PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN CÓ ĐIỀU KIỆN NGHIỆM, THAM SỐ

I LÝ THUYẾT

Khi giải phương trình lượng giác có nghiệm thỏa điều kiện cho trước, ta làm như sau:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Giải phương trình để tìm nghiệm.

Bước 3. So sánh nghiệm với điều kiện xác định của phương trình và điều kiện cho trước của bài toán để loại những nghiệm không thỏa

II BÀI TẬP MẪU

Câu 1. Giải phương trình $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ với $\frac{-\pi}{4}<x<\frac{2\pi}{3}$

Giải:

Phương trình tương đương với $\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Vì $\frac{-\pi}{4}<x<\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{-\pi}{4}<\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{-7\pi}{12}<\frac{k\pi}{2}<\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{-7}{6}<k<\frac{2}{3}$

Do $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{-1;0\}$.

Với $k=-1$ thì $x=\frac{-\pi}{6}$, với $k=0$ thì $x=\frac{\pi}{3}$.

Vậy $x=\frac{-\pi}{6}$ và $x=\frac{\pi}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Tìm nghiệm $0<x<\pi$ của phương trình $\sin 2x=-\frac{1}{2}$.

Giải:

Ta có $\sin 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Trường hợp 1: $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$. Do $0 < x < \pi$ nên $0 < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \pi$

$\Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{13}{12}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn được $k = 1$ thỏa mãn. Do đó, ta được nghiệm $x = \frac{11\pi}{12}$.

- Trường hợp 2: $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$. Do $0 < x < \pi$ nên $0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi$

$\Leftrightarrow -\frac{7}{12} < k < \frac{5}{12}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn được $k = 0$ thỏa mãn. Do đó, ta được nghiệm $x = \frac{7\pi}{12}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{11\pi}{12}, x = \frac{7\pi}{12}$.

Câu 3. Tìm nghiệm $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$.

Giải:

Ta có $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Trường hợp 1: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. Do $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ nên $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + k2\pi \le \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{6}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn được $k = 0$ thỏa mãn. Do đó, ta được nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$.

- Trường hợp 2: $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$. Do $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ nên $-\frac{\pi}{2}\le\frac{5\pi}{6}+k2\pi\le\frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le k\le-\frac{1}{6}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên ta không chọn được giá trị k thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{\pi}{6}$.

Câu 4. Tìm nghiệm $\pi\le x\le3\pi$ của phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

Giải:

Ta có $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Do $\pi\le x\le3\pi$ nên $\pi\le\frac{\pi}{4}+k2\pi\le3\pi\Leftrightarrow\frac{3}{8}\le k\le\frac{11}{8}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên ta chọn được $k=1$ thỏa mãn. Do đó, ta được nghiệm $x=\frac{9\pi}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=\frac{9\pi}{4}$.

Câu 5. Tìm nghiệm $0\le x\le2\pi$ của phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

Giải:

$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Rightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi\\ x=-\frac{13\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Vì $0\le x\le2\pi$ nên $\left[\begin{array}{l}0\le\frac{5\pi}{12}+k2\pi\le2\pi\\ 0\le-\frac{13\pi}{12}+k2\pi\le2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{5}{24}\le k\le\frac{19}{24}\\ \frac{13}{14}\le k\le\frac{37}{24}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\ k=1\end{array}\right.$

Vậy phương trình trên có hai nghiệm $x=\frac{5\pi}{12}, x=\frac{11}{12}\pi$.

Cõu 6. Giải phương trõnh $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ với $0\le x\le 2\pi$

Giải:

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=-\frac{7\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Xét $x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi$: Vì $0\le x\le 2\pi$ nên $x=\frac{23\pi}{12}$

Xét $x=-\frac{7\pi}{12}+k2\pi$: Vì $0\le x\le 2\pi$ nên $x=\frac{17\pi}{12}$

Vậy tập nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện là $S=\left\{\frac{23\pi}{12};\frac{17\pi}{12}\right\}$

Câu 7. Tìm nghiệm $x\in\left(-180^\circ;180^\circ\right)$ của phương trình $2\sin\left(2x-40^\circ\right)=\sqrt{3}$

Giải:

Ta có $2\sin\left(2x-40^\circ\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(2x-40^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-40^\circ\right)=\sin 60^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-40^\circ=60^\circ+k360^\circ \\ 2x-40^\circ=120^\circ+k360^\circ \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=100^\circ+k360^\circ \\ 2x=160^\circ+k360^\circ \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=50^\circ+k180^\circ \\ x=80^\circ+k180^\circ \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

- **Với** $k=0$ **thì** $x=50^\circ, x=80^\circ$

- **Với** $k=-1$ **thì** $x=-130^{\circ}, x=-100^{\circ}$.

Vậy có 4 nghiệm thuộc $\left(-180^{\circ};180^{\circ}\right)$ là $x=50^{\circ}, x=80^{\circ}, x=-130^{\circ}, x=-100^{\circ}$.

Câu 8. Tìm nghiệm của phương trình $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ trong khoảng $(0;3\pi)$.

Giải:

Ta có: $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

☞ Cách 1: Dựa vào đường tròn lượng giác ta có số nghiệm của phương trình là 6.

☞Cách 2: Giải lần lượt:

$0<\dfrac{\pi}{6}+k\pi<3\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{6}<k<\dfrac{17}{6} \Rightarrow k=0,1,2$.

$0<\dfrac{\pi}{3}+k\pi<3\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}<k<\dfrac{8}{3} \Rightarrow k=0,1,2$.

Vậy các nghiệm của phương trình thuộc $(0;3\pi)$ là $\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{4\pi}{3};\dfrac{13\pi}{6};\dfrac{10\pi}{3}$. .

Câu 9. Giải phương trình $2\tan x-2\cot x-3=0$ với $\left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

Giải:

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$.

Phương trình: $2\tan x-2\cot x-3=0$.

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x-3\tan x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=2 \\ \tan x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Dùng đường tròn lượng giác ta thấy trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ phương trình có 3 nghiệm.

Câu 10. Tìm nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \pi$.

Giải:

Ta có $\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(\cos x - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = k2\pi\end{array}\right.\left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Với $0 < x < \pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < \dfrac{\pi}{2} + k\pi < \pi\\ 0 < k2\pi < \pi\end{array}\right.\left(k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2} < k < \dfrac{1}{2}\\ 0 < k < \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\left(k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k = 0\\ VN\end{array}\right. \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}.$

Vậy nghiệm của phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2}$ thỏa điều kiện đề bài.

Câu 11. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 2x + \sin x = 0$ trong khoảng $\left[0; 2\pi\right)$.

Giải:

$\cos 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x \Leftrightarrow \cos 2x = cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = x + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ 2x = -x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Mà $x \in \left[0; 2\pi\right) \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

Cõu 12. Giải phương trõnh $\dfrac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ với $[2\pi; 4\pi]$

Giải:

Điều kiện: $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$. Trên $\left[2\pi, 4\pi\right]$, điều kiện $x \neq 3\pi$.

Ta có $\dfrac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in [2\pi, 4\pi]$ nên $2\pi < k\frac{\pi}{3} < 4\pi \Leftrightarrow 6 < k < 12; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 7;8;9;10;11$

$x = 2\pi, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, 3\pi, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, 4\pi$.

So với điều kiện, ta chỉ còn $x = 2\pi, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, 4\pi$.

Câu 13. Giải phương trình $\cos^2 x + \cos x = 0$ với $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

Giải:

$$\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Do $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$

Câu 14. Giải phương trình $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ với $0 \le x < \frac{\pi}{2}$

Giải:

Đặt $t = \sin x \left(-1 \le t \le 1\right)$, phương trình trở thành: $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $t = 1$, ta có: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Do $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ nên $0 \le \frac{\pi}{2} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \le k < 0$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên không tồn tại k.

Với $t = \frac{1}{2}$, ta có: $\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Do $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ nên $x = \frac{\pi}{6}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$ thỏa điều kiện $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

Cõu 15. Giải phương trõnh $2\cos^2 x+3\sin x-3=0$ với $0<x<\frac{\pi}{2}$

Giải:

$2\cos^2 x+3\sin x-3=0 \Leftrightarrow 2\left(1-\sin^2 x\right)+3\sin x-3=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-3\sin x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}.$

Do $0<x<\frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $x=\frac{\pi}{6}$.

Câu 16. Tìm m để phương trình $\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=m$ có nghiệm.

Giải:

$0\le\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\le 1, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow 0\le m\le 1$.

Vậy với $0\le m\le 1$ thì phương trình có nghiệm.

Cõu 17. Giải phương trõnh $\sin^2 x-\sin x=0$ với $0<x<\pi$:

Giải:

$$\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x\left(\sin x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. ;k\in\mathbb{Z}$$

TH1. $x=k\pi;k\in\mathbb{Z}$. Vì $0<x<\pi$ nên $0<k\pi<\pi \Leftrightarrow 0<k<1 \Rightarrow \nexists k$.

TH2. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$.

Vì $0<x<\pi$ nên $0<\frac{\pi}{2}+k2\pi<\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{1}{4} \Rightarrow k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

Cõu 18. Giải phương trõnh $\sin^2 x + \sin x = 0$ với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Giải:

Ta có $\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$.

TH1. $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Vì $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $-\frac{\pi}{2} < k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0$.

TH2. $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Vì $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $-\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} < k < -1; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \nexists k$.

Mà $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0.$

Cõu 19. Tõm tất cả cỏc nghiệm của phương trõnh $\sin 3x . \cos x = \sin 2x$ thuộc $(0; 2\pi)$

Cõu 20. Tõm tất cả cỏc nghiệm của phương trõnh $\sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin^2 x = 2 \sin x \cos 2x$ thuộc $[0; \pi]$

Giải:

$\sin 3x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = 2\sin x\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 3x - \dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{3}} = \sin(-x) + \sin 3x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{3}} = \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

Xét tròn $[0;\pi]$, phương trình đã cho có 4 nghiệm lồn lượt là $\left\{0;\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3};\pi\right\}$.

Cõu 21. Tõm tất cả cọc nghiệm của phương trõnh $\sin 5x\cos 3x = \sin 7x\cos 5x$ thuộc $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Giải:

Ta có $\sin 5x\cos 3x = \sin 7x\cos 5x \Leftrightarrow \sin 2x + \sin 8x = \sin 2x + \sin 12x$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin 12x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Trong $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ phương trình đã cho có các nghiệm là: $0;\dfrac{\pi}{20};\dfrac{2\pi}{20};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{7\pi}{20};\dfrac{9\pi}{20};\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 22. Tìm m để phương trình $2sin^2x - (2m+1)sinx + m = 0$ có nghiệm $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

Giải:

Với $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \Rightarrow -1 < \sin x < 0$

$$2sin^2x-(2m+1)sinx+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x=m\end{array}\right.$$

Phương trình có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \Rightarrow -1 < \sin x < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0.$

Câu 23. Giải phương trình $2\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-5=0$ với $\left(-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

Giải:

$$2\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1\\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{5}{2}(Loai)\end{array}\right..$$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=k2\pi \quad \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

Theo đề ra $-\frac{3\pi}{2} < x = -\frac{\pi}{6}+k\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{5}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}k=-1\\ k=0\\ k=1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{7\pi}{6}\\ x=-\frac{\pi}{6}\\ x=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.$.

Cõu 24. Tỡm tất cả cỏc nghiệm của phương trỡnh $\sin 8x+\cos 4x=1+2\sin 2x.\cos 6x$ thuộc $(-\pi;\pi)$

Giải:

$\sin 8x + \cos 4x = 1 + 2\sin 2x.\cos 6x$

$\Leftrightarrow \sin 8x + \cos 4x = 1 + 2.\frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin\left(-4x\right)\right)$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \sin 4x = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Các nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi;\pi\right)$ của phương trình là: $\left\{-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8};-\frac{3\pi}{8};-\frac{7\pi}{8}\right\}$.

Cõu 25. Tõm tất cả cỏc nghiệm của phương trõnh $\frac{\sqrt{3}\sin 3x - 2\sin x.\sin 2x - \cos x}{\sin x} = 0$ thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Giải:

Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$\frac{\sqrt{3}\sin 3x - 2\sin x.\sin 2x - \cos x}{\sin x} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\sin 3x - 2\sin x.\sin 2x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 3x - 2.\frac{-1}{2}\left(\cos 3x - \cos x\right) - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 2\cos x$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + 3x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ \frac{\pi}{6} + 3x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Các nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ của phương trình là: $\dfrac{\pi}{12};-\dfrac{5}{12}\pi;\dfrac{1}{6}\pi$.

Cõu 26. Tỡm tất cả cỏc nghiệm của phương trỡnh $\sin 3x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x=2\sin x\cos 2x$ thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$?

Giải:

$$\sin 3x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x=2\sin x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x=2.\dfrac{1}{2}\left(\sin 3x+\sin\left(-x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2 x+\sin x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Cõu 27. Vậy các nghiệm thuộc $\left[0;2\pi\right]$ của phương trình là: $0;\pi;2\pi;\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}$. Tỡm nghiệm của phương trỡnh $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\dfrac{3}{2}$ trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 4x\left(2\cos 2x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là: $\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8},-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}$

Cõu 28. Tỡm nghiệm của phương trỡnh $\sin 2x + \sin x - \dfrac{1}{2\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x$ trong khoảng $(0;\,\pi)$.

Giải

$\sin 2x + \sin x - \dfrac{1}{2\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x$ (1), điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x \sin x - \cos x - 1 = 2\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x - 1 + \cos x(2\sin^2 x - 1) = 2\cos 2x$$
$$\Leftrightarrow -\cos^2 2x + \cos 2x.\cos x - 2\cos 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x + \cos x + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos^2 x + \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0\ (VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thuộc $(0;\,\pi)$ là $x = \dfrac{\pi}{4}; x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Cõu 29. Phương trình $\cos 22x + 3\cos 18x + 3\cos 14x + \cos 10x = 0$ cú bao nhiờu nghiệm thuục khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

$$\cos 22x + 3\cos 18x + 3\cos 14x + \cos 10x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\cos 22x + \cos 10x\right) + 3\left(\cos 18x + \cos 14x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 16x\left(\cos 6x + \cos 2x + 2\cos 2x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 16x\left(\cos 6x + \cos 2x + 2\cos 2x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 16x\left(2\cos 4x\cos 2x + 2\cos 2x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 8\cos 16x.\cos^3 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{16}\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy các nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn:

$$0<\frac{\pi}{32}+k\frac{\pi}{16}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}<k<8\Rightarrow k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$0<\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}<k<1\Rightarrow k=0$$

Vậy phương trõnh cú 8 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Cõu 30. Tõm m để phương trõnh $2sinx+mcosx=1-m$ (1) cú nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Giải

$$m(1+cosx)=1-2\sin x$$

Vì: $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên $1+cosx>0$ do đó:

$$m=\frac{1-2\sin x}{1+cosx}\Leftrightarrow m=\frac{1-4\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{2cos^2x}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}(\tan^2\frac{x}{2}+1)-2\tan\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2m=\tan^2\frac{x}{2}-4\tan\frac{x}{2}+1$$

Cách 1: $2m=\tan^2\frac{x}{2}-4\tan\frac{x}{2}+1\Leftrightarrow 2m=(2-\tan\frac{x}{2})^2-3$

Vì $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên

$$-1\le\tan\frac{x}{2}\le 1\Leftrightarrow 1\le 2-\tan\frac{x}{2}\le 3\Leftrightarrow 1\le(2-\tan\frac{x}{2})^2\le 9\Leftrightarrow -2\le(2-\tan\frac{x}{2})^2-3\le 6$$

Vậy: $-2\le 2m\le 6\Leftrightarrow -1\le m\le 3$

Cách 2:

Đặt: $t=\tan\frac{x}{2}$ ta có $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $t\in[-1;1]$ khi đó ta có: $2m=\text{t}^2-4\text{t}+1$ với $t\in[-1;1]$ $P(t)=\text{t}^2-4\text{t}+1$ (P)

Do (P) là parabol có hệ số $a>0$ và đỉnh $I(2;-3)$ nên (P) đi xuông trên $[-1;1]$ do đó đường thẳng $y=2m$ cắt (P) với $t\in[-1;1]$ khi:

$P(-1)\le 2\mathrm{m}\le P(1)\Leftrightarrow -2\le 2m\le 6\Leftrightarrow -1\le m\le 3$

Cõu 31. Tõm nghiệm của phương trõnh $\sin^2 4x+3.\sin 4x.\cos 4x-4.\cos^2 4x=0$ khoảng $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$

Giải

Nhận thấy $\cos 4x=0$ không là nghiệm phương trình, chia hai vế phương trình cho $\cos 4x$, ta được phương t:

$$\tan^2 4x+3.\tan 4x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan 4x=1\\ \tan 4x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{4}\\ x=\dfrac{1}{4}\arctan(-4)+\dfrac{k\pi}{4}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Do $x\in\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{16};\frac{5\pi}{16};\frac{1}{4}\arctan(-4)+\frac{\pi}{4};\frac{1}{4}\arctan(-4)+\frac{\pi}{2}\right\}$

Cõu 32. Tõm tất cả cỏc nghiệm của phương trõnh $\cos 5x\cos x=\cos 4x\cos 2x+3\cos^2 x+1$ thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow\ \cos 5x\cos x=\cos 4x\cos 2x+3\cos^2 x+1$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 4x)=\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)+3\cos^2 x+1$$

$$\Leftrightarrow\cos 4x=\cos 2x+6\cos^2 x+2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=\cos 2x+3+3\cos 2x+2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-4\cos 2x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=-1\\ \cos 2x=3(PTVN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy các nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$ của phương trình là $x=-\frac{\pi}{2},x=\frac{\pi}{2}.$

Câu 33. Tìm các nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{2\pi}{5};\frac{6\pi}{7}\right)$ của phương trình: $\sqrt{3}\sin 7x-\cos 7x=\sqrt{2}$.

Giải:

$$PT \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x-\frac{1}{2}cos7x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$*Khi: x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7} \Rightarrow \frac{2\pi}{5}<\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{5}-\frac{5}{84}<\frac{2k}{7}<\frac{6}{7}-\frac{5}{84}$$

$$\Leftrightarrow k=2 \Leftrightarrow x_1=\frac{53\pi}{84}$$

$$*Khi: x=\frac{11\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7} \Rightarrow \frac{2\pi}{5}<\frac{11\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{5}-\frac{11}{84}<\frac{2k}{7}<\frac{6}{7}-\frac{11}{84}$$

$$\Leftrightarrow k=1,2 \Leftrightarrow x_2=\frac{35\pi}{84}; x_3=\frac{59\pi}{84}$$

Câu 34. Tìm các nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình:

$$\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x \ (*)$$

Giải:

$$(*) \Leftrightarrow sin\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}-4\pi\right)=1+2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+3\sin x=1+2\sin x \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=1-\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \\ \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$Do\ x\in(\frac{\pi}{2};3\pi) \Rightarrow x_1=\pi; x_2=2\pi; x_3=\frac{13\pi}{6}; x_4=\frac{5\pi}{6}; x_5=\frac{17\pi}{6}$$

Câu 35. Tìm m để phương trình $\sin x+m\cos x=m$ có 4 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi;\frac{7\pi}{3}\right)$

Giải:

$$PT \Leftrightarrow \sin x = m(1-\cos x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ m = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ và } x = 2\pi \\ m = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} (*) \end{array}\right.$$

Vậy để phương trình ban đầu có 4 nghiệm thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\pi;\dfrac{7\pi}{3}\right)$

Nhưng số nghiệm của (*) thuộc khoảng $\left(-\pi;\dfrac{7\pi}{3}\right)$ lại chính là số giao điểm của đường thẳng $y=m$ với đồ thị (C) có phương trình: $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ *trên* $D=\left(-\pi;\dfrac{7\pi}{3}\right)$

$$\text{Xét hàm}: y' = \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)^2} < 0\ \forall x \in D$$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra giá trị m cần tìm là $\left[\begin{array}{l} m \geq \sqrt{3} \\ m \leq 0 \end{array}\right.$.

Câu 36. Tìm m để $m(\sin x + \cos x + 1) = 1 + 2\sin x \cos x$ có nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Giải:

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Ta có: $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} \leq x+\dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{2}$

Khi đó phương trình trở thành: $m(t+1) = 1 + (t^2-1) \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2}{t+1}$

Xem hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{t+1}, \text{t} \in \left[1,\sqrt{2}\right]$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in \left[1,\sqrt{2}\right]$$

Suy ra $f(t)=\dfrac{t^2}{t+1}, t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ là hàm tăng trên $\left[1,\sqrt{2}\right]$.

Do đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow f(1)\le m\le f(\sqrt{2})\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le m\le 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Câu 37. Cho phương trình: $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=m(\sin x+\cos x)$ (1). Tìm m để phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm thuộc $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

GIẢI

Ta có: $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x$

$=2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$

$=2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$

$=(\sin x+\cos x)\left[2(\cos x-\sin x)+\sin x\cos x\right]$

Do đó $(1)\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)\left[2(\cos x-\sin x)+\sin x\cos x-m\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0 \quad (2)\\ 2(\cos x-\sin x)+\sin x\cos x-m=0 \quad (3)\end{array}\right.$$

Ta có $(2)\Leftrightarrow \sin x=-\cos x\Leftrightarrow tgx=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Đặt $t=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4}), |t|\le\sqrt{2}$

Khi đó phương trình (3) trở thành : $2t+\dfrac{1-t^2}{2}-m=0\Leftrightarrow t^2-4t+2m-1=0$ (*)

Ta có: $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}\le x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{4}$

<u>Nhận xét:</u> Nghiệm của (2) không thuộc $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Do đó: Phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm thuộc $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra phương trình (*) có nghiệm thuộc $[-1;1]$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t = 1 - 2m$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t$ trên $[-1;1]$

$\Rightarrow f'(t) = 2t - 4 < 0, \forall t \in [1,-1]$

$\Rightarrow y = f(t) = t^2 - 4t$ là hàm số giảm trên $[-1;1]$.

Vậy $ycbt \Leftrightarrow f(1) \le 1 - 2m \le f(-1) \Leftrightarrow -3 \le 1 - 2m \le 5 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$.

Câu 38. Tõm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trõnh: $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

Giải:

Ta có $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - (2\cos x + 3)\sin x + \cos x + 1 = 0 \quad (1)$

Chú ý : (1) là phương trình bậc 2 với biến $\sin x$

Ta có : $\Delta = (2\cos x + 3)^2 - 8(\cos x + 1) = (2\cos x + 1)^2$

Nghiệm của (1) : $\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{2\cos x + 3 + 2\cos x + 1}{4} = \cos x + 1 \\ \sin x = \dfrac{2\cos x + 3 - 2\cos x - 1}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \cos x + 1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array} \right. ; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy, nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{6}$.