- Trên cơ sở các giá trị nghiệm đã biết. Áp dụng các tính chất như chia hết; số dư; số chính phương; chữ số tận cùng ….. ta chứng tỏ rằng với các giá trị khác phương trình vô nghiệm

Các ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Tìm $x;y\in Z^+$ thoả mãn: $x^6+3x^3+1=y^4$

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta thấy với $x=0;y=\pm1$ thì phương trình được nghiệm đúng. Ta cần chứng minh phương trình vô nghiệm với $x\neq 0$

+ Với $x=0;y=\pm1$ thì phương trình được nghiệm đúng

+ Với $x>0$. Khi đó:

$$x^6+2x^3+1<x^6+3x^3+1<x^6+4x^3+4\Rightarrow\left(x^3+1\right)^2<y^4<\left(x^3+2\right)^2\ (*)$$

Vì $\left(x^3+1\right);\left(x^3+2\right)$ là hai số nguyên liên tiếp nên không có giá trị nào của y thoả (*)

Vậy $x=0;y=\pm1$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Tìm $x;y\in Z^+$ thoả: $x^2+x-1=3^{2y+1}$ (2)

(*Tạp chí Toán học và tuổi trẻ*)

Gọi b là chữ số tận cùng của x (Với $b\in\{0;1;2;...;9\}$. Khi đó: $\left(x^2+x-1\right)$ có chữ số tận cùng là: 1, 5 hoặc 9. (*)

Mặt khác: 3^{2y+1} là luỹ thừa bậc lẻ của 3 nên có tận cùng là 3 hoặc 7. (**)

Từ (*) và (**) suy ra phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Tìm $x; y \in Z^+$ thoả mãn: $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$ (3)

$$(3) \Rightarrow (x-3)^2 = 4(25 - y^2) \Rightarrow \begin{cases} |y| \le 5 \\ (25 - y^2) = n^2 \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Do đó: $y \in \{-5; -4; -3; 0; 3; 4; 5\} \Rightarrow x \in \{3; 9; 11; 13\}$

Phương trình có nghiệm nguyên: $(x; y) \in \{(-5;3); (-4;9); (-3;11); (0;13); (3;11); (4;9); (5;3)\}$

PHƯƠNG PHÁP 6: Phương pháp lùi vô hạn *(xuống thang)*

Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với những phương trình có (*n – 1) *ẩn mà hệ số có ước chung khác* 1

- Dựa vào tính chất chia hết ta biểu diễn ẩn theo ẩn phụ nhằm "hạ" (giảm bớt) hằng số tự do, để có được phương trình đơn giản hơn.

- Sử dụng linh hoạt các phương pháp để giải phương trình đó.

Các ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$ (1)

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta thấy $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0 \Rightarrow (x^3 - 3y^3 - 9z^3) \vdots 3$ mà $(-3y^3 - 9z^3) \vdots 3$ nên $x^3 \vdots 3$

Ta có: $(1) \Rightarrow (x^3 - 3y^3 - 9z^3) \vdots 3 \Rightarrow x^3 \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 3 \Rightarrow x = 3x_1$

Khi đó: $(1) \Rightarrow (27x_1^3 - 3y^3 - 9z^3) \vdots 3 \Rightarrow (9x_1^3 - y^3 - 3z^3) \vdots 3 \Rightarrow y^3 \vdots 3 \Rightarrow y \vdots 3 \Rightarrow y = 3y_1$.

$\Rightarrow \left(9x_1^3 - 27y_1^3 - 3z^3\right) \vdots 3 \Rightarrow z^3 \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3 \Rightarrow y = 3z_1$.

* Tiếp tục sự biểu diễn trên và nếu gọi $x_0; y_0; z_0$ là nghiệm của (1) và thì $3 \in U_{(x_0;y_0;z_0)}$ và $0 \le x_0; y_0; z_0 \le 9$. Thực hiện thử chọn ta được: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$