

VẤN ĐỀ IV: DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

I: LÝ THUYẾT

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\begin{cases} \Delta < 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ a > 0 \end{cases}$ thì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\begin{cases} \Delta < 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ a < 0 \end{cases}$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\begin{cases} \Delta = 0 \text{ (nghiệm kép)} \\ a > 0 \end{cases}$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\begin{cases} \Delta = 0 \text{ (nghiệm kép)} \\ a < 0 \end{cases}$ thì $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thì dùng quy tắc:

“Trong trái ngoài cùng theo dấu của hệ số a”

Bảng xét dấu tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
f(x)	Trái dấu hệ số a	0	Cùng dấu hệ số a	0	Trái dấu hệ số a

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Xét dấu các tam thức bậc hai

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 6$

c) $f(x) = 9x^2 - 24x + 16$

d) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

e) $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$

f) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$

g) $f(x) = (4x^2 - 1)(-x^2 + x + 12)$

h) $f(x) = (2x^2 - 2)(3x + 6)$

i) $f(x) = x^2(9 - x^2)(x^2 + 7x - 8)$

j) $f(x) = (x - 2)^2(x^2 - 3x)(x^2 + 5x + 4)$

Giải: a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

* Cách 1: Vì $f(x)$ có $\begin{cases} \Delta = -24 < 0 \\ a = 2 > 0 \end{cases}$ Vậy: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

* Cách 2: Vì $f(x)$ vô nghiệm và $a = 2 > 0$. Vậy: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 6$

* Cách 1: Vì $f(x)$ có $\begin{cases} \Delta = -20 < 0 \\ a = -1 < 0 \end{cases}$ Vậy: $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

* Cách 2: Vì $f(x)$ vô nghiệm và $a = -1 < 0$. Vậy: $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = 9x^2 - 24x + 16$

* Cách 1: Vì $f(x)$ có $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a = 9 > 0 \end{cases}$ Vậy: $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

* Cách 2: Vì $f(x)$ có nghiệm kép và $a = 9 > 0$. Vậy: $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

* Cách 1: Vì $f(x)$ có $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a = -4 < 0 \end{cases}$ Vậy: $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

* Cách 2: Vì $f(x)$ có nghiệm kép và $a = -4 < 0$. Vậy: $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$, $f(x)$ có 2 nghiệm $x = \frac{4 - \sqrt{10}}{3}, x = \frac{4 + \sqrt{10}}{3}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{4 - \sqrt{10}}{3}$	$\frac{4 + \sqrt{10}}{3}$	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

Vậy: $+ f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; \frac{4 - \sqrt{10}}{3})$ hoặc $x \in (\frac{4 + \sqrt{10}}{3}; +\infty)$

$+ f(x) < 0$ khi $x \in (\frac{4 - \sqrt{10}}{3}; \frac{4 + \sqrt{10}}{3})$ $+ f(x) = 0$ khi $x = \frac{4 - \sqrt{10}}{3}$ hoặc $x = \frac{4 + \sqrt{10}}{3}$

f) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$, $f(x)$ có 2 nghiệm $x = -2, x = \frac{1}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	1/2	$+\infty$	
f(x)	-	0	+	0	-

Vậy: $+ f(x) > 0$ khi $x \in (-2; \frac{1}{2})$ $+ f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -2)$ hoặc $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$

$+ f(x) = 0$ khi $x = -2$ hoặc $x = \frac{1}{2}$

g) $f(x) = (4x^2 - 1)(-x^2 + x + 12)$ Ta có: $* 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad * -x^2 + x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc khoảng)

x	$-\infty$	-3	-1/2	1/2	4	$+\infty$
$4x^2 - 1$		+	0	-	0	+
$-x^2 + x + 12$		-	0	+	0	-
f(x)		-	0	+	0	-

Vậy: $+ f(x) > 0$ khi $x \in (-3; -\frac{1}{2})$ hoặc $x \in (\frac{1}{2}; 4)$

$+ f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -3)$ hoặc $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ hoặc $x \in (4; +\infty)$

$+ f(x) = 0$ khi $x = -3$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 4$

* Cách khác: (dùng quy tắc **đơn dấu**)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-1/2	1/2	4	$+\infty$
f(x)		-	0	+	0	-

h) $f(x) = (2x^2 - 2)(3x + 6)$ Ta có: $* 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; $* 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc **khoảng**)

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$2x^2 - 2$		+	0	-	0
$3x + 6$		-	0	+	+
f(x)		-	0	+	0

Vậy: $+ f(x) > 0$ khi $x \in (-2; 1)$ hoặc $x \in (1; +\infty)$

$+ f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -2)$ hoặc $x \in (-1; 1)$

$+ f(x) = 0$ khi $x = \pm 1$ hoặc $x = -2$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc **đơn dấu**)

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
f(x)		-	0	+	0

i) $f(x) = x^2(9 - x^2)(x^2 + 7x - 8)$

Ta có: $* x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $* 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$; $* x^2 + 7x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -8 \end{cases}$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc **khoảng**)

x	$-\infty$	-8	-3	0	1	3	$+\infty$
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$9 - x^2$	-	-	0	+	+	0	-
$x^2 + 7x - 8$	+	0	-	-	-	0	+
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

Vậy: $+ f(x) > 0$ khi $x \in (-8; -3)$ hoặc $x \in (3; 4)$

$+ f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -8)$ hoặc $x \in (-3; 0)$ hoặc $x \in (0; 3)$ hoặc $x \in (4; +\infty)$

$+ f(x) = 0$ khi $x = \pm 3$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = -8$ hoặc $x = 1$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc **đơn dấu**)

x	$-\infty$	-8	-3	0	1	3	$+\infty$
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

j) $f(x) = (x - 2)^2(x^2 - 3x)(x^2 + 5x + 4)$

Ta có: $(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $* x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$; $* x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc **đơn dấu**)

x	$-\infty$	-4	-1	0	2	3	$+\infty$
f(x)	+	0	-	0	+	0	-

Vậy: $+ f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -4)$ hoặc $x \in (-1; 0)$ hoặc $x \in (3; +\infty)$

$+ f(x) < 0$ khi $x \in (-4; -1)$ hoặc $x \in (0; 2)$ hoặc $x \in (2; 3)$

$+ f(x) = 0$ khi $x = -4$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 3$

Bài 2: Xét dấu các tam thức bậc hai

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 9}$

b) $f(x) = \frac{(2x + 1)(x^2 + x - 30)}{-3x^2 + 10x - 3}$

c) $f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 10}{(6 - 2x)^2(4x^2 + 8x)}$

Giải: a) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 9}$ Ta có: $* 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$; $* x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Bảng xét dấu: Bảng xét dấu: (dùng quy tắc **đơn dấu**)

x	$-\infty$	-3	1/2	1	3	$+\infty$
f(x)	+	-	0	+	0	-

Vậy: $+ f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -3)$ hoặc $x \in (\frac{1}{2}; 1)$ hoặc $x \in (3; +\infty)$

$+ f(x) < 0$ khi $x \in (-3; \frac{1}{2})$ hoặc $x \in (1; 3)$

$+ f(x) = 0$ khi $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 1$

$+ f(x)$ không xác định khi $x = \pm 3$

b) $f(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x-30)}{-3x^2+10x-3}$

Ta có: $* 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$; $* x^2 + x - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -6 \end{cases}$; $* -3x^2 + 10x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

Bảng xét dấu: Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$	-6	-1/2	1/3	3	5	$+\infty$
f(x)	+	0	-	0	+	-	+

Vậy: $+ f(x) > 0 \Leftrightarrow$ khi $x \in (-\infty; -6)$ hoặc $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$ hoặc $x \in (3; 5)$

$+ f(x) < 0$ khi $x \in (-6; -\frac{1}{2})$ hoặc $x \in (\frac{1}{3}; 3)$ hoặc $x \in (5; +\infty)$

$+ f(x) = 0$ khi $x = -6$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$ hoặc $x = 5$ $+ f(x)$ không xác định khi $x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 3$

c) $f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 10}{(6-2x)^2(4x^2+8x)}$

Ta có: $* -x^2 - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases}$; $* (6-2x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $* 4x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng xét dấu: Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$	-5	-2	0	2	3	$+\infty$
f(x)	-	0	+	-	+	0	-

Vậy: $+ f(x) > 0$ khi $x \in (-5; -2)$ hoặc $x \in (0; 2)$

$+ f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -5)$ hoặc $x \in (-2; 0)$ hoặc $x \in (2; 3)$ hoặc $x \in (3; +\infty)$

$+ f(x) = 0$ khi $x = -5$ hoặc $x = 2$ $+ f(x)$ không xác định khi $x = -2$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = 3$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $4x^2 - 2x + 7 > 0$

b) $x^2 + 4x + 6 < 0$

c) $25x^2 - 20x + 4 > 0$

d) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

e) $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$

f) $3x^2 + 5x - 8 < 0$

g) $-2x^2 - 3x - 1 \leq 0$

h) $3x^2 - 4x > 0$

i) $3 - x^2 \geq 0$

Giải: a) $4x^2 - 2x + 7 > 0$. * *Cách 1:* Tam thức bậc hai $4x^2 - 2x + 7$ vô nghiệm và $a = 4 > 0$

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: $T = \mathbb{R}$

* *Cách 2:* Tam thức bậc hai $4x^2 - 2x + 7$ có $\Delta = -108 < 0$ và $a = 4 > 0$

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: $T = \mathbb{R}$

b) $x^2 + 4x + 6 < 0$. * *Cách 1:* Tam thức bậc hai $x^2 + 4x + 6$ vô nghiệm và $a = 1 > 0$

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: $T = \emptyset$

* *Cách 2:* Tam thức bậc hai $4x^2 - 2x + 7$ có $\Delta = -8 < 0$ và $a = 1 > 0$

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: $T = \emptyset$

c) $25x^2 - 20x + 4 > 0$. * *Cách 1:* Tam thức bậc hai $25x^2 - 20x + 4$ có nghiệm kép $x = \frac{2}{5}$ và $a = 25 > 0$

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x \neq \frac{2}{5}$

* *Cách 2:* $25x^2 - 20x + 4 > 0 \Leftrightarrow (5x - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{2}{5}$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $x \neq \frac{2}{5}$

d) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$. * *Cách 1:* Tam thức bậc hai $x^2 + 6x + 9$ có nghiệm kép $x = -3$ và $a = 1 > 0$

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x = -3$

* *Cách 2:* $x^2 + 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -3$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $x = -3$

e) $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$. Tam thức bậc hai $4x^2 - 12x + 9$ có nghiệm kép $x = \frac{3}{2}$ và $a = 4 > 0$

Vậy: Tập nghiệm của BPT là: $T = \mathbb{R}$

<p>Ghi nhớ: + Nếu $(ax + b)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{b}{a}$ + Nếu $(ax - b)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{b}{a}$</p> <p>+ Nếu $(ax + b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ + Nếu $(ax - b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$</p>

f) $3x^2 + 5x - 8 < 0$. * *Cách 1:* Tam thức $3x^2 + 5x - 8$ có 2 nghiệm $x = 1, x = -\frac{8}{3}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-8/3$	1	$+\infty$
VT	+		-	+

Vậy: Nghiệm của BPT là: $-\frac{8}{3} < x < 1$ hay $T = (-\frac{8}{3}; 1)$

* Cách 2: Ta có: $3x^2 + 5x - 8 < 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} < x < 1$ (bảng xét dấu làm nháp)

g) $-2x^2 - 3x - 1 \leq 0$ * Cách 1: Tam thức $-2x^2 - 3x - 1$ có 2 nghiệm $x = -1, x = -\frac{1}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	$+\infty$
VT	-	+		-

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x \leq -1$ hoặc $x \geq -\frac{1}{2}$ hay $T = (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$

* Cách 2: Ta có: $-2x^2 - 3x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq -\frac{1}{2}$ (bảng xét dấu làm nháp)

h) $3x^2 - 4x > 0$ * Cách 1: Tam thức $3x^2 - 4x$ có 2 nghiệm $x = 0, x = \frac{4}{3}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	$4/3$	$+\infty$
VT	+		-	+

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x < 0$ hoặc $x > \frac{4}{3}$ hay $T = (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{3}; +\infty)$

* Cách 2: Ta có: $3x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > \frac{4}{3}$ (bảng xét dấu làm nháp)

i) $3 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$

b) $\frac{2x^2 - 16x + 27}{x^2 - 7x + 10} \leq 2$

c) $\frac{x+1}{x-1} + 2 > \frac{x-1}{x}$

Giải: a) $\frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$. Ta có: $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$; $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$	-2	1/2	2	3	$+\infty$
VT	+	-	+	-	+	

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x \leq -2$ hoặc $\frac{1}{2} \leq x < 2$ hoặc $x > 3$ hay $T = (-\infty; -2] \cup [\frac{1}{2}; 2) \cup (3; +\infty)$

$$b) \frac{2x^2 - 16x + 27}{x^2 - 7x + 10} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 16x + 27}{x^2 - 7x + 10} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 16x + 27 - 2(x^2 - 7x + 10)}{x^2 - 7x + 10} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x + 7}{x^2 - 7x + 10} \leq 0. \text{ Ta có: } * -2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}; * x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$	2	7/2	5	$+\infty$
VT	+	-	+	-	

Vậy: Nghiệm của BPT là: $2 < x \leq \frac{7}{2}$ hoặc $x > 5$ hay $T = (2; \frac{7}{2}] \cup (5; +\infty)$

$$c) \frac{x+1}{x-1} + 2 > \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} + 2 - \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) + 2x(x-1) - (x-1)(x-1)}{x(x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 2x^2 - 2x - x^2 + x + x - 1}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x} > 0$$

$$\text{Ta có: } * 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}; * x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu: (dùng quy tắc đan dấu)

x	$-\infty$	-1	1/2	0	1	$+\infty$
VT	+	-	+	-	+	

Vậy: Nghiệm của BPT là: $x < -1$ hoặc $\frac{1}{2} < x < 0$ hoặc $x > 1$ hay $T = (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; 0) \cup (1; +\infty)$

Ghi nhớ:

1) Để PT có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$

2) Để PT có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

3) Để PT vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

* Xét thêm TH: $a = 0$

4) Để PT có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

7) Để PT có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

* Xét thêm TH: $a = 0$

8) Để biểu thức $f(x)$ luôn dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

* Xét thêm TH: $a = 0$

9) Để biểu thức $f(x)$ luôn âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

* Xét thêm TH: $a = 0$

10) Định lí Vi-ét:

Bài 5: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm trái dấu

$$2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$$

Giải: Để PT có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow 2(2m^2 - 3m - 5) < 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 6m - 10 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}$$

* nháp

x	$-\infty$	-1	5/2	$+\infty$
VT	+		-	+

Bài 6: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

$$x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$$

Giải: Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4.1.(m^2 - 2m + 1) = 4m^2 - 4m^2 + 8m - 4 = 8m - 4$

Để PT có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 8m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

Vậy: Với $m > \frac{1}{2}$ thì PT có 2 nghiệm phân biệt

Bài 7: Tìm các giá trị của m để phương trình sau vô nghiệm: $(m - 3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$

Giải: * Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$: PT trở thành: $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Suy ra: $m = 3$ (loại)

* Nếu $m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$. Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4.(m - 3).(m - 6)$
 $= 4m^2 - 4(m^2 - 6m - 3m + 18) = 36m - 72$

$$\text{Để PT vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 \neq 0 \\ 36m - 72 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2$$

Vậy: Với $m < 2$ thì PT vô nghiệm

Bài 8: Cho phương trình: $mx^2 + 2(m + 3)x + m = 0$

a) Định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu

b) Định m để phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt

Giải: a) Để PT có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

* $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m + 3)^2 - 4.m.m = 4m^2 + 24m + 36 - 4m^2 = 24m + 36$ * $P = \frac{c}{a} = \frac{m}{m}$

Suy ra: $\begin{cases} 24m + 36 > 0 \\ \frac{m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$. Vậy: Với $-\frac{3}{2} < m \neq 0$ thì PT có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu

b) Để PT có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ * $S = -\frac{b}{a} = \frac{-2(m + 3)}{m}$

Suy ra: $\begin{cases} 24m + 36 > 0 \\ \frac{m}{m} > 0 \\ \frac{-2(m + 3)}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \neq 0 \\ m < -3 \vee m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$. Vậy: Với $m > 0$ thì PT có 2 nghiệm âm phân biệt

Bài 9: Với giá trị nào của m thì biểu thức $f(x) = (2 - m)x^2 - 2x + 1$ luôn dương

Giải: * Với $2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$, ta được: $f(x) = -2x + 1$ có cả giá trị âm, chẳng hạn: $f(1) = -1$

Suy ra: $m = 2$ (loại)

* Với $2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.(2 - m).1 = 4 - 8 + 4m = 4m - 4$

Để $f(x)$ luôn dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m > 0 \\ 4m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$

Vậy: Với $m < 1$ thì biểu thức $f(x)$ luôn dương

Bài 10: Định m để phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + x_2^2 = 8$$

Giải: Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m - 1)^2 - 4.1.(m^2 - 3m) = 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12m = 4m + 4$

Để PT có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

Theo đề bài, ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8 \Leftrightarrow S^2 - 2P = 8$

$$\Leftrightarrow [2(m-1)]^2 - 2.(m^2 - 3m) = 8 \Leftrightarrow (2m-2)^2 - 2m^2 + 6m = 8 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện). Vậy: Với } m = -1, m = 2 \text{ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài}$$

Bài 11: Chứng minh phương trình sau luôn luôn có nghiệm với mọi m : $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

Giải: Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m-1)^2 - 4.1.(m-3) = 4m^2 - 8m + 4 - 4m + 12$
 $= 4m^2 - 12m + 16 > 0, \forall m$ (vì $\Delta_m = -112 < 0$ và $a = 4 > 0$)

Vậy: Phương trình sau luôn luôn có nghiệm với mọi m (đpcm)

Ghi nhớ: Chứng minh PT luôn luôn có nghiệm (hay có 2 nghiệm phân biệt), ta chứng minh: $\Delta > 0, \forall m$

Bài 12: Giải các hệ bất phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} 3x^2 - 7x + 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$$

Giải: a) Ta có:
$$\begin{cases} 3x^2 - 7x + 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \text{ hoặc } x > 2 \\ -1 < x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{3}$$

b) Ta có:
$$\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{7}{2} \text{ hoặc } x \geq -1 \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$$

Bài 13: Giải các bất phương trình sau

a) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$

b) $\sqrt{x^2 - 2x - 15} + 3 \leq x$

Ghi nhớ: 1) $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$ 2) $\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$

Giải: a) Ta có: $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 5 \leq x < 14$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $5 \leq x < 14$ hay $T = [5; 14)$

b) $\sqrt{x^2 - 2x - 15} + 3 \leq x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 15} \leq x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 15 \leq (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \text{ hoặc } x \geq 5 \\ x \geq 3 \\ x \leq 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 5 \leq x \leq 6$. Vậy: Nghiệm của BPT là: $5 \leq x \leq 6$ hay $T = [5; 6]$

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$

b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 5$

c) $f(x) = 16 - 8x + x^2$

d) $f(x) = -16x^2 + 24x - 9$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 6$

f) $f(x) = 2x^2 - 7x - 15$

g) $f(x) = (9x^2 - 4)(-12x^2 + 17x + 105)$

h) $f(x) = (x^2 - 6x - 7)(4x + 12)$

i) $f(x) = (4 - 4x^2)x^2(x^2 - 6x + 8)$

j) $f(x) = (5x^2 + 10x)(4 - x)^2(x^2 - 11x + 28)$

Bài 2: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{9x^2 - 16}$

b) $f(x) = \frac{(x - 7)(6x - 3x^2)}{4x^2 - 19x + 12}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 12x - 64}{(2x - 6)^2(4 - x^2)}$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $7x^2 + 4x + 11 < 0$

b) $-3x^2 + 6x - 9 < 0$

c) $16x^2 + 8x + 1 > 0$

d) $9 - 6x + x^2 \leq 0$

e) $25x^2 + 30x + 9 \geq 0$

f) $2x^2 - 5x + 3 > 0$

g) $-2x^2 - 9x - 9 \geq 0$

h) $6x - 15x^2 > 0$

i) $8 - 2x^2 \leq 0$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $(3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1) \geq 0$

b) $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5) < 0$

c) $(2x + 1)(x^2 + x - 30) > 0$

d) $x^4 - 9x^2 \leq 0$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0$

b) $\frac{x^2 - 6x + 8}{-x^2 - 8x + 9} \leq 0$

c) $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1$

d) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^4 - 16x^2} < 0$

e) $\frac{x - 7}{4x^2 - 19x + 12} \geq 0$

f) $\frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} \geq 1$

Bài 6: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4}$

b) $\frac{20}{x^2 - 7x + 12} + \frac{10}{x - 4} + 1 > 0$

c) $\frac{2x - 5}{x^2 - 6x - 7} < \frac{1}{x - 3}$

d) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \leq 0$

Bài 7: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu:

$$(1 - m^2)x^2 + 2(m^2 + 1)x + m^2 - 3m + 2 = 0$$

Bài 8: Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt:

$$x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5 = 0$$

Bài 9: Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt:

$$(m - 2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$$

Bài 10: Tìm các giá trị của m để phương trình sau vô nghiệm:

$$(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$$

Bài 11: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương:

$$f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1$$

Bài 12: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm:

$$f(x) = (m - 2)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1$$

Bài 13: Chứng minh phương trình sau luôn luôn có nghiệm với mọi m :

$$(m - 1)x^2 + (3m - 2)x + 3 - 2m = 0$$

Bài 14: Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 1$

$$(m + 1)x^2 - (m - 1)x + m - 2 = 0$$

Bài 15: Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$(m - 4)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1 = 0$$

Bài 16: Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm:

$$(m + 2)x^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$$

Bài 17: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 - 12x - 64 < 0 \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases}$

Bài 18: Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x + 3} < 1 - x$

b) $\sqrt{5x^2 + 61x} \leq 4x + 2$