áp dụng bất đẳng thức Côsi cho x+y ; y+z ; x+z ta có

$$(x+y).(y+z).(z+x) \ge 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(x+z)} \quad \Rightarrow 2 \ge 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(z+x)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3} \Rightarrow S \le \frac{8}{27}.\frac{1}{27} = \frac{8}{729}$

Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

4) Ví dụ 4: Cho xy + yz + zx = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4 + y^4 + z^4$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho 6 số (x,y,z) ;(x,y,z)

Ta có $(xy+yz+zx)^2 \le \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \Rightarrow 1 \le \left(x^2+y^2+z^2\right)^2$ (1)

áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho (x^2, y^2, z^2) và (1,1,1)

Ta có $(x^2+y^2+z^2)^2 \le (1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4) \Rightarrow (x^2+y^2+z^2)^2 \le 3(x^4+y^4+z^4)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 \le 3(x^4+y^4+z^4) \Rightarrow x^4+y^4+z^4 \le \frac{1}{3}$

Vậy $x^4+y^4+z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi $x = y = z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. Một số chú ý:

1) Khi tìm GTNN, GTLN ta có thể đổi biến

Ví dụ : Khi tìm GTNN của A =$(x – 1)^2 + (x – 3)^2$, ta đặt x – 2 = y thì

A = $(y + 1)^2 + (y – 1)^2 = 2y^2 + 2 \ge 2$…

2) Khi tìm cực trị của một biểu thức, ta có thể thay đk của biểu thức này đạt cực trị bởi đk tương đương là biểu thức khác đạt cực trị:

+) -A lớn nhất $\Leftrightarrow$ A nhỏ nhất ; +) $\frac{1}{B}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ B nhỏ nhất (với B > 0)

+) C lớn nhất $\Leftrightarrow$ C^2 lớn nhất

Ví dụ: Tìm cực trị của $A = \frac{x^4+1}{\left(x^2+1\right)^2}$

a) Ta có A > 0 nên A nhỏ nhất khi $\frac{1}{A}$ lớn nhất, ta có

$$\frac{1}{A} = \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^4+1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4+1} \geq 1 \Rightarrow \min \frac{1}{A} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \max A = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

b) Ta có $(x^2-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 1 \geq 2x^2$. (Dấu bằng xẩy ra khi $x^2 = 1$)

Vì $x^4 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{x^4+1} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{2x^2}{x^4+1} \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow \max \frac{1}{A} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$

3) Nhiều khi ta tìm cực trị của biểu thức trong các khoảng của biến, sau đó so sámh các cực trị đó để để tìm GTNN, GTLN trong toàn bộ tập xác định của biến

Ví dụ: Tìm GTLN của $B = \frac{y}{5 - (x+y)}$

a) xét $x + y \leq 4$

- Nếu x = 0 thì A = 0

- Nếu $1 \leq y \leq 3$ thì $A \leq 3$

- Nếu y = 4 thì x = 0 và A = 4

b) xét $x + y \geq 6$ thì $A \leq 0$

So sánh các giá trị trên của A, ta thấy max A = 4 $\Leftrightarrow$ x = 0; y = 4

4) Sử dụng các hằng bất đẳng thức

Ví dụ: Tìm GTLN của A = $|2x + 3y|$ biết $x^2 + y^2 = 52$

Aùp dụng Bđt Bunhiacốpxki: $(a x + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ cho các số 2, x , 3, y ta có:

$(2x + 3y)^2 \le (2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) = (4 + 9).52 = 26^2 \Rightarrow |2x+3y| \le 26$

Max A = 26 $\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = 52 \Leftrightarrow 13x^2 = 52.4 \Leftrightarrow x = \pm\ 4$

Vậy: Ma x A = 26 $\Leftrightarrow$ x = 4; y = 6 hoặc x = - 4; y = - 6

5) Hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

Hai số có tích không đổi thì tổng của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

a)Ví dụ 1: Tìm GTLN của A = $(x^2 – 3x + 1)(21 + 3x – x^2)$

Vì $(x^2 – 3x + 1) + (21 + 3x – x^2) = 22$ không đổi nên tích $(x^2 – 3x + 1)(21 + 3x – x^2)$ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 – 3x + 1 = 21 + 3x – x^2 \Leftrightarrow x^2 – 3x – 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc x = - 2

Khi đó A = 11. 11 = 121 $\Rightarrow$ Max A = 121 $\Leftrightarrow$ x = 5 hoặc x = - 2

b) Ví dụ 2: Tìm GTNN của B = $\frac{(x+4)(x+9)}{x}$

Ta có: $B = \frac{(x+4)(x+9)}{x} = \frac{x^2+13x+36}{x} = x + \frac{36}{x} + 13$

Vì các số x và $\frac{36}{x}$ có tích $x.\frac{36}{x} = 36$ không đổi nên $x + \frac{36}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \frac{36}{x} \Leftrightarrow$

x = 6

$\Rightarrow$ A = $x + \frac{36}{x} + 13$ nhỏ nhất là min A = 25 $\Leftrightarrow$ x = 6

6)Trong khi tìm cực trị chỉ cần chỉ ra rằng tồn tại một giá trị của biến để xảy ra đẳng thức chứ không cần chỉ ra mọi giá trị để xảy ra đẳng thức

Ví dụ: Tìm GTNN của $A = |11^m - 5^n|$

Ta thấy 11^m tận cùng bằng 1, 5^n tận cùng bằng 5

Nếu $11^m > 5^n$ thì A tận cùng bằng 6, nếu $11^m < 5^n$ thì A tận cùng bằng 4

khi m = 2; n = 3 thÌ $A = |121 - 124| = 4 \Rightarrow$ min A = 4, chẳng hạn khi m = 2, n = 3