, $\overrightarrow{IB}=(b;-y_0)$, $\overrightarrow{AB}=(b;-a)$. Do $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow b^2+ay_0=0\Rightarrow y_0=-\dfrac{b^2}{a}$.

Mặc khác $R^2=IB^2=b^2+y_0^2=b^2+\dfrac{b^4}{a^2}$.

Vậy phương trình của (C) là $x^2+\left(y+\dfrac{b^2}{a}\right)^2=b^2+\dfrac{b^4}{a^2}$.

Câu 44: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn hai đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $(C'): x^2+y^2+4x-5=0$ cùng đi qua $M(1;0)$. Viết phương trình đường thẳng d qua M cắt hai đường tròn $(C),(C')$ lần lượt tại A, B sao cho $MA=2MB$
.

A. $d:6x+y+6=0$ hoặc $d:6x-y+6=0$. **B.** $d:6x-y-6=0$ hoặc $d:6x-y+6=0$.
C. $d:-6x+y-6=0$ hoặc $d:6x-y-6=0$. **D.** $d:6x+y-6=0$ hoặc $d:6x-y-6=0$.

Lời giải.

Chọn D

Gọi d là đường thẳng qua M có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b)\Rightarrow d:\begin{cases}x=1+at\\y=bt\end{cases}$

- Đường tròn $(C_1): I_1(1;1), R_1=1$. $(C_2): I_2(-2;0), R_2=3$, suy ra :
$(C_1):(x-1)^2+(y-1)^2=1, (C_2):(x+2)^2+y^2=9$

- Nếu d cắt (C_1) tại A : $\Rightarrow (a^2+b^2)t^2-2bt=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\rightarrow M\\ t=\dfrac{2b}{a^2+b^2}\end{array}\right.\Rightarrow A\left(1+\dfrac{2ab}{a^2+b^2};\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)$

- Nếu d cắt (C_2) tại B : $\Rightarrow (a^2+b^2)t^2+6at=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\rightarrow M\\ t=-\dfrac{6a}{a^2+b^2}\end{array}\right.\Leftrightarrow B\left(1-\dfrac{6a^2}{a^2+b^2};-\dfrac{6ab}{a^2+b^2}\right)$

- Theo giả thiết: $MA=2MB\Leftrightarrow MA^2=4MB^2\ (*)$

- Ta có : $\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)^2=4\left[\left(\dfrac{6a^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{6ab}{a^2+b^2}\right)^2\right]$

$\Leftrightarrow \dfrac{4b^2}{a^2+b^2}=4.\dfrac{36a^2}{a^2+b^2}\Leftrightarrow b^2=36a^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=-6a\rightarrow d:6x+y-6=0\\ b=6a\rightarrow d:6x-y-6=0\end{array}\right.$

Câu 45: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn có phương trình $(C_1): x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$. Phương trình nào sau đây là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

A. $2\left(2-3\sqrt{5}\right)x+\left(2-3\sqrt{5}\right)y+4=0$ hoặc $2x+1=0$.

B. $2\left(2-3\sqrt{5}\right)x+\left(2+3\sqrt{5}\right)y+4=0$ hoặc $2x+1=0$.

C. $2\left(2-3\sqrt{5}\right)x+\left(2-3\sqrt{5}\right)y+4=0$ hoặc $2\left(2+3\sqrt{5}\right)x+\left(2-3\sqrt{5}\right)y+4=0$.

D. $2\left(2-3\sqrt{5}\right)x+\left(2-3\sqrt{5}\right)y+4=0$ hoặc $6x+8y-1=0$.

Lời giải.

Chọn D

- Ta có :

$(C_1): x^2+(y-2)^2=9 \Rightarrow I_1(0;2), R_1=3,\quad (C_2):(x-3)^2+(y+4)^2=9 \Rightarrow I_2(3;-4), R_2=3$

- Nhận xét : $I_1I_2=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}<3+3=6 \Rightarrow (C_1)$ không cắt (C_2)

- Gọi $d: ax+by+c=0\ (a^2+b^2\neq 0)$ là tiếp tuyến chung , thế thì : $d(I_1,d)=R_1, d(I_2,d)=R_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3(1) \\ \dfrac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3(2) \end{cases} \Rightarrow \frac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |2b+c|=|3a-4b+c|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-4b+c=2b+c \\ 3a-4b+c=-2b-c \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ 3a-2b+2c=0 \end{array}\right.$. Mặt khác từ (1): $(2b+c)^2=9(a^2+b^2) \Leftrightarrow$

- Trường hợp: $a=2b$ thay vào (1):

$$(2b+c)^2=9(4b^2+b^2) \Leftrightarrow 41b^2-4bc-c^2=0.\Delta'_b=4c^2+41c^2=45c^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{2b-3\sqrt{5}c}{4} \\ b=\dfrac{(2+3\sqrt{5})c}{4} \end{array}\right.$$

- Do đó ta có hai đường thẳng cần tìm :

$$d_1: \frac{(2-3\sqrt{5})}{2}x+\frac{(2-3\sqrt{5})}{4}y+1=0 \Leftrightarrow 2(2-3\sqrt{5})x+(2-3\sqrt{5})y+4=0$$

$$d_1: \frac{(2+3\sqrt{5})}{2}x+\frac{(2+3\sqrt{5})}{4}y+1=0 \Leftrightarrow 2(2+3\sqrt{5})x+(2+3\sqrt{5})y+4=0$$

- Trường hợp : $c=\dfrac{2b-3a}{2}$, thay vào (1) : $\dfrac{\left|2b+\dfrac{2b-3a}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \Leftrightarrow |2b-a|=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\Leftrightarrow (2b-a)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 3b^2-4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \to c=-\dfrac{a}{2} \\ b=\dfrac{4a}{3} \to c=-\dfrac{a}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0, a=-2c \\ b=\dfrac{4a}{3}, a=-6c \end{array}\right.$$

- Vậy có 2 đường thẳng : $d_3: 2x-1=0$, $d_4: 6x+8y-1=0$

Câu 46: Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn: $(C_1):(x-5)^2+(y+12)^2=225$ và $(C_2):(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

A. $d:\left(\dfrac{14+10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\dfrac{175+10\sqrt{7}}{21}=0$ hoặc $d:\left(\dfrac{14+10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\dfrac{175-10\sqrt{7}}{21}=0$.

B. $d:\left(\dfrac{14-10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\dfrac{175+10\sqrt{7}}{21}=0$ hoặc $d:\left(\dfrac{14+10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\dfrac{175-10\sqrt{7}}{21}=0$.

C. $d:\left(\dfrac{14-10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\dfrac{175+10\sqrt{7}}{21}=0$ hoặc $d:\left(\dfrac{14+10\sqrt{7}}{21}\right)x+y+\dfrac{175-10\sqrt{7}}{21}=0$.

D. $d:\left(\frac{14-10\sqrt{7}}{21}\right)x+y+\frac{175+10\sqrt{7}}{21}=0$ hoặc $d:\left(\frac{14-10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\frac{175-10\sqrt{7}}{21}=0$.

Lời giải

Chọn B

- Ta có (C) với tâm $I(5;-12), R=15$. (C') có $J(1;2)$ và $R'=5$. Gọi d là tiếp tuyến chung có phương trình: $ax+by+c=0$ ($a^2+b^2\neq 0$).

- Khi đó ta có : $h(I,d)=\frac{|5a-12b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=15\ (1)$, $h(J,d)=\frac{|a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5\,(2)$

- Từ (1) và (2) suy ra : $|5a-12b+c|=3|a+2b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5a-12b+c=3a+6b+3c\\5a-12b+c=-3a-6b-3c\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a-9b=c\\-2a+\frac{3}{2}b=c\end{array}\right.$. Thay vào (1): $|a+2b+c|=5\sqrt{a^2+b^2}$ ta có hai trường hợp :

- Trường hợp : c=a-9b thay vào (1): $(2a-7b)^2=25(a^2+b^2)\Leftrightarrow 21a^2+28ab-24b^2=0$

Suy ra : $\left[\begin{array}{l}a=\frac{14-10\sqrt{7}}{21}\to d:\left(\frac{14-10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\frac{175+10\sqrt{7}}{21}=0\\a=\frac{14+10\sqrt{7}}{21}\to d:\left(\frac{14+10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\frac{175-10\sqrt{7}}{21}=0\end{array}\right.$

- Trường hợp : $c=-2a+\frac{3}{2}b\Rightarrow (1):(7b-2a)^2=100(a^2+b^2)\Leftrightarrow 96a^2+28ab+51b^2=0$. Vô nghiệm. (Phù hợp vì : $IJ=\sqrt{16+196}=\sqrt{212}<R+R'=5+15=20=\sqrt{400}$. Hai đường tròn cắt nhau) .

Câu 47: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2+2x-8y-8=0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d:3x+y-2=0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

A. $d':3x-y+19=0$ hoặc $d':3x+y-21=0$.
B. $d':3x+y+19=0$ hoặc $d':3x+y+21=0$.
C. $d':3x+y+19=0$ hoặc $d':3x+y-21=0$.
D. $d':3x+y-19=0$ hoặc $d':3x-y-21=0$.

Lời giải

Chọn C

- Đường thẳng d' song song với $d:3x+y+m=0$

- IH là khoảng cách từ I đến d': $IH=\frac{|-3+4+m|}{5}=\frac{|m+1|}{5}$

- Xét tam giác vuông IHB: $IH^2=IB^2-\left(\frac{AB^2}{4}\right)=25-9=16$

$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{25}=16\Leftrightarrow |m+1|=20\Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=19\to d':3x+y+19=0\\m=-21\to d':3x+y-21=0\end{array}\right.$.

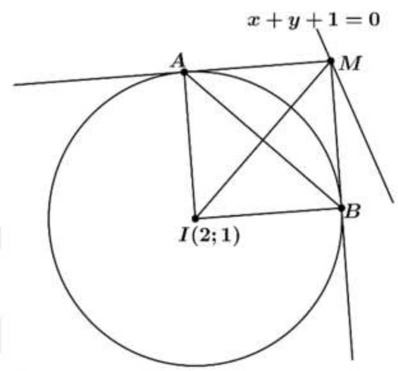
Câu 48: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y-1=0$ và đường thẳng $d: x+y+1=0$. Tìm những điểm M thuộc đường thẳng d sao cho từ điểm M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 90^0.

A. $M_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right)$ hoặc $M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right)$. **B.** $M_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}+1\right)$ hoặc $M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}+1\right)$.

C. $M_1\left(\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right)$ hoặc $M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right)$. **D.** $M_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right)$ hoặc $M_2\left(\sqrt{2};\sqrt{2}+1\right)$.

Lời giải

Chọn A.



- M thuộc d suy ra $M(t;-1-t)$. Nếu 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau thì $MAIB$ là hình vuông (A, B là 2 tiếp điểm). Do đó $AB=MI=IA\sqrt{2}=R\sqrt{2}=\sqrt{6}.\sqrt{2}=2\sqrt{3}$

- Ta có : $MI=\sqrt{(2-t)^2+(2+t)^2}=\sqrt{2t^2+8}=2\sqrt{3}$

- Do đó : $2t^2+8=12 \Leftrightarrow t^2=2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\sqrt{2}\to M_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right) \\ t=\sqrt{2}\to M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right)\end{array}\right.$.

Câu 49: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$ Tia Oy cắt (C) tại $A(0;2)$. Lập phương trình đường tròn (C'), bán kính $R'=2$ và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

A. $(C'):\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y+3)^2=4$. **B.** $(C'):\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-3)^2=4$.

C. $(C'):\left(x+\sqrt{3}\right)^2+(y-3)^2=4$. **D.** $(C'):\left(x+\sqrt{3}\right)^2+(y+3)^2=4$.

Lời giải

Chọn B

- (C) có $I\left(-2\sqrt{3};0\right)$, $R=4$. Gọi J là tâm đường tròn cần tìm: $J(a;b)$ $\Rightarrow (C'):(x-a)^2+(y-b)^2=4$

-Do (C) và (C') tiếp xúc ngoài với nhau cho nên khoảng cách $IJ=R+R'$

$\Rightarrow \sqrt{\left(a+2\sqrt{3}\right)^2+b^2}=4+2=6 \Leftrightarrow a^2+4\sqrt{3}a+b^2=28$

- Vì $A(0;2)$ là tiếp điểm cho nên : $(0-a)^2+(2-b)^2=4(2)$

- Do đó ta có hệ : $\begin{cases}\left(a+2\sqrt{3}\right)^2+b^2=36 \\ a^2+(2-b)^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4\sqrt{3}a+b^2=24 \\ a^2-4b+b^2=0\end{cases}$

- Giải hệ tìm được: $b=3$ và $a=\sqrt{3} \Rightarrow (C'):\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-3)^2=4$.

Câu 50: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn : (C_1): $x^2+y^2=13$ và $(C_2):(x-6)^2+y^2=25$ cắt nhau tại $A(2;3)$.Viết phương trình tất cả đường thẳng d đi qua A và cắt $(C_1),(C_2)$ theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

A. $d: x-2=0$ và $d: 2x-3y+5=0$. **B.** $d: x-2=0$ và $d: 2x-3y-5=0$.

C. $d: x+2=0$ và $d: 2x-3y-5=0$. **D.** $d: x-2=0$ và $d: 2x+3y+5=0$.

Lời giải

Chọn A.

- Từ giả thiết : $(C_1): I=(0;0), R=\sqrt{13}.(C_2); J(6;0), R'=5$

- Gọi đường thẳng d qua $A(2;3)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow d: \begin{cases} x=2+at \\ y=3+bt \end{cases}$

- d cắt (C_1) tại A, B: $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+at \\ y=3+bt \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[(a^2+b^2)t^2+2(2a+3b)t\right]=0 \to t=-\dfrac{2a+3b}{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow B\left(\dfrac{b(2b-3a)}{a^2+b^2}; \dfrac{a(3a-2b)}{a^2+b^2}\right)$. Tương tự d cắt (C_2) tại A, C thì tọa độ của A, C là nghiệm của hệ : $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+at \\ y=3+bt \\ (x-6)^2+y^2=25 \end{cases} \to t=\dfrac{2(4a-3b)}{a^2+b^2} \Leftrightarrow C\left(\dfrac{10a^2-6ab+2b^2}{a^2+b^2}; \dfrac{3a^2+8ab-3b^2}{a^2+b^2}\right)$

- Nếu 2 dây cung bằng nhau thì A là trung điểm của A, C. Từ đó ta có phương trình :

$$\Leftrightarrow \frac{(2b^2-3ab)}{a^2+b^2}+\frac{10a^2-6ab+2b^2}{a^2+b^2}=4 \Leftrightarrow 6a^2-9ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \to; d: \begin{cases} x=2 \\ y=3+t \end{cases} \\ a=\dfrac{3}{2}b \to \vec{u}=\left(\dfrac{3}{2}b; b\right) // \vec{u'}=(3;2) \end{array}\right.$$

Suy ra : $\to d: \begin{cases} x=2+3t \\ y=3+2t \end{cases}$. Vậy có 2 đường thẳng: $d: x-2=0$ và $d': 2x-3y+5=0$.