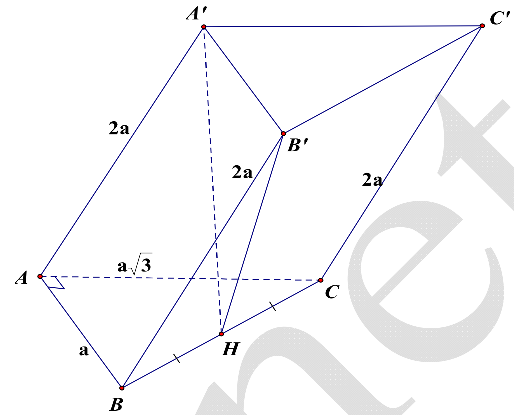
phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

LỜI GIẢI



Gọi H trung điểm của BC , theo đề $A'H \perp mp(ABC)$.

Mà $mp(ABC) // mp(A'B'C')$

$\Rightarrow A'H \perp mp(A'B'C')$

Tam giác ABC vuông tại A :

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow BH = a$

Ta có: $\begin{cases} AA' \parallel BB' \\ B'C' \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \left(AA', B'C'\right) = \left(BB', BC\right) = B'BH$.

Trong tam giác A'B'H vuông tại A' có : $HB' = \sqrt{A'B^2 + A'H^2} = 2a$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác B'BH có :

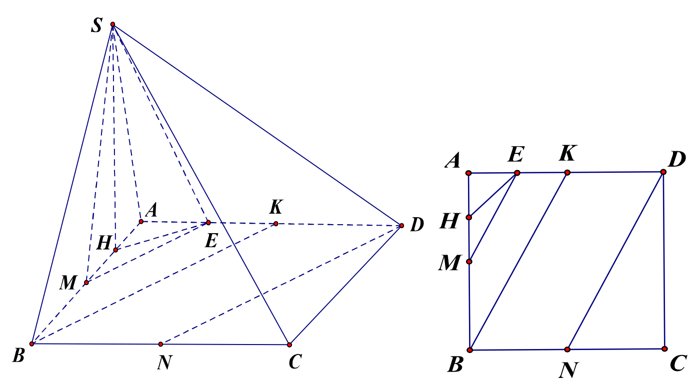
$\cos B'BH = \dfrac{BB'^2 + BH^2 - B'H^2}{2.BB'.BH} = \dfrac{4a^2 + a^2 - 4a^2}{2.2a.a} = \dfrac{1}{4} > 0\,(\text{thỏa}) \Rightarrow B'BH = \arccos\dfrac{1}{4}$.

Câu 4: TSĐH K.B 2008

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

LỜI GIẢI

Hạ $SH \perp AB$ tại H. Vì mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABCD) theo giao tuyến AB. Suy ra $SH \perp mp(ABCD)$.



Trong mặt phẳng (ABCD) từ M kẻ $ME \parallel DN$ với E thuộc AD.

Vậy góc giữa SM và DN chính là góc giữa SM và ME .

Xét tam giác SAB có : $AB^2 = SA^2 + SB^2 = 4a^2$. Vậy ΔSAB vuông tại S.

Và : $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SHA vuông tại H : $HA = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$.

Gọi K trung điểm của AD ta có $ME \parallel BK \parallel DN$, nên ME là đường trung bình tam giác ABK.

Vậy $AE = \frac{1}{2}AK = \frac{a}{2}$; $\quad ME = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Tam giác HAE vuông tại A : $HE = \sqrt{AH^2 + AE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SHE vuông tại H : $SE = \sqrt{SH^2 + EE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác SME có :

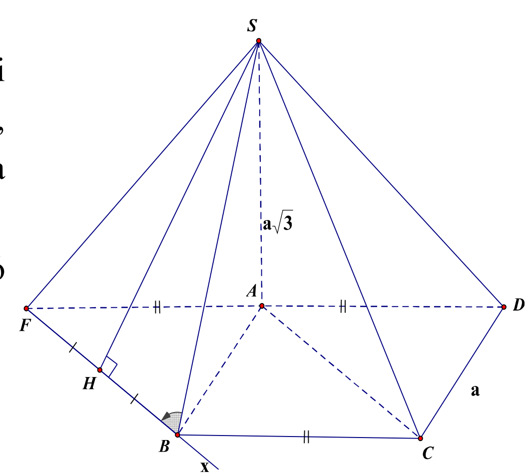
$$\cos SME = \frac{SM^2 + ME^2 - SE^2}{2.SM.ME} = \frac{a^2 + \frac{5a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2.a.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} > 0 \Rightarrow SME = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Kết luận $\left(SM, DN\right) = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 5: Cho khối chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

LỜI GIẢI

Qua B kẻ đường thẳng Bx song song với AC . Bx cắt AD tại F. Góc giữa AC và SB , chính là góc giữa Bx và AC. Ta có AFBC là hình bình hành , nên AF = BC và AC = FB. Suy ra SF = SB , tam giác SBF cân tại S. Có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$. $FB = AC = a\sqrt{2}$

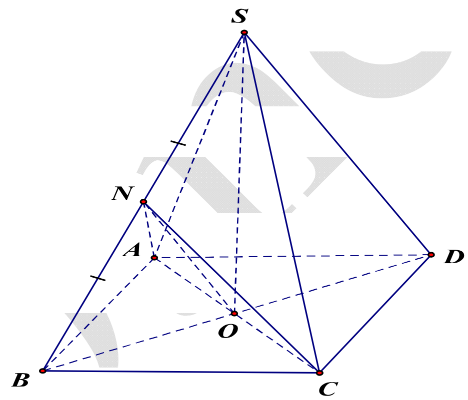


Hạ $SH \perp FB$, thì H trung điểm FB

$$\cos SBF = \frac{HB}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SBF = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là hình vuông. Gọi N là trung điểm SB. Tính góc giữa AN và CN; AN và SD.

LỜI GIẢI



Theo đề bài

$SA = SB = SC = SD = AB = BC = CD = DA = a$

Gọi $O = AC \cap BD$, có

$AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔSAB đều). $CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔSBC đều).

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ANC:

$$\cos ANC = \frac{AN^2 + CN^2 - AC^2}{2.AN.CN} = \frac{-1}{3} < 0 \Rightarrow ANC = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Trong tam giác BDS có ON là đường trung bình của tam giác.

$(AN, SD) = (AN, NO) = ANO$ hoặc $180 - ANO$

Áp dụng định lý cosin cho ΔANO:

$$\cos ANO = \frac{AN^2 + ON^2 - AO^2}{2.AN.ON} = \frac{\sqrt{3}}{3} > 0 \Rightarrow ANO = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Vậy $(AN, SD) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

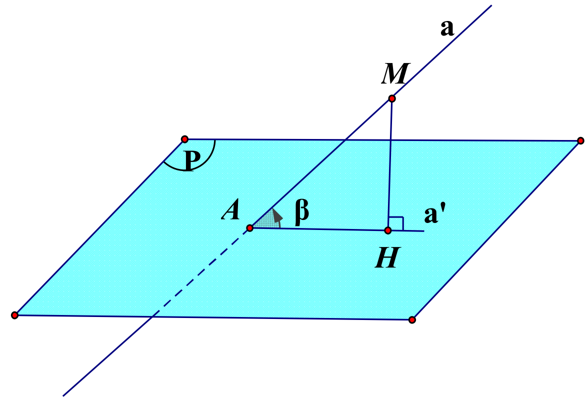
Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Phương pháp giải toán.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P)

Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì $0^0 \le \alpha \le 90^0$

Đầu tiên tìm giao điểm của d và (P) gọi là điểm A.

Trên d chọn điểm B khác A , dựng BH vuông góc với (P) tại H. Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P).



Vậy góc giữa d và (P) là góc BAH.

Nếu khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng BH vuông góc với (P)) , thì ta sử dụng công thức sau đây . Gọi α là góc giữa d và (P) suy ra :

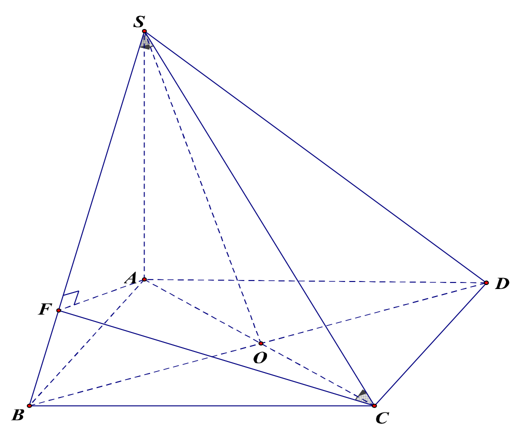
$$\boxed{\sin\alpha = \frac{d\left(M, mp(P)\right)}{AM}.}$$

Ta phải chọn điểm M trên d, mà có thể tính khoảng cách được đến mặt phẳng (P). Còn A là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ đáy và SA = $a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a). SC và (ABCD). b). SC và (SAB). c). AC và (SBC). d). SB và (SAC).

LỜI GIẢI



a). Có AC là hình chiếu của SC lên mp(ABCD) nên $\left[SC,(ABCD)\right] = SCA$,

Trong ΔSAC vuông tại A: $\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SCA = 60^0$.

Vậy $\left[SC,(ABCD)\right] = 60^0$.

b). Có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAB)$. Vậy SB là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAB) $\Rightarrow \left(SC,(SAB)\right) = CSB$.

Trong ΔSBC vuông tại B: $\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \widehat{CSB} = \arctan\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Vậy $\left(SC,(SAB)\right) = \arctan\frac{1}{\sqrt{7}}$.

c). Dựng $AF \perp SB$ tại F. Có $\begin{cases} AF \perp SB \\ AF \perp BC \end{cases} \Rightarrow AF \perp mp(SBC)$. Vậy FC là hình chiếu vuông góc của AC trên mp(SBC). Vậy $\left(AC,(SBC)\right) = \widehat{ACF}$.

Trong ΔAFC vuông tại F có:

$$\sin \widehat{ACF} = \frac{AF}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{42}}{7}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \widehat{ACF} = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$$

với $\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{6a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Vậy $\left(AC,(SBC)\right) = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

d). Có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp mp(SAC)$. Nên SO là hình chiếu của SB lên mp(SAC), nên $\left(SB,(SAC)\right) = \widehat{BSO}$.

Trong ΔSBO vuông tại O: $\tan \widehat{BSO} = \frac{OB}{OS} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \Rightarrow \widehat{BSO} = \arctan\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Với $SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{6a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

Vậy $\left(SB,(SAC)\right) = \arctan\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi. Biết SD = $a\sqrt{3}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a.

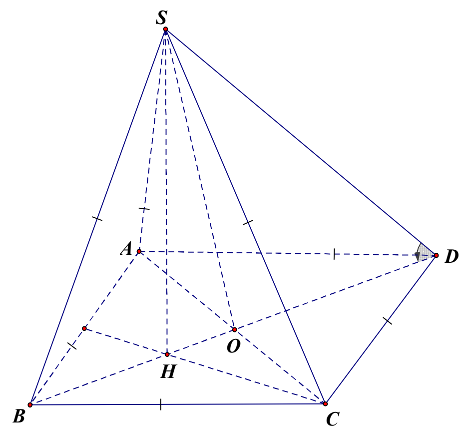
a). Chứng minh (SBD) là mặt phẳng trung trực của AC và SBD là tam giác vuông.

b). Xác định góc giữa SD và mp(ABCD).

LỜI GIẢI

a). Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABCD).

Theo đề bài $SA = SB = SC$, Suy ra $HA = HB = HC$ (đường xiên bằng nhau thì hình chiếu bằng nhau). Vậy H thuộc BD (BD là đường trung trực của đoạn AC).



Vì $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SH\left(SH \subset (SBD)\right) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

Từ $AC \perp mp(SBD)$ & $(SBD) \cap AC = O$, với O là trung điểm của AC. Vậy (SBD) là mp trung trực của đoạn AC.

Ta có $\Delta SAC = \Delta BAC(c.c.c) \Rightarrow SO = BO$ (2 đường trung tuyến xuất phát từ 2 đỉnh tương ứng bằng nhau)

Trong Δ SBD: có SO là đường trung tuyến và $SO = \frac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S .

ΔSBD vuông tại S nên: $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SD^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

b). HD là hình chiếu của SD trên mp(ABCD), nên $\left[SD,(ABCD)\right] = SDH$.

Trong tam giác vuông SHD: $\sin SDH = \frac{SH}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow SDH = 30^0$

Vậy $\left[SD,(ABCD)\right] = 30^0$.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a nằm trong mp(P), cạnh AC = $a\sqrt{2}$ và tạo với (P) một góc 60^0 . Tính góc giữa BC và (P).

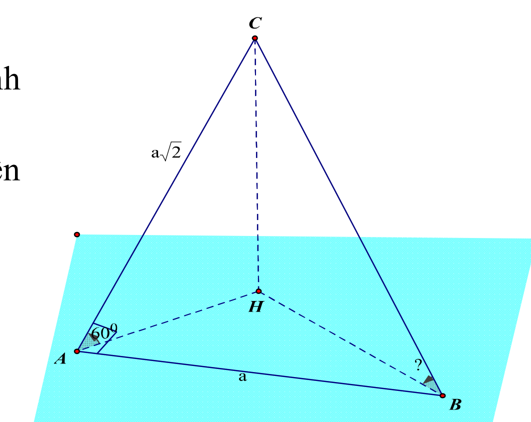
LỜI GIẢI

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên mp (P).

AH là hình chiếu vuông góc của AC trên mp(P).

$\left[AC,(P)\right] = CAH = 60^0$,

$\sin CAH = \frac{CH}{CA} \Rightarrow CH = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

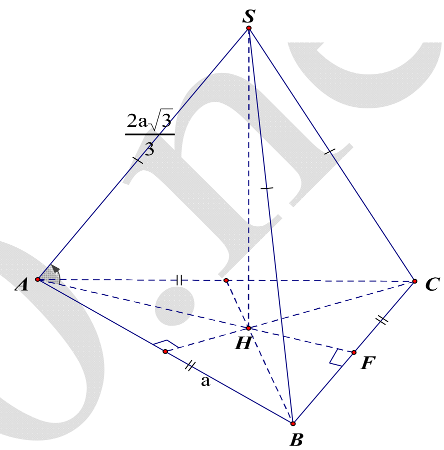


BH là hình chiếu vuông góc của BC trên mp(P). $\left[BC,(P)\right] = CBH$

$$\sin CBH = \frac{CH}{CB} = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right):\left(a\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CBH = 45^0$$

Câu 4: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a.
a). Gọi H là hình chiếu của S trên mp(ABC). Tính SH.
b). Tính góc giữa SA và (ABC).

LỜI GIẢI



a). Vì H là hình chiếu của S trên (ABC) và $SA = SB = SC \Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, vì ABC đều nên H cũng là trọng tâm và trực tâm.

Nên có $AH = \frac{2}{3}AF = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

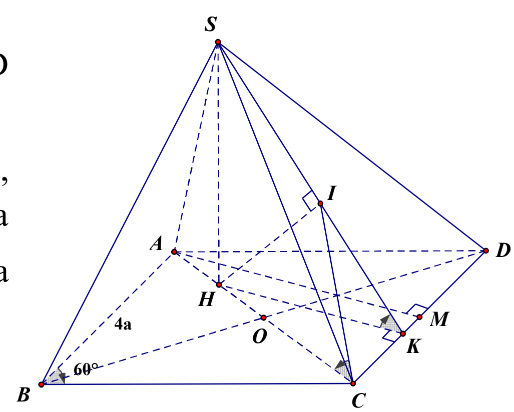
$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a$$

b). AH là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC), nên $\left[SA,(ABC)\right] = SAH$

Trong ΔSAH vuông tại H: $\tan SAH = \frac{SH}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow SAH = 60^0$.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh 4a, góc $ABC = 60^0$, H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABCD) là trung điểm của OA, góc giữa mp(SCD) và đáy (ABCD) bằng 60^0. Tính cosin của góc tạo bởi OA và (SCD).

LỜI GIẢI



Vì $ABC = 60^0$ nên tam giác ABC và ACD đều, nên $AC = 4a, BO = 2a\sqrt{3} \Rightarrow BD = 4a\sqrt{3}$

Gọi M trung điểm của CD có $AM \perp CD$, dựng $HK \perp CD, (K \in CD)$. Suy ra $CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK$. Vậy góc giữa mp(SCD) và đáy (ABCD) là góc $SKH = 60^0$.

Trong ΔCAM có $\frac{CH}{CA}=\frac{HK}{AM}=\frac{3}{4}\Rightarrow HK=\frac{3}{4}AM=\frac{3}{4}\cdot\frac{4a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Có $\tan SKH=\frac{SH}{HK}\Rightarrow SH=HK\tan 60^0=\frac{3a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{9a}{2}$.

Hai mặt phẳng (SCD) và (SHK) vuông góc với nhau theo giao tuyến SK. Dựng $HI\perp SK,(I\in SK)\Rightarrow HI\perp\left(SCD\right)$.

Suy ra CI là hình chiếu vuông góc của HC trên mp(SCD), vậy góc giữa AO và (SCD) là góc $\widehat{HCI}$.

Trong ΔSHK có $\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HK^2}=\frac{16}{81a^2}\Rightarrow HI=\frac{9a}{4}$.

Trong ΔHIC vuông tại I có $CI=\sqrt{HC^2-HI^2}=\sqrt{\left(3a\right)^2-\left(\frac{9a}{4}\right)^2}=\frac{3a\sqrt{7}}{4}$.

$\cos\widehat{HCI}=\frac{CI}{CH}=\frac{\frac{3a\sqrt{7}}{4}}{3a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Vậy $\cos\left(SO,(SCD)\right)=\frac{\sqrt{7}}{4}$.