Đặt $\cot x = t$. Phương trình (1') trở thành: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 2$

Với $t = -1 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Với $t = 2 \Leftrightarrow \cot x = 2 \Leftrightarrow x = \operatorname{arc}\cot 2 + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \operatorname{arc}\cot 2 + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

3). $5\cos x - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0 \Leftrightarrow 5\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 10\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} - 12 = 0\ (1)$. Đặt $t = \sin\frac{x}{2}, t \in [-1;1]$. Phương trình (1') trở thành:

$5t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{6}{5}$ (loại).

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \pi + k4\pi (k \in \mathbb{Z})$

4). $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$

Các bạn để ý: $\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$*, nên ta nghĩ ngay đến công thức nhân đôi để đưa về phương trình bậc 2 theo cos, ta thực hiện như sau:*

$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \vee \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, cả hai nghiệm này đều nhận.

- $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=-\pi+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

5). $23\sin x-\sin 3x=24 \Leftrightarrow 23\sin x-\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)=24 \Leftrightarrow 4\sin^3 x+20\sin x-24=0$ (1). Đặt $\sin x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $4t^3+20t-24=0 \Leftrightarrow t=1$

$\Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

6). $\sin^3 x+3\sin^2 x+2\sin x=0$ (1)

Đặt $\sin x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $t^3+3t^2+2t=0$

$\Leftrightarrow t=-1 \vee t=-2 \vee t=0$, so với điều kiện nhận $t=-1 \vee t=0$.

Với $t=-1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $t=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

7). $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=4$ (1)

Ta có $\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

$(1) \Leftrightarrow 1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=4$ $(1')$

Đặt $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow t=3 \vee t=1$, so với điều kiện nhận $t=1$, suy ra $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

8). $\cos 4x+12\sin x\cos x-5=0 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x+6\sin 2x-5=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x - 3\sin 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \vee \sin 2x = 2$ (loại).

Với $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

9). $\frac{3}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3}\cot x - 6 = 0$. Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3(1 + \cot^2 x) - 2\sqrt{3}\cot x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\cot^2 x - 2\sqrt{3}\cot x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee \cot x = \sqrt{3}$.

Với $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

10). $4\cos^2(6x - 2) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13\ (1)$. Đặt $t = 3x - 1$

$(1) \Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 16\cos^2(-t) = 13 \Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 16\cos^2 t = 13$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 16.\frac{1 + \cos 2t}{2} = 13 \Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 8\cos 2t - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2t = \frac{1}{2} \vee \cos 2t = -\frac{5}{2}$ (loại).

Với $\cos 2t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2t = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2t = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ t = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ 3x - 1 = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}, x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$.

11). $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow\left(2\cos^2 x-1\right)-3\cos x=4.\frac{1+\cos x}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x-3=0\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\vee\cos x=3$ (loại).

$\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

12). $2\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2=0\ \ (1)$

$(1)\Leftrightarrow\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2=0\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0\vee\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2$ (loại).

Với $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

13). $\cos 5x.\cos x=\cos 4x.\cos 2x+3\cos^2 x+1\ \ (1)$

Biến đổi tích về tổng được:

$\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 6x)=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)+3\cos^2 x+1\Leftrightarrow\cos 4x=\cos 2x+6\cos^2 x+2$

Sau đó sử dụng công thức nhân đôi và hạ bậc:

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=\cos 2x+3(1+\cos 2x)+2\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-4\cos 2x-6=0\ \ (1')$.

Đặt $\cos 2x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $2t^2-4t-6=0\ \Leftrightarrow t=-1\vee t=3$. So với điều kiện nhận $t=-1$, suy ra: $\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Câu 5: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $4\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)-7=0$

2). $2\left(\cos^2 x+\frac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\frac{2}{\cos x}-\cos x\right)-1=0$

3). $3\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+4\left(\tan x+\cot x\right)+2=0$

4). $\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x=6$

LỜI GIẢI

1). $4\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)-7=0\ \ (1)$

Đặt $t=\sin x+\frac{1}{\sin x}\Leftrightarrow t^2=\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)^2\Rightarrow \sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}=t^2-2$

$(1)\Leftrightarrow 4\left(t^2-2\right)+4t-7=0\Leftrightarrow 4t^2+4t-15=0\Leftrightarrow t=-\frac{5}{2}\vee t=\frac{3}{2}$.

- Với $t=-\frac{5}{2}$: $\sin x+\frac{1}{\sin x}=-\frac{5}{2}\ (2)$, đặt $u=\sin x, u\in[-1;1]/\{0\}$

$(2)\Leftrightarrow 2u^2+5u+2=0\Leftrightarrow u=-\frac{1}{2}\vee u=-2$ (loại).

* $u=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

- Với $t=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \sin x+\frac{1}{\sin x}=\frac{3}{2}\ (3)$, đặt $v=\sin x, v\in[-1;1]/\{0\}$

$(3)\Leftrightarrow 2v^2-3v+2=0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

2). $2\left(\cos^2 x+\frac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\frac{2}{\cos x}-\cos x\right)-1=0\ \ (1)$