+3)x + m = 0$

a) Định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu

b) Định m để phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt

Giải: a) Để PT có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

* $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m+3)^2 - 4.m.m = 4m^2 + 24m + 36 - 4m^2 = 24m + 36$ * $P = \frac{c}{a} = \frac{m}{m}$

Suy ra: $\begin{cases} 24m + 36 > 0 \\ \frac{m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$. Vậy: Với $-\frac{3}{2} < m \neq 0$ thì PT có $2n_0$ phân biệt cùng dấu

b) Để PT có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ * $S = -\frac{b}{a} = \frac{-2(m+3)}{m}$

Suy ra: $\begin{cases} 24m + 36 > 0 \\ \frac{m}{m} > 0 \\ \frac{-2(m+3)}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \neq 0 \\ m < -3 \vee m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$. Vậy: Với m > 0 thì PT có 2 n_0 âm phân biệt

Bài 9: Với giá trị nào của m thì biểu thức $f(x) = (2-m)x^2 - 2x + 1$ luôn dương

Giải: * Với $2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$, ta được: $f(x) = -2x + 1$ có cả giá trị âm, chẳng hạn: $f(1) = -1$

Suy ra: m = 2 (loại)

* Với $2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.(2-m).1 = 4 - 8 + 4m = 4m - 4$

Để f(x) luông dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m > 0 \\ 4m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$

Vậy: Với m < 1 thì biểu thức f(x) luôn dương

Bài 10: Định m để phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + x_2^2 = 8$$

Giải: Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m-1)^2 - 4.1.(m^2 - 3m) = 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12m = 4m + 4$

Để PT có 2 nghiệm x_1, $x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

Theo đề bài, ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8 \Leftrightarrow S^2 - 2P = 8$

$\Leftrightarrow [2(m-1)]^2 - 2.(m^2 - 3m) = 8 \Leftrightarrow (2m-2)^2 - 2m^2 + 6m = 8 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện). Vậy: Với m = –1, m = 2 thì thỏa mãn yêu cầu đề bài

Bài 11: Chứng minh phương trình sau luôn luôn có nghiệm với mọi m: $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

Giải: Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m-1)^2 - 4.1.(m-3) = 4m^2 - 8m + 4 - 4m + 12$

$= 4m^2 - 12m + 16 > 0, \ \forall m$ (vì $\Delta_m = -112 < 0$ và $a = 4 > 0$)

Vậy: Phương trình sau luôn luôn có nghiệm với mọi m (đpcm)

> ***Ghi nhớ:*** Chứng minh PT luôn luôn có nghiệm (hay có 2 nghiệm phân biệt), ta chứng minh: $\Delta > 0, \ \forall m$

Bài 12: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 7x + 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$

Giải: a) Ta có: $\begin{cases} 3x^2 - 7x + 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{3} \text{ hoặc } x > 2 \\ -1 < x < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \dfrac{1}{3}$

b) Ta có: $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\dfrac{7}{2} \text{ hoặc } x \geq -1 \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

Bài 13: Giải các bất phương trình sau

a) $\sqrt{x^2-3x-10}<x-2$ b) $\sqrt{x^2-2x-15}+3\le x$

Ghi nhớ: 1) $\sqrt{A}<B\Leftrightarrow\begin{cases}A\ge 0\\B>0\\A<B^2\end{cases}$ 2) $\sqrt{A}\le B\Leftrightarrow\begin{cases}A\ge 0\\B\ge 0\\A\le B^2\end{cases}$

Giải: a) Ta có: $\sqrt{x^2-3x-10}<x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x-10\ge 0\\x-2>0\\x^2-3x-10<(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -2 \text{ hoặc } x\ge 5\\x>2\\x<14\end{cases}$

$\Leftrightarrow 5\le x<14$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $5\le x<14$ hay T = [5; 14)

b) $\sqrt{x^2-2x-15}+3\le x\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x-15}\le x-3\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-15\ge 0\\x-3\ge 0\\x^2-2x-15\le(x-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -3 \text{ hoặc } x\ge 5\\x\ge 3\\x\le 6\end{cases}$

$\Leftrightarrow 5\le x\le 6$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $5\le x\le 6$ hay T = [5; 6]

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$ b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 5$ c) $f(x) = 16 - 8x + x^2$

d) $f(x) = -16x^2 + 24x - 9$ e) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 6$ f) $f(x) = 2x^2 - 7x - 15$

g) $f(x) = (9x^2 - 4)(-12x^2 + 17x + 105)$ h) $f(x) = (x^2 - 6x - 7)(4x + 12)$

i) $f(x) = (4 - 4x^2)x^2(x^2 - 6x + 8)$ j) $f(x) = (5x^2 + 10x)(4 - x)^2(x^2 - 11x + 28)$

Bài 2: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{9x^2-16}$ b) $f(x) = \frac{(x-7)(6x-3x^2)}{4x^2-19x+12}$ c) $f(x) = \frac{x^2-12x-64}{(2x-6)^2(4-x^2)}$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $7x^2 + 4x + 11 < 0$ b) $-3x^2 + 6x - 9 < 0$ c) $16x^2 + 8x + 1 > 0$

d) $9 - 6x + x^2 \le 0$ e) $25x^2 + 30x + 9 \ge 0$ f) $2x^2 - 5x + 3 > 0$

g) $-2x^2 - 9x - 9 \ge 0$ h) $6x - 15x^2 > 0$ i) $8 - 2x^2 \le 0$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $(3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1) \ge 0$ b) $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5) < 0$

c) $(2x + 1)(x^2 + x - 30) > 0$ d) $x^4 - 9x^2 \le 0$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-5x+4} > 0$ b) $\dfrac{x^2-6x+8}{-x^2-8x+9} \le 0$ c) $\dfrac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \le -1$

d) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^4-16x^2} < 0$ e) $\dfrac{x-7}{4x^2-19x+12} \ge 0$ f) $\dfrac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2} \ge 1$

Bài 6: Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{x^2-4} < \dfrac{3}{3x^2+x-4}$ b) $\dfrac{20}{x^2-7x+12} + \dfrac{10}{x-4} + 1 > 0$

c) $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} < \dfrac{1}{x-3}$ d) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} \le 0$

Bài 7: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu:

$$(1 - m^2)x^2 + 2(m^2 + 1)x + m^2 - 3m + 2 = 0$$

Bài 8: Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt:

$$x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5 = 0$$

Bài 9: Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt:

$$(m - 2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$$

Bài 10: Tìm các giá trị của m để phương trình sau vô nghiệm:

$$(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$$

Bài 11: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương:

$$f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1$$

Bài 12: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm:

$$f(x) = (m - 2)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1$$

Bài 13: Chứng minh phương trình sau luôn luôn có nghiệm với mọi m:

$$(m - 1)x^2 + (3m - 2)x + 3 - 2m = 0$$

Bài 14: Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 1$

$$(m + 1)x^2 - (m - 1)x + m - 2 = 0$$

Bài 15: Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$(m - 4)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1 = 0$$

Bài 16: Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm:

$$(m + 2)x^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$$

Bài 17: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 - 12x - 64 < 0 \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases}$

Bài 18: Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x+3} < 1 - x$

b) $\sqrt{5x^2 + 61x} \leq 4x + 2$