CHUYÊN ĐỀ: BẤT ĐẲNG THỨC

LÝ THUYẾT

1. $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$
2. $A \le A$
3. $A > B \Leftrightarrow A \pm C > B \pm C$
4. $\begin{cases} A \ge B \\ A \le B \end{cases} \Leftrightarrow A = B$
5. $\begin{cases} A \ge B \\ B \ge C \end{cases} \Rightarrow A \ge C$
6. $\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow A + C > B + D$
7. $A > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AC > BC \text{ nếu } C > 0 \\ AC < BC \text{ nếu } C < 0 \end{array}\right.$
8. $|x| \ge 0$
9. $|x| \le a (a > 0) \Leftrightarrow -a \le x \le a$
10. $|x| \ge a (a > 0) \Leftrightarrow x \le -a$ hoặc $x \ge a$

* ***Bất đẳng thức Côsi:*** + Nếu a, b không âm (tức là $a, b \ge 0$) thì $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ hoặc $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

+ Nếu a, b, c không âm (tức là $a, b, c \ge 0$) thì $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc}$ hoặc $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I: LÝ THUYẾT

+ *Một số bất đẳng thức thông dụng:* a) $a^2 \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

b) $(a - b)^2 \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

c) $(a + b)^2 \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = -b$

d) $(a + b + c)^2 \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a + b = -c$

e) $(a + b - c)^2 \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a + b = c$

+ *Phương pháp chứng minh:* Để c/m: $A \ge B \Leftrightarrow A - B \ge 0$ (đúng) và xét A = B khi nào?

Ghi nhớ: + $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

+ Nếu a, b, c là ba cạnh của tam giác thì $a + b > c \Leftrightarrow a + b - c > 0$

(tổng hai cạnh lớn hơn cạnh thứ ba)

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Cho a, b > 0. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$

Giải: Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\,(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \ge 0$ (đúng)

Vậy: (1) đúng $\forall a, b > 0$. Dấu "=" xãy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bài 2: Với a, b bất kì. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 4 \ge ab + 2(a + b)$

Giải: Ta có: $a^2 + b^2 + 4 \ge ab + 2(a + b)$ (1) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4 - ab - 2a - 2b \ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 8 - 2ab - 4a - 4b \ge 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 - 4a + 4) + (b^2 - 4b + 4) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 2)^2 + (b - 2)^2 \ge 0$ (đúng). Vậy (1) đúng

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 2$

Bài 3: Với a, b bất kì. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$

Giải: Ta có: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}(1) \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le 2a^2 + 2b^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \ge 0$ (đúng). Vậy (1) đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bài 4: Với mọi a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2 \ge ab-ac+2bc$

Giải: Ta có: $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2 \ge ab-ac+2bc$ (1) $\Leftrightarrow \frac{a^2}{4}+b^2+c^2-ab+ac-2bc \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}-b+c\right)^2 \ge 0$ (đúng). Vậy (1) đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a - 2b = -2c$

Bài 5: Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2$

Giải: Ta có: $a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2$ (1) $\Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow a^2(a - b) - b^2(a - b) \ge 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 - b^2) \ge 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \ge 0$ (đúng). Vậy (1) đúng

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bài 6: Với mọi a, b, c. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

Giải: Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ (1) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \ge 0 \Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0$ (đúng). Vậy: (1) đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 7: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác

a) Chứng minh: $(b - c)^2 < a^2$

b) Từ đó suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Giải: a) a, b, c là ba cạnh của tam giác nên: * $a + c > b \Rightarrow a + c - b > 0$

* $a + b > c \Rightarrow a + b - c > 0$

Suy ra: $(a + c - b)(a + b - c) > 0 \Leftrightarrow [a - (b - c)][a + (b - c)] > 0$

$\Leftrightarrow a^2 - (b - c)^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 > (b - c)^2$ (đpcm)

b) Theo câu a) Ta có: $a^2 > (b - c)^2$, chứng minh tương tự, ta được:

$b^2 > (c - a)^2$

$c^2 > (a - b)^2$

Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 > (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2$

$\Leftrightarrow\ a^2 + b^2 + c^2 > b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ (đpcm)

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi a, b, c, ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Bài 2: Cho a, b, c > 0. Chứng minh: $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab} \geq 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Bài 3: Với mọi x, y, z. Chứng minh rằng: $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$

Bài 4: Với mọi a, b. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

Bài 5: Với mọi x, y, z. Chứng minh rằng: $2xyz \leq x^2 + y^2z^2$

Bài 6: Với mọi x, y. Chứng minh rằng: $(x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x - y)^2$

Bài 7: Với mọi a, b. Chứng minh rằng: $2 + a^2(1 + b^2) \geq 2a(1 + b)$

Bài 8: Cho a > 0, b > 0. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Bài 9: Cho a, b bất kì. Chứng minh rằng: $a^2 + 2b^2 + 2ab + b + 1 > 0$

DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

I: LÝ THUYẾT

hoc360.net

:Với 2 số a, b không âm, ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Với $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng: $(a + b)(ab + 1) \geq 4ab$

Giải: Ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$ab + 1 \geq 2\sqrt{ab}$$

Suy ra: $(a + b)(ab + 1) \geq 4ab$ (đpcm). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$

Bài 2: Chứng minh rằng: $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$

Giải: Ta có: $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) = a^2 + a^2b^2 + b^2 + b^2c^2 + c^2 + c^2a^2$

$$= (a^2 + b^2c^2) + (b^2 + c^2a^2) + (c^2 + a^2b^2)$$

Theo BĐT Côsi, ta có: $a^2 + b^2c^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2c^2} = 2abc$

$$b^2 + c^2a^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2c^2} = 2abc$$

$$c^2 + a^2b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2c^2} = 2abc$$

Suy ra: $(a^2 + b^2c^2) + (b^2 + c^2a^2) + (c^2 + a^2b^2) \geq 6abc$

Vậy: $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$ (đpcm). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2c^2 \\ b^2 = a^2c^2 \\ c^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 3: Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Giải: Ta có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

Suy ra: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\sqrt[3]{\frac{abc}{abc}} = 9\sqrt[3]{1} = 9$ hay $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 4: Với a, b, c ≥ 0 và a + b + c = 1. Chứng minh rằng: (1 – a)(1 – b)(1 – c) $\geq 8abc$

Giải: Ta có: $a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - a = b + c \geq 2\sqrt{bc} \\ 1 - b = c + a \geq 2\sqrt{ca} \\ 1 - c = a + b \geq 2\sqrt{ab} \end{cases}$

Suy ra: (1 – a)(1 – b)(1 – c) $\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$ (đpcm). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số sau: f(x) = x(1 – x) với $0 \leq x \leq 1$

Giải: Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $x(1 - x) \leq \left(\frac{x + 1 - x}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Suy ra: $f(x) = x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$. Vậy: Hàm số f(x) đạt GTLN bằng $\frac{1}{4}$ khi $x = 1 - x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x} + 4$ với x > 0

Giải: Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $x + \frac{4}{x} + 4 \geq 4 + 2\sqrt{x.\frac{4}{x}} = 4 + 4 = 8$

Suy ra: $f(x) = x + \frac{4}{x} + 4 \geq 8$. Vậy: Hàm số f(x) đạt GTNN bằng 8 khi $x = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + \sqrt{2x + 4}$ trên đoạn [-2; 3]

Giải: Ta có: $f^2(x) = 6 - 2x + 2\sqrt{(6 - 2x)(2x + 4)} + 2x + 4 = 10 + 2\sqrt{(6 - 2x)(2x + 4)}$

$\leq 10 + (6 - 2x + 2x + 4) = 20 \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Vậy: Hàm số f(x) đạt GTLN bằng $2\sqrt{5}$ khi $6 - 2x = 2x + 4 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Với a, b, c $\geq$ 0. Chứng minh: (a + b)(a + c)(b + c) $\geq 8abc$

Bài 2: Với a, b, c > 0. Chứnh minh: $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8$

hoc360.net

Bài 3: Với a, b, c ≥ 0. Chứng minh: (a + b + c)(ab + bc + ca) $\geq 9abc$

Bài 4: Với a, b, c > 0. Chứng minh: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6$

(HD: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, $\frac{b+c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$, $\frac{c+a}{b}=\frac{c}{b}+\frac{a}{b}$; *nhóm* $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ *)*

Bài 5: Với a, b, c > 0. Chứng minh: $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

(HD: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}}=2b$, *cộng vế với vế* $\Rightarrow$ *đpcm)*

Bài 6: Với a, b, c ≥ 0. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 8a^2b^2c^2$

Bài 7: Cho a, b, c ≥ 0 và abc = 1. Chứng minh: (1 + a)(1 + b)(1 + c) ≥ 8

Bài 8: Với x, y > 0. Chứng minh: $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geq 4$

Bài 9: Với a, b, c > 0. Chứng minh: $\frac{a^3b}{c}+\frac{a^3c}{b}+\frac{b^3a}{c}+\frac{b^3c}{a}+\frac{c^3a}{b}+\frac{c^3b}{a}\geq 6abc$

(HD: Áp dụng BĐT Côsi cho 6 số)

Bài 10: Với a, b, c ≥ 0. Chứng minh: $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$

Bài 11: Với a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Chứnh minh: $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64$

(HD: $1+\frac{1}{a}=1+\frac{a+b+c}{a}=1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\geq\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}$, *sau đó nhân vế với vế* $\Rightarrow$ *đpcm)*

Bài 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $f(x) = x+\frac{3}{x}+5$ với $x > 0$

b) $f(x) = \frac{x}{1-x}+\frac{5(1-x)}{x}$ với $0 < x < 1$

c) $f(x) = x^2+\frac{4}{x^2}$ với $x > 0$

d) $f(x) = \frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}$ với $0 < x < 1$

e) $f(x) = \sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

e) $f(x) = \frac{a^2}{a^4+1}$

Bài 13: Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^3(8 - x^3)$ trên đoạn [0; 2]

b) f(x) = (14 – 7x)(7x + 21) trên đoạn [-3; 2]

b) $f(x) = (2x - 1)(3 - 5x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]$

Bài 14: Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-1}$ trên đoạn [1; 5]

b) $f(x) = \sqrt{2x+8} + \sqrt{10-2x}$ trên đoạn [-4; 5]

hoc360.net