Câu 28: Khi đó thiết diện của mặt phẳng (MNP) với hình chóp S.ABCD là

A. tam giác MNP B. Tứ giác BM_2N_2N C. Ngũ giác $NMM_2P_1N_2$ D. Tam giác $P_1M_1N_1$

Câu 29: Cho tứ iện ABCD, M là trung điểm của AB, N là điểm trên AC mà $AN = \frac{1}{4}AC$, P là điểm trên đoạn AD mà $AP = \frac{2}{3}AD$. Gọi E là giao điểm của MP và BD, F là giao điểm của MN và BC.

Khi đó giao tuyến của (BCD) và (CMP) là :

A. CP B. CE C. MF D. NE

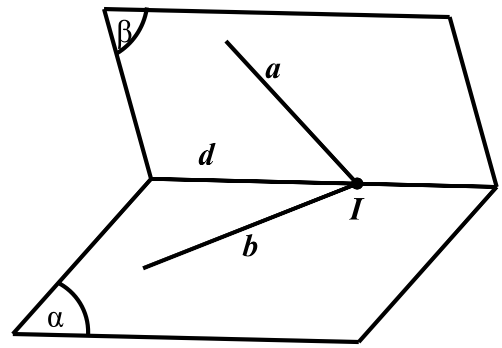
Câu 30: Cho tứ iện ABCD, M là trung điểm của AB, N là điểm trên AC mà $AN = \frac{1}{4}AC$, P là điểm trên đoạn AD mà $AP = \frac{2}{3}AD$. Gọi E là giao điểm của MP và BD, F là giao điểm của MN và BC.

Khi đó giao tuyến của (BCD) và (BCD) là :

A. NE B. EF C. ME D. NE

Dạng 6: Bài toán quỹ tích: Tìm giao điểm của hai đường thẳng di động

Phương pháp giải



Để tìm tập hợp giao điểm I của hai đường thẳng thay đổi a, b ta chọn hai mặt phẳng cố định (α) và (β) cắt nhau lần lượt chứa a, b, khi đó $I = a \cap b \Rightarrow \begin{cases} I \in a \subset (\alpha) \\ I \in b \subset (\beta) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in d = (\alpha) \cap (\beta)$

Vậy điểm I thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

Để chứng minh đường thẳng d đi qua một điểm cố định ta thực hiện theo các bước sau

- Chọn một điểm cố định J thuộc hai mặt phẳng (δ) và (γ)
- Chứng minh d là giao tuyến của hai mặt phẳng (δ) và (γ), khi đó d đi qua điểm cố định J.

Ví dụ điển hình

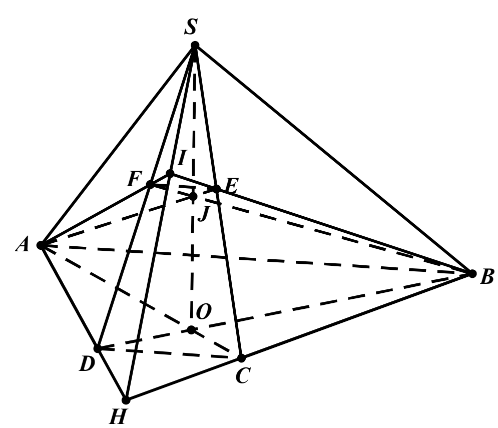
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB. Một mặt phẳng (P) quay quanh AB cắt các cạnh SC, SD tại các điểm tương ứng E, F.

a) Tìm tập hợp giao điểm I của AF và BE.

b) Tìm tập hợp giao điểm J của AE và BF.

Lời giải.

a) ***Phần thuận:***



Ta có $I = AF \cap BE \Rightarrow \begin{cases} I \in AF \\ I \in BE \end{cases}, \begin{cases} AF \subset (SAD) \\ BE \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC)$.

Trong $(ABCD)$ gọi $H = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} H \in AD \\ H \in BC \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} H \in (SAD) \\ H \in (SBC) \end{cases}$.

$\Rightarrow SH = (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow I \in SH$.

Giới hạn:

Khi E chạy đến C thì F chạy đến D và I chạy đến H.

Khi E chạy đến S thì F chạy đến S và I chạy đến S.

Phần đảo:

Lấy điểm I bất kì thuộc đoạn SH, trong (SAH) gọi $F = SD \cap AI$, trong (SBH) gọi $E = SH \cap BI$ khi đó $(ABEF)$ là mặt phẳng quay quanh AB cắt các cạnh SC, SD tại E, F và I là giao điểm của AF và BE.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn SH.

b) Ta có $J = AE \cap BF \Rightarrow \begin{cases} J \in AE \\ J \in BF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SAC) \\ J \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAC) \cap (SBD)$

Nhưng $SO = (SAC) \cap (SBD)$ nên $J \in SO$.

Khi E chạy đến chạy đến C thì F chạy đến D và J chạy đến O.

Khi E chạy đến S thì F chạy đến S và J chạy đến S.

Lập luận tương tự trên ta có tập hợp điểm J là đoạn SO.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABDC$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định.

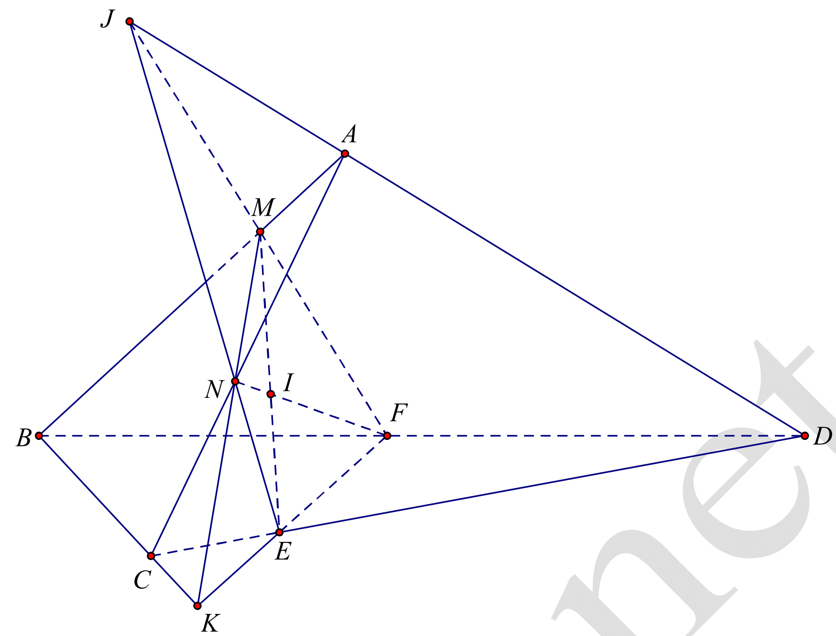
b) Tìm tập hợp giao điểm I của ME và NF.

c) Tìm tập hợp giao điểm J của MF và NE.

Lời giải.

a) Trong (ABC) gọi $K = MN \cap BC$ thì K cố định và $\begin{cases} K \in MN \\ K \in BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \in (MNP) \\ K \in (BCD) \end{cases}$

Lại có $EF = (P) \cap (BCD) \Rightarrow K \in EF$ Vậy EF luôn đi qua điểm K cố định



b) ***Phần thuận:***

Trong (P) gọi $I = ME \cap NF \Rightarrow \begin{cases} I \in ME \subset (MCD) \\ I \in NF \subset (NBD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (MCD) \cap (NBD)$.

Gọi $O = CM \cap BN \Rightarrow OD = (MCD) \cap (NBD) \Rightarrow I \in OD$

Giới hạn:

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và I chạy đến O

Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và I chạy đến D

Phần đảo:

Gọi I là điểm bất kì trên đoạn OD, trong (MCD) gọi $E = MI \cap CD$, trong (NBD) gọi $F = NI \cap BD$ suy ra $(MNEF)$ là mặt phẳng quay quanh MN cắt các cạnh DB, DC tại các điểm E, F và $I = ME \cap NF$.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn OD.

c) Gọi $J = MF \cap NE \Rightarrow \begin{cases} J \in MF \subset (ADB) \\ J \in NE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow J \in (ADB) \cap (ACD)$.

Mà $AD = (ADC) \cap (ADB)$.

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và J chạy đến A

Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và J chạy đến D

Từ đó ta có tập hợp điểm J là đường thẳng AD trừ các điểm trong của đoạn AD.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi, hai cạnh bên AB và CD kéo dài cắt nhau tại E. Các điểm M, N di động tương ứng trên các cạnh SB và SC sao cho AM cắt DN tại I. Khi đó có thể kết luận gì về điểm I?

A. I chạy trên một đường thẳng.
B. I chạy trên tia SE.
C. I chạy trên đoạn thẳng SE.
D. I chạy trên đường thẳng SE.

Lời giải

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi và $AD \cap BC = E$. Các điểm M, N tương ứng thuộc các cạnh SA và SB sao cho $DM \cap CN = I$. Khi M, N tương ứng di động trên các đường thẳng SA và SB thì ta có thể kết luận được gì về điểm I ?

A. Cố định.
B. Di động trên đoạn thẳng SE.
C. Di động trên đường thẳng SE.
D. Di động tùy ý trong không gian.

Lời giải

Chọn C.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NAD)

b) Gọi E,F là các điểm lần lượt trên các cạnh AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (DEF).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là tứ giác $ABCD$, AB cắt CD tại E, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAB) và (SCD); (SAC) và (SBD).

b) (SEF) với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm thuộc miền trong tam giác ABD, N một điểm thuộc miền trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (BCD) và (AMN).

b) (ABC) và (DMN).

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP=3PD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (MNP).

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, M và N là các điểm lần lượt trên các cạnh SC,BC.

a) Tìm giao điểm của AM với (SBD).

b) Tìm giao điểm của SD với (SMN).

Bài 6. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O, A,B là hai điểm nằm ngoài (α) sao cho AB cắt (α)với (α). Một mặt phẳng (β) quay quanh AB cắt d và d' lần lượt tại M,N.

a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi $I=AM\cap BN$, chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định.

c) Gọi $J=AN\cap BM$, chứng minh J thuộc một đường thẳng cố định.

d) Chứng minh IJ đi qua một điểm cố định.

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK=2KD$.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng CD với (IJK) và chứng minh $DE=DC$.

b) Xác định giao điểm F của đương thẳng AD với (IJK) và chứng minh $FA=2FD$.

c) Chứng minh $FK \parallel AB$.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm E của AM với (SBD). Tính $\frac{EM}{EA}$.

b) Tìm giao điểm F của SD với (MAB) và chứng minh F là trung điểm của SD.

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD.

a) Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh I, C, D thẳng hàng và $IC = 2ID$.

b) Tìm giao điểm J của AD với (MOG). Tính $\frac{JD}{JA}$.

c) Tìm giao điểm K của SA với (MOG). Tính $\frac{KS}{KA}$.

Bài 10. Cho mặt phẳng (α) xác định bởi hai đường thẳng a, b cắt nhau ở O và c là đường thẳng cắt (α) tại I $(I \neq O)$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và $mp(O,c)$

b) Gọi M là một điểm trên c và không trùng với I. Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (M,a) và (M,b) và chứng minh Δ luôn nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di động trên c.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AMN)

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN).

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, J lần lượt là các điểm cố định trên các cạnh SA và SC (IJ không song song với AC).

Một mặt phẳng (α) quay quanh IJ cắt SB tại M và cắt SD tại N.

a) Chứng minh các đường thẳng MN, IJ, SO đồng qui

b) Giả sử $AD \cap BC = E, IN \cap JM = F$. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

c) Gọi $P = IN \cap AD, Q = JM \cap BC$. Chứng minh đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi (α) di động.

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh AB, BC, CS lấy các điểm M, N, P sao cho MN và AC không song song với nhau.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

b) Gỉa sử $I = MP \cap NQ$, chứng minh I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi P chạy trên cạnh SC.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là một điểm trên cạnh SD sao cho $SM = \frac{1}{3}SD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng BM với (SAC).

b) N là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Xác định giao tuyến d của (SBC) và (AMN). Chứng minh d luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Xác định thiết diện của hình chóp với (MNG).

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC tương ứng tại các điểm A', B', C'. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Tìm giao điểm D' của (α) với SD.

b) Chứng minh $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, J là hai điểm trên các cạnh AD và SB.

a) Tìm giao các điểm K, L của các đường thẳng IJ và DJ với (SAC).

b) Giả sử $O = AD \cap BC, M = OJ \cap SC$. Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD, $AB = 2CD$. Gọi I là trung điểm của SA, J là một điểm trên cạnh SC với $JS > JC$. Gọi (α) là mặt phẳng quay quanh IJ, cắt các cạnh SD, SB tại M, N. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

Bài 18. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q. Tìm tập hợp giao điểm của MP và NQ.