Câu 28: Nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - x - 6 \le 0 \\ x^3 + x^2 - x - 1 \ge 0 \end{cases}$ là:

A. $-2 \le x \le 3$. **B.** $-1 \le x \le 3$. **C.** $1 \le x \le 2$ hoặc $x = -1$. **D.** $1 \le x \le 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $2x^2 - x - 6 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le x \le 2,\ (I)$.

$x^3 + x^2 - x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-1) \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x \ge 1 \end{array}\right.$. (II)

Từ (I) và (II) suy ra nghiệm của hệ là $S = [1;\ 2] \cup \{-1\}$.

Câu 29: Bất phương trình: $|x^4 - 2x^2 - 3| \le x^2 - 5$ có bao nhiêu nghiệm nghiệm nguyên?

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** Nhiều hơn 2 nhưng hữu hạn.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = x^2 \ge 0$

Ta có $|t^2 - 2t - 3| \le t - 5$.

Nếu $t^2 - 2t - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ t \ge 3 \end{array}\right.$ thì ta có $t^2 - 3t + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le t \le 2$ loại

Nếu $t^2 - 2t - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 3$ thì ta có $-t^2 + t + 8 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le \frac{1-\sqrt{33}}{2} \\ t \ge \frac{1+\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$ loại.

Câu 30: Cho bất phương trình: $x^2 - 2x \le |x-2| + ax - 6$. Giá trị dương nhỏ nhất của a để bất phương trình có nghiệm gần nhất với số nào sau đây:

A. 0,5. **B.** 1,6. **C.** 2,2. **D.** 2,6.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Trường hợp 1: $x \in [2;+\infty)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành $x^2 - (a+3)x + 8 \le 0$

$\Leftrightarrow a \ge x + \frac{8}{x} - 3 \ge 4\sqrt{2} - 3 \approx 2,65\ \forall x \in [2;+\infty)$, dấu "=" xảy ra khi $x = 2\sqrt{2}$.

Trường hợp 2: $x \in (-\infty;2)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành $x^2 - (a+1)x + 4 \le 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a \ge x + \frac{4}{x} - 1\ khi\ x \in (0;2) & (1) \\ a \le x + \frac{4}{x} - 1\ khi\ x \in (-\infty;0) & (2) \end{array}\right.$. Giải (1) ta được $a > 3$ (theo bất đẳng thức cauchy).

Giải (2): $a \le x + \frac{4}{x} - 1 \Leftrightarrow a \le -2\sqrt{x.\frac{4}{x}} - 1 = -5$.

Vậy giá trị dương nhỏ nhất của a gần với số $2,6$.

Câu 31: Số nghiệm của phương trình: $\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}} = 2 - \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $x \ge -7$.

Đặt $t = \sqrt{x+7}$, điều kiện $t \ge 0$.

Ta có $\sqrt{t^2+1-2t} = 2 - \sqrt{t^2-6-t} \Leftrightarrow |t-1| = 2 - \sqrt{t^2-t-6}$

Nếu $t \ge 1$ thì ta có $3 - t = \sqrt{t^2-t-6} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6 = 9-6t+t^2 \\ t \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} = 3 \Leftrightarrow x = 2$

Nếu $t < 1$ thì ta có $1 + t = \sqrt{t^2-t-6} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6 = 1+2t+t^2 \\ t \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{7}{3}\ (l)$.

Câu 32: Nghiệm của bất phương trình: $(x^2+x-2)\sqrt{2x^2-1} < 0$ là:

A. $\left(1;\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup (2;+\infty)$. **B.** $\left\{-4;-5;-\frac{9}{2}\right\}$.

C. $\left(-2;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$. **D.** $(-\infty;-5] \cup \left[5;\frac{17}{5}\right] \cup \{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$(x^2+x-2)\sqrt{2x^2-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1 > 0 \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ -2 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-2;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right).$$

Câu 33: Bất phương trình $\frac{2x^2-x-1}{|x+1|-2x} \le -2x^2+x+1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** Nhiều hơn 3 nhưng hữu hạn.

Hướng dẫn giải

Chọn B

- Nếu $x \ge -1$ thì $\frac{2x^2-x-1}{|x+1|-2x} \le -2x^2+x+1 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1}{1-x} \le -2x^2+x+1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-x-1-(1-x)(-2x^2+x+1)}{1-x} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-x-1-(-2x^2+x+1+2x^3-x^2-x)}{1-x} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x^3+5x^2-x}{1-x} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(-2x^2+5x-1)}{1-x} \le 0$

Cho $x=0$; $-2x^2+5x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Lập bảng xét dấu ta có: $0 \le x \le \dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \vee 1 < x \le \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$.

Vì là nghiệm nguyên nên có nghiệm là $0;2$

- Nếu $x<-1$ thì $\dfrac{2x^2-x-1}{|x+1|-2x} \le -2x^2+x+1 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-x-1}{-1-3x} \le -2x^2+x+1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-x-1-(-1-3x)(-2x^2+x+1)}{-1-3x} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-x-1-(2x^2-x-1+6x^3-3x^2-3x)}{-1-3x} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-6x^3+x^2+3x}{-1-3x} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(-6x^2+x+3)}{-1-3x} \le 0$

Cho $x=0$; $-6x^2+x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{73}}{12} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{73}}{12} \end{array}\right.$; $-3x-1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

Lập bảng xét dấu ta có: $\dfrac{1-\sqrt{73}}{12} \le x < -\dfrac{1}{3} \vee 0 \le x \le \dfrac{1+\sqrt{73}}{12}$.

Vì là nghiệm nguyên nên có nghiệm là 0 (loại)

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.

Câu 34: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-1 \le 0 \\ x-m>0 \end{cases}$ có nghiệm khi

A. $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m \ne 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} x^2-1 \le 0 \\ x-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x>m \end{cases}$.

Do đó hệ có nghiệm khi $m<1$.

Câu 35: Xác định m để phương trình $(x-1)\left[x^2+2(m+3)x+4m+12\right]=0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1.

A. $m<-\dfrac{7}{2}$. **B.** $-2<m<1$ và $m \ne -\dfrac{16}{9}$.

C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$.   **D.** $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $(x-1)\left[x^2+2(m+3)x+4m+12\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+2(m+3)x+4m+12=0\ (*) \end{array}\right.$.

Giải sử phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, theo Vi-et ta có

$\begin{cases} x_1+x_2=-2(m+3) \\ x_1.x_2=4m+12 \end{cases}$.

Để phương trình $(x-1)\left[x^2+2(m+3)x+4m+12\right]=0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1. thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và đều lớn hơn -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1+2(m+3)+4m+12 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2-(4m+12)>0 \\ 6m+19 \neq 0 \\ (x_1+1)+(x_2+1)>0 \\ (x_1+1)(x_2+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ -2(m+3)+2>0 \\ 4m+12-2(m+3)+1>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-3 \end{array}\right. \\ m \neq -\frac{19}{6} \\ m<-2 \\ m>-\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2}<m<-3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \end{cases}.$$

Câu 36: Phương trình $(m+1)x^2-2(m-1)x+m^2+4m-5=0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thoả $2<x_1<x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

A. $-2<m<-1$.   **B.** $m>1$.   **C.** $-5<m<-3$.   **D.** $-2<m<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Để phương trình $(m+1)x^2-2(m-1)x+m^2+4m-5=0$ có có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thoả $2<x_1<x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m+1 \neq 0 \\ x_2 > x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2-(m+1)(m^2+4m-5)>0 \\ m \neq -1 \\ (x_1-2)+(x_2-2)>0 \\ (x_1-2)(x_2-2)>0 \end{cases}$$ .Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1.x_2=\frac{m^2+4m-5}{m+1} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)(-m^2-5m-6)>0 \\ m \neq -1 \\ \dfrac{2(m-1)}{m+1}-4>0 \\ \dfrac{m^2+4m-5}{m+1}-2.\dfrac{2(m-1)}{m+1}+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -2<m<1 \\ m<-3 \end{array}\right. \\ m \neq -1 \\ -3<m<-1 \\ m>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<-1.$$

Câu 37: Nghiệm dương nhỏ nhất của bất phương trình $\left||x^2-4x-5|+2x+9\right| \le |x^2-x+5|$ gần nhất với số nào sau đây

A. $2,8$. **B.** 3. **C.** $3,5$. **D.** $4,5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Lập bảng phá dấu giá trị tuyệt đối giải BPT trên ta được tập nghiệm là

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x \ge \dfrac{9}{2} \end{array}\right.$ vậy nghiệm dương nhỏ nhất là $x=4,5$, đáp án D

Câu 38: Tìm m để $\left|4x-2m-\dfrac{1}{2}\right| > -x^2+2x+\dfrac{1}{2}-m$ với mọi x?

A. $m>3$.

B. $m<\dfrac{3}{2}$.

C. $m>\dfrac{3}{2}$.

D. $-2<m<3$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta thấy để $\left|4x-2m-\dfrac{1}{2}\right| > -x^2+2x+\dfrac{1}{2}-m$ đúng với mọi x thì $-x^2+2x+\dfrac{1}{2}-m<0, \forall x \in \mathbb{R}$

Hay $-x^2+2x+\dfrac{1}{2}<m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{2}-m<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{3}{2}$.

Câu 39: Cho bất phương trình: $|x^2+x+a|+|x^2-x+a| \le 2x$ (1). Khi đókhẳng định nào sau đây đúng nhất?

A. (1) có nghiệm khi $a \le \dfrac{1}{4}$.

B. Mọi nghiệm của(1) đều không âm.

C. (1) có nghiệm lớn hơn 1 khi $a<0$.

D. Tất cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $|x^2+x+a|+|x^2-x+a| \le 2x \Leftrightarrow \left|\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(a-\dfrac{1}{4}\right)\right|+\left|\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(a-\dfrac{1}{4}\right)\right| \le 2x$

Do vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên để BPT có nghiệm thì $2x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$ nên B đúng.

Với $a>\dfrac{1}{4}$ BPT $\Leftrightarrow 2x^2-2x+2a \le 0$ vô nghiệm hay BPT có nghiệm khi $a \le \dfrac{1}{4}$ nên A đúng.