Ta có $f(0)=32$, $f(m^2)=\frac{1}{2}(64-m^6)$ khi $m<-2 \vee m>2$ thì $\frac{1}{2}(64-m^6)<0$ và $m^2>0$.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-\frac{3}{2}m^2x^2+32\right)=-\infty \Rightarrow \exists\alpha<0$ sao cho $f(\alpha)<0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-\frac{3}{2}m^2x^2+32\right)=+\infty \Rightarrow \exists\beta>m^2$ sao cho $f(\beta)>0$.

Do đó ta có $\begin{cases} f(\alpha).f(0)<0 \\ f(0).f(m^2)<0 \\ f(m^2).f(\beta)<0 \end{cases}$. Vì hàm số f(x) xác định và liên tục trên R nên liên tục trên các đoạn $[\alpha;0],[0;m^2],[m^2;\beta]$ nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất ba nghiệm lần lượt thuộc các khoảng $(\alpha;0),(0;m^2),(m^2;\beta)$. Vì f(x) là hàm bậc ba nên nhiều nhất chỉ có ba nghiệm.

Kết luận với $m<-2 \vee m>2$ thì phương trình $f(x)=x^3-\frac{3}{2}m^2x^2+32=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt thỏa $x_1<0<x_2<x_3$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng phương trình $(m^2-m+3)x^{2n}-2x-4=0$ với $n\in\mathbb{N}^*$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=(m^2-m+3)x^{2n}-2x-4$.

Ta có $f(-2)=(m^2-m+3)(-2)^{2n}-2(-2)-4=(m^2-m+3).2^{2n}>0,\forall m\in\mathbb{R}$, $f(0)=-4<0,\forall m\in\mathbb{R}$. Từ đó có $f(-2).f(0)<0,\forall m\in\mathbb{R}$ (1). Do hàm số xác định và liên tục trên R nên hàm số liên tục trên đoạn $[-2;0]$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;0)$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

Kết luận phương trình $f(x)=0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị tham số m.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x-2 & x\le 2 \\ ax+b & 2<x<6 \\ x+4 & x\ge 6 \end{cases}$

Với giá trị nào của a, b thì hàm số $f(x)$ liên tục trên R?

LỜI GIẢI

Hàm số đã cho liên tục tại mọi x khác 2 và khác 6. Hàm số đã cho liên tục trên R khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=2$ và $x=6.$

+ Tại $x=2$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2-1=0; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2a+b; f(2)=0.$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2a+b=0.$

+ Tại $x=6; \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=6+4=10; \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=6a+b; f(6)=10.$

Hàm số liên tục tại $x=6$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=f(6)\Leftrightarrow 6a+b=10.$

Do đó hàm số đã cho liên tục trên R khi và chỉ khi $\begin{cases} 2a+b=0 \\ 6a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=-5. \end{cases}$

Câu 2: Tìm a, b, c để hàm số sau liên tục trên R: $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<-\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 2+\cos x & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

LỜI GIẢI

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{\pi}{2}\right),\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right),\left(\dfrac{\pi}{2};+\infty\right).$ Do đó hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi hàm số liên tục tại các điểm $x=-\dfrac{\pi}{2}, x=\dfrac{\pi}{2}.$

+ Tại $x=-\dfrac{\pi}{2}$ ta có $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-a+b;$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-}\sin x=-1;\ \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}(a\sin x+b)=-a+b.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-\frac{\pi}{2}$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)} f(x)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -a+b=-1.$

+ Tại $x=\frac{\pi}{2}$, ta có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a+b;$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(2+\cos x)=2;\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(a\sin x+b)=a+b.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=\frac{\pi}{2}$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow a+b=2.$

Do đó hàm đã cho liên tục trên R $\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b=-1\\ a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\ a=\frac{3}{2}.\end{cases}$

Câu 3 : Tìm a để các hàm số sau liên tục tại x_0 :

1). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & x\ne 2\\ ax+1 & x=2\end{cases}$ tại $x_0=2$

2). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3} & x\ne -3\\ ax+3 & x=-3\end{cases}$ $x_0=-3$

3). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0\\ a+\dfrac{4-x}{x+2} & x\ge 0\end{cases}$ tại $x_0=0$

4). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0\\ a+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & x\ge 0\end{cases}$ tại $x_0=0$

LỜI GIẢI

1). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & x\neq 2\\ ax+1 & x=2\end{cases}$ tại $x_0=2$

Ta có: $f(x_0)=f(2)=2a+1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(x+\sqrt{x+2})(4x+1-9)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})}=\dfrac{9}{8}$

Để hàm số liên tục tại $x_0=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow\dfrac{9}{8}=2a+1\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{16}$.

2). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3} & x\neq -3\\ ax+3 & x=-3\end{cases}$ $x_0=-3$

Ta có: $f(x_0)=f(-3)=ax+3$

Ta có: $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x^3-3x^2+3x-9)}{(x+3)(x^2+1)}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-3x^2+3x-9}{x^2+1}=\dfrac{(-3)^3-3.(-3)^2+3.(-3)-9}{(-3)^2+1}=-\dfrac{36}{5}$

Để hàm số liên tục tại $x_0=-3$ thì $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=f(-3)\Leftrightarrow\dfrac{-36}{5}=-3a+3\Leftrightarrow a=\dfrac{17}{5}$.

3). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0\\ a+\dfrac{4-x}{x+2} & x\geq 0\end{cases}$ tại $x_0=0$.

Có $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-x-1-x}{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=\dfrac{-2}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}}=\dfrac{-2}{2}=-1.$

Có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(a + \dfrac{4-x}{x+2}\right) = a + \dfrac{4-0}{0+2} = a+2$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow -1 = a+2 \Leftrightarrow a = -3$.

4). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0 \\ a + \dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & x \ge 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-x-1-x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)} = \dfrac{-2}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} = \dfrac{-2}{2} = -1.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(a + \dfrac{x^3-3x+1}{x+2}\right) = a + \dfrac{1}{2}$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow -1 = a + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{2}$.

Câu 4: Định a và b để các hàm số sau liên tục tại x_0:

1). $f(x) = \begin{cases} a & x<1 \\ \dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-6x+5} & x>1 \\ b & x=1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

2). $f(x) = \begin{cases} 1 & x=a \\ \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & x>a \\ b-2x & x<a \end{cases}$ tại $x_0 = a$

LỜI GIẢI

1). $f(x) = \begin{cases} a & x<1 \\ \dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-6x+5} & x>1 \\ b & x=1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} a = a$ (a là hằng số)

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-6x+5} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-5)(x-1)} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x+2}}{x-5} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = b = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2). $f(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ \frac{x^2-a^2}{x-a} & x > a \quad x_0 = a \\ b-2x & x < a \end{cases}$

Ta có: $f(x_0) = f(a) = 1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^+} x + a = 2a$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-}(b-2x) = b-2a$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = a$ thì $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b-2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$.

Câu 5 : Khảo sát tính liên tục của các hàm số sau :

a). $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1} & x > 1 \\ x^2+x & x \le 1 \end{cases}$

b). $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x \ne 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ c). $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} & x > 1 \\ \cos(x-1) & x \le 1 \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). Tập xác định của f(x) là $D = \mathbb{R}$

Với mọi $x_0 \in (1;+\infty)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1} = \frac{\sqrt{3x_0+1}-\sqrt{x_0+3}}{x_0-1} = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ (1).

Với mọi $x_0 \in (-\infty;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2+x\right) = x_0^2 + x_0 = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ (2).

Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 1$.

$\circ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1-x-3}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-2}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3.1+1}+\sqrt{1+3}} = \dfrac{1}{2}.$

$\circ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x\right) = 1^2 + 1 = 2.$

$\circ$ $f(1) = 2$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Vậy hàm số f(x) không liên tục tại $x_0 = 1$.

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục trên R.

b). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

- Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$

Có $f(1) = 3$

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2\right) = 3$$

Vậy có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3 \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 1$ (1).

Với mọi $x_0 \neq 1$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \dfrac{x_0^3 - x_0^2 + 2x_0 - 2}{x_0 - 1} = f(x_0) \Rightarrow$ hàm số liên tục $\vee x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

c). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} & x>1\\ \cos(x-1) & x\le 1\end{cases}$

Tập xác định của f(x) là $D=\mathbb{R}$

Với mọi $x_0\in(1;+\infty)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x_0+3}-\sqrt{3x_0+1}}{x_0-1}=f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ (1).

Với mọi $x_0\in(-\infty;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\cos(x-1)=\cos(x_0-1)=f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ (2).

Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0=1$.

$\circ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1-x-3}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-2}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3.1+1}+\sqrt{1+3}}=\dfrac{1}{2}.$

$\circ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=1^2+1=2.$

$\circ f(1)=2$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Vậy hàm số f(x) không liên tục tại $x_0=1$.

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục trên R.