$AD^2 = AB^2 + BD^2 = \frac{3a^2}{2}$,

$AE^2 = AC^2 + CE^2 = 3a^2$; $DE^2 = DF^2 + FE^2 = \frac{3a^2}{2}$

Trong tam giác ADE : $AE^2 = AD^2 + DE^2 = \frac{3a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} = 3a^2$. Vậy tam giác ADE vuông tại D

Vì $BD \perp (ABC), CE \perp (ABC)$ nên tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác ADE

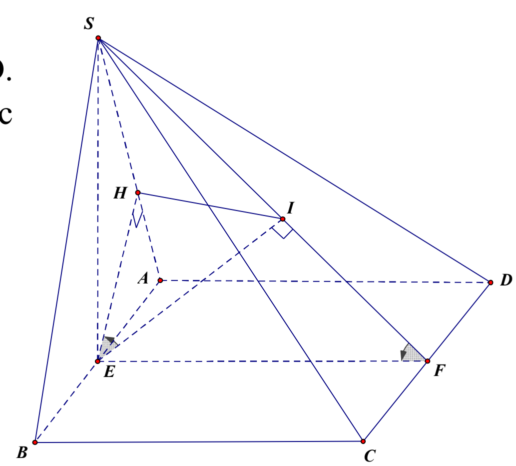
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và mp(P).Chú ý mặt phẳng (ABC) chính là mp(P).

$$S_{\Delta ABC} = \cos\varphi . S_{\Delta ADE} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}DE.DA} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2.\frac{3a^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Tính góc giữa:

a). (SCD) và (ABCD). b). (SCD) và (SAD).

LỜI GIẢI



a). Gọi E , F lần lượt trung điểm của AB, CD.

Có $SE \perp AB$ (SAB tam giác đều) $\Rightarrow SE \perp mp(ABCD)$

Có $\begin{cases} CD \perp EF \\ CD \perp SE \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SEF) \Rightarrow CD \perp SF$.

Vậy $\left[(SCD),(ABCD)\right] = SFE$.

Trong ΔSEF vuông tại E :

$\tan SFE = \frac{SE}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b). $CD \perp EF$ vµ $CD \perp SE \Rightarrow CD \perp mp(SEF) \Rightarrow (SCD) \perp (SEF)$.

+ Dựng $EI \perp SF (I \in SF) \Rightarrow EI \perp (SCD) \Rightarrow d(E,(SCD)) = EI$

+ Trong ΔSEF vuông tại E có $\frac{1}{EI^2} = \frac{1}{ES^2} + \frac{1}{EF^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow EH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

+ Vì $AE \parallel CD \Rightarrow AE \parallel (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(E,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

+ Ta có $SD^2 = SE^2 + ED^2 = SE^2 + EA^2 + AD^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} + a^2 = 2a^2$.

+ Dựng $AH \perp SD (H \in SD)$, vì ΔSAD cân tại A nên

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Ta có $(SAD) \cap (SCD) = SD$,

$A \in (SAD), d(A,SD) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, d(A,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

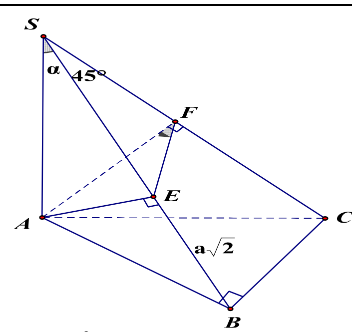
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) . Sử dụng công thức tính góc ở trường hợp 3 ta được $\sin\varphi = \dfrac{d(A,(SCD))}{d(A,SD)} = \dfrac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{42}}{7} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{42}}{7}\right)$

Câu 9: Cho tứ diện S.ABC ,hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau , có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ,biết $SB = a\sqrt{2}, BSC = 45^0, ASB = \alpha$.

a). Chứng minh BC vuông góc với SB .

b). Xác định α để hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) tạo với nhau góc 60^0 .

LỜI GIẢI



a). Chứng minh BC vuông góc với SB .

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$ (1)

Theo đề bài $(SAB) \perp (SBC)$ (2)

Và $(ABC) \cap (SBC) = BC$ (3)

(1) , (2) , (3) suy ra $BC \perp (SAB)$ $\Rightarrow BC \perp SB$ (hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba).

Dựng $AE \perp SB$ tại E , Dựng $AF \perp SC$ tại F . theo câu a) thì $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$

Vậy $SC \perp (AEF) \Rightarrow SC \perp EF$.

Hai đường thẳng AF và EF lần lượt thuộc hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) cùng vuông góc với giao tuyến SC . Nên $\left[(SAC),(SBC)\right] = AFE = 60^0$.

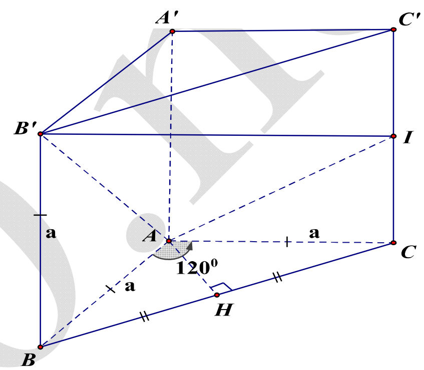
Ta có ΔAEF vuông tại E (vì $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp EF$) có $AE = EF.\tan 60^0 = EF.\sqrt{3}$.

Xét ΔSAE có $AE = SE.\tan\alpha$, xét ΔSEF có $EF = SE.\sin 45^0 = \dfrac{SE.\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $AE = EF.\sqrt{3} \Leftrightarrow SE.\tan\alpha = \dfrac{SE.\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 10: DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2003
cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân với AB = AC = a, $BAC = 120^0$, $BB' = a$. Gọi I trung điểm CC'. Chứng minh tam giác AB'I vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).

LỜI GIẢI



gọi H trung điểm BC. Vì ABC cân tại A nên $AH \perp BC$,do $BAC = 120^0 \Rightarrow ACH = 30^0$

Ta có $AH = AC.\sin ACH = a.\sin 30^0 = \dfrac{a}{2}$;

$CH = AC.\cos ACH = a.\cos 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow BC = 2CH = a\sqrt{3}$

Áp dụng PITAGO cho các tam giác vuông: B'C'I, ABB', ACI

$IB'^2 = B'C'^2 + IC'^2 = 3a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4}$; $AB'^2 = AB^2 + BB'^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$AI^2 = AC^2 + IC^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$

Ta có $IB'^2 = AB'^2 + AI^2 = \dfrac{13a^2}{4}$. Vậy tam giác B'AI vuông tại A.

Ta có

$S_{\Delta B'AI} = \dfrac{1}{2}AI.AB' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{3}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

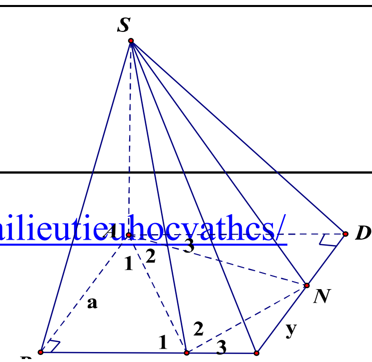
Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (AB'I) ta có

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AB'I}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) : \left(\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$

Câu 11: Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy hai điểm M , N thuộc CB và CD. Đặt CM = x , CN = y . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm A lấy một điểm S . Tìm hệ thức giữa x, y để:

a). $((SAM),(SAN)) = 45^0$ b). $(SAM) \perp (SMN)$

LỜI GIẢI



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AM, SA \perp AN$, hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) có giao tuyến là SA . Nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa AM và AN chính là góc $MAN = 45^0 \Leftrightarrow A_2 = 45^0$.

Ta có $A_1 + A_2 + A_3 = 90^0 \Rightarrow A_1 + A_3 = 45^0$.

Có $\tan(A_1 + A_3) = \dfrac{\tan A_1 + \tan A_3}{1 - \tan A_1 . \tan A_3} \Leftrightarrow \dfrac{\tan A_1 + \tan A_3}{1 - \tan A_1 . \tan A_3} = 1$. (1)

Xét trong hai tam giác vuông ABM và ADN có

$\tan A_1 = \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{a-x}{a}$, $\tan A_2 = \dfrac{DN}{AD} = \dfrac{a-y}{a}$ (2) .

Thay (2) vào (1) :

$$\frac{\frac{a-x}{a} + \frac{a-y}{a}}{1 - \frac{a-x}{a}\frac{a-y}{a}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2a-x-y}{a} = \frac{a^2 - (a-x)(a-y)}{a^2} \Leftrightarrow a(2a-x-y) = a(x+y) - xy$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = 2a(x+y) - xy$$

b). Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SAM) \perp (ABCD)$. Giả sử $(SMN) \perp (SAM)$,thì hai mặt phẳng (ABCD) và (SMN) cùng vuông góc với mặt phẳng (SAM) nên giao tuyến của chúng là MN vuông góc với mặt phẳng (SAM). Suy ra $MN \perp AM$ hay $AMN = 90^0$.

Lúc đó $M_1 + M_3 = 90^0 \Rightarrow M_3 = A_1$ (vì cùng phụ với M_1)

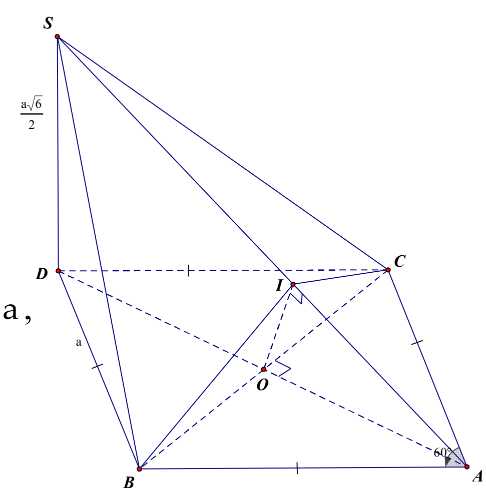
Nên có $\tan M_3 = \tan A_1 \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{a-x}{a} \Leftrightarrow ay = ax - x^2 \Leftrightarrow x^2 = a(x-y)$

Câu 12: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại D lấy điểm S sao cho SD = $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chứng minh:

a). $(SBC) \perp (SAD)$. b) $(SAB) \perp (SAC)$.

LỜI GIẢI



a). Chứng minh:(SBC) $\perp$ (SAD).

$$\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD\left(SD \perp (ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD)$$

mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$.

b). (SAB) $\perp$ (SAC).

Vì tam giác ABC đều nên $AB = BC = AC = a$, và có tam giác DBC đều $BD = DC = BC = a$.

Gọi $O = AC \cap BD$. AO là đường cao của tam giác đều ABC nên $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD = a\sqrt{3}$.

Tam giác SDA vuông tại S: $SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Hạ $OI \perp SA$ tại I. Tam giác $\Delta AIO \sim \Delta ADS(g-g)$.

Nên $\frac{OI}{DS} = \frac{AO}{AS} \Rightarrow OI = \frac{AO}{AS}.DS = \frac{a}{2}$

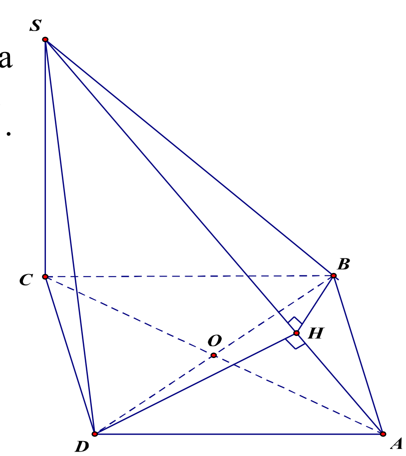
Trong tam giác BIC có IO là đường trung tuyến và $IO = \frac{1}{2}BC$. Suy ra tam giác BIC vuông tại I, nghĩa là góc $BIC = 90^0$. Vậy $(SAB) \perp (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC\left(\text{do } BC \perp (SAD)\right) \\ SA \perp OI \\ BC, OI \subset (BCI) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BCI) \Rightarrow \begin{cases} BI \perp SA \\ CI \perp SA \end{cases}$ (1).

Từ (1) suy ra $\left[(SAB),(SAC)\right] = \left[BI, CI\right] = BIC = 90^0 \Rightarrow mp(SAB) \perp mp(SAC)$.

Câu 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, có cạnh bằng a và đường chéo BD = a , SC = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với (ABCD). Chứng minh (SAB) $\perp$ (SAD).

LỜI GIẢI



Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $OH \perp SA$ tại H . Ta có ΔABD đều nên $AO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

Trong ΔSAC có $SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

Ta có $\Delta AHO \sim \Delta ACS(g.g) \Rightarrow \frac{HO}{CS} = \frac{AO}{AS}$

$\Rightarrow HO = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{\sqrt{2}}}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác HBD có HO là đường trung tuyến và $HO=\frac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta HBD$ vuông tại H.

$$\begin{cases} BD\perp AC\left(\text{vì ABCD hình thoi}\right) \\ BD\perp SC\left(SC\perp\left(ABCD\right)\right) \\ AC,SC\subset mp\left(SAC\right) \end{cases} \Rightarrow BD\perp\left(SAC\right)\Rightarrow BD\perp SA$$

Có $\begin{cases} SA\perp BD\text{ , }SA\perp OH \\ BD,OH\subset mp\left(BDH\right) \end{cases} \Rightarrow SA\perp mp\left(BDH\right)\Rightarrow\begin{cases} BH\perp SA \\ DH\perp SA \end{cases}$

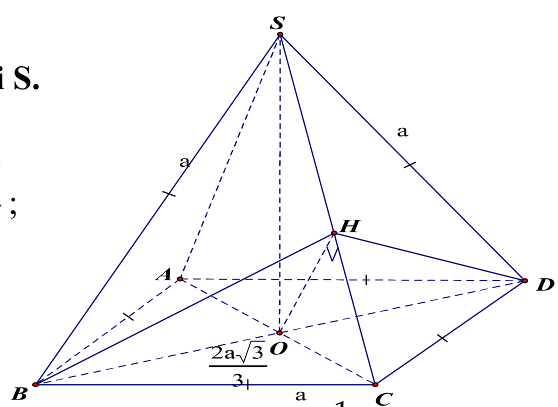
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là góc BHD . Theo chứng minh trên $BHD=90^0 \Rightarrow mp\left(SAD\right)\perp mp\left(SAB\right)$

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, $SB=SD=a, BD=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy.

a). Chứng minh tam giác SAC vuông tại S.

b). Chứng minh (SBC) $\perp$ (SCD).

LỜI GIẢI



a). Chứng minh tam giác SAC vuông tại S.

Ta có

$$SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3};$$

$$AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Trong tam giác SAC có SO là đường trung tuyến và $SO=\frac{1}{2}AC$ nên SAC vuông tại S.

b). Chứng minh (SBC) $\perp$ (SCD).

Kẻ OH vuông góc với SC tại H.

Theo câu a) trong ΔSOC vuông tại O, ta có : $OA=OC=OS$, suy ra H trung điểm của SC.

Và $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OC^2}\Rightarrow OH=\frac{OS.OC}{\sqrt{OS^2+OC^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

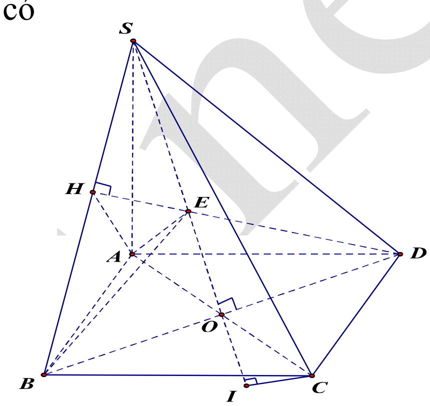
Xét ΔBDH có HO là đường trung tuyến và $HO=\frac{1}{2}BD$, nên BHD vuông tại H (1)

ΔBCS cân tại B, suy ra $BH\perp SC$ (2) . Tương tự $DH\perp SC$ (3)

Từ (1), (2), (3) : Vậy $\left[\left(SBC\right),\left(SCD\right)\right]=BHD=90^0\Rightarrow\left(SBC\right)\perp\left(SCD\right)$.

Câu 15: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy là hình vuông ABCD. Gọi O là tâm của đáy, vẽ CI vuông góc với SO tại I, vẽ DH vuông góc với SB tại H. Chứng minh rằng :
a). Mặt phẳng (SAB) vuông với mặt phẳng (ADH).
b). CI vuông góc với mặt phẳng (SBD).
c). Hai mặt phẳng (ABE) và (SAD) vuông góc nhau , với E là giao điểm của SO và DH.

LỜI GIẢI



a). Có $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$, có

$\begin{cases} SB \perp DH \\ SB \perp AD \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ADH)$,

mà $SB \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (ADH)$.

b). Có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp CI \left(CI \subset (SAC)\right)$.

Có $\begin{cases} CI \perp SO\ ,\ CI \perp BD \\ SO\ ,\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SBD)$.

c). Ta có $\begin{cases} SD \perp BE \\ SD \perp AB\left(AB \perp (SAD)\right) \end{cases} \Rightarrow SD \perp (ABE)$,

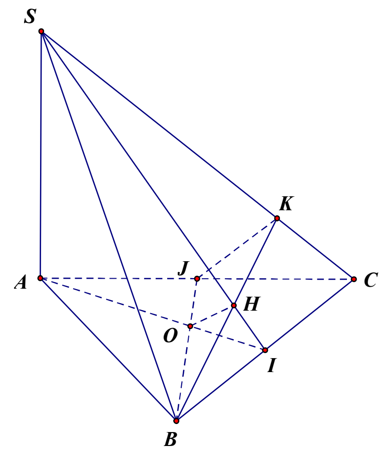
mà $SD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SBE)$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O.Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$ .Gọi I là trung điểm BC.
a). Chứng minh: $BC \perp (SAI)$ và $(SAI) \perp (SBC)$.
b). Tính góc giữa SB và (ABC) .
c). Gọi BK là đường cao của ΔSBC và J là trung điểm của AC. Chứng minh: $SC \perp (BJK)$.

LỜI GIẢI

a). Có $BC \perp AI$ (Tính chất tam giác đều), $BC \perp SA\left(\text{do } SA \perp (ABC)\right) \Rightarrow BC \perp (SAI)$,

mà $BC \perp (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$.



b). Có $BJ \perp AC$ (Tính chất tam giác đều), $BJ \perp SA\left(\text{do } SA \perp (ABC)\right) \Rightarrow BJ \perp (SAC)$, $\Rightarrow BJ \perp SC$.

Có $\begin{cases} SC \perp BK \\ SC \perp BJ \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BJK)$

c). Có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp OH\left(\text{do } OH \subset (SAI)\right)$ (1).

Có $SC \perp (BJK) \Rightarrow SC \perp OH\left(\text{do } OH \subset (BJK)\right)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SBC)$.

Cách 2: Có $\begin{cases} (SAI) \cap (BJK) = OH \\ (SBC) \perp (SAI) \\ (SBC) \perp (BJK) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$.

Có $\Delta IHO \sim \Delta IAS\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{HO}{AS} = \dfrac{IO}{IS}$

$$\Rightarrow HO = \frac{\frac{1}{3}AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}}.SA = \frac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \frac{3a^2}{4}}}.a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{15}}{15}.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và đáy lớn CD. Mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và AB, biết $AB = AD = a, CD = 2a$.

a). Chứng minh: $SI \perp \left(ABCD\right)$ và $\left(SAB\right) \perp \left(SAD\right)$.

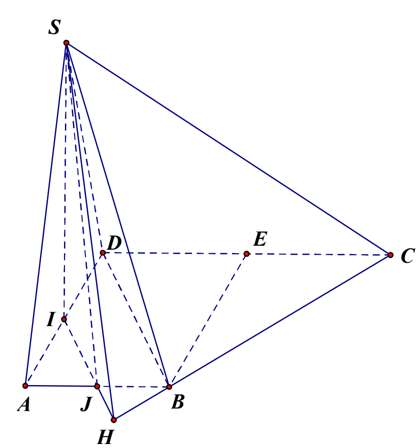
b). Tính góc tạo bởi SB và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$.

c). Tính góc tạo bởi SC và $\left(SIJ\right)$.

LỜI GIẢI

a). Vì ΔSAD đều nên $SI \perp AD$ và $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Có $\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ SI \perp AD; SI \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.



Có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SI \\ AD, SI \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$,

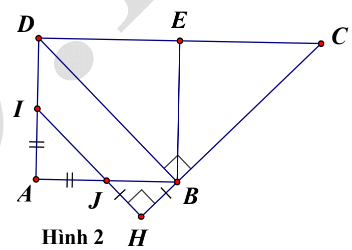
nhưng $AB \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD)$.

b). Có IB là hình chiếu vuông góc của SB trên mp(ABCD) do đó góc giữa SB và mp(ABCD) là góc $\widehat{SBI}$.

Trong ΔABI vuông tại A có $IB = \sqrt{AB^2 + IA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Trong ΔSIB vuông tại I có $\tan \widehat{SBI} = \frac{SI}{BI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow \widehat{SBI} = \arctan \frac{\sqrt{15}}{5}$.

c). Gọi E trung điểm của AD. Suy ra tứ giác ADEB là hình vuông. Trong tam giác BCD có BE là đường trung tuyến và $BE = \frac{1}{2} DC \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại B.


Hình 2

Ngoài ra có IJ là đường trung bình của $\Delta ABD \Rightarrow IJ \parallel BD \Rightarrow IJ \perp BC$. Gọi $H = IJ \cap BC$

Có $\begin{cases} CH \perp IJ \\ CH \perp SI \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SIJ) \Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của SC trên mp(SIJ).

Do đó góc giữa SC và mp(SIJ) là góc $\widehat{CSH}$.

Mặt phẳng đáy (ABCD) được vẽ lại ở hình 2.

Dễ dàng chứng minh ΔBHJ vuông cân tại $H \Rightarrow HB = HJ = \frac{JB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Trong các tam giác vuông cân AIJ và BCE, có $IJ = AI\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BC = BE\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

$IH = IJ + JH = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$; $CH = CB + BH = a\sqrt{2} + \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{5a\sqrt{2}}{4}$.

Trong ΔSIH vuông tại I có $SH = \sqrt{SI^2 + IH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{9a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{30}}{4}$.

Trong ΔSCH vuông tại H có

$$\tan \widehat{CSH} = \frac{CH}{SH} = \frac{\frac{5a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{30}}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \widehat{CSH} = \arctan\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

Kết luận $\left[SC,(SIJ)\right] = \arctan\frac{\sqrt{15}}{3}$

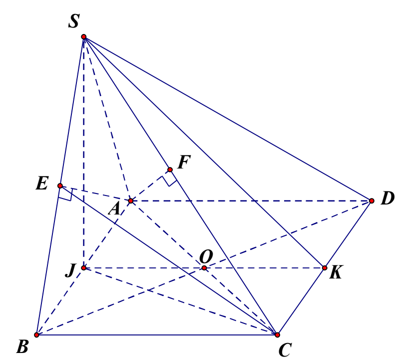
Câu 18: Cho hình vuông ABCD cạnh a và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, gọi J trung điểm của AB, K trung điểm của CD.

a). Chứng minh rằng $(SJK) \perp (SCD)$

b). Tính góc giữa SA, SC với mp(ABCD).

c). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Chứng minh sáu điểm A, B, C, D, E, F luôn cách đều một điểm cố định.

LỜI GIẢI



Hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) vuông góc với nhau theo giao tuyến AB, trong mp(SAB) có $SJ \perp AB$ (do SAB là tam giác đều) $\Rightarrow SJ \perp (ABCD)$.

a). JK là đường trung bình của $ABCD \Rightarrow CD \perp JK$, ngoài ra $CD \perp SJ$ (do $SJ \perp (ABCD)$) $\Rightarrow CD \perp (SJK)$ mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow (SJK) \perp (SCD)$.

b). Có AJ là hình chiếu vuông góc của SA trên mp(ABCD) $\Rightarrow \left[SA,(ABCD)\right] = \widehat{SAJ} = 60^0$ (Do SAB đều).

có JC là hình chiếu vuông góc của SC trên mp(ABCD) $\Rightarrow \left[SC,(ABCD)\right] = \widehat{SCJ}$

Trong ΔSJC vuông tại J, có $SJ = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $JC = \sqrt{BC^2 + BJ^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, nên có

$$\tan \widehat{SCJ} = \frac{SJ}{CJ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow \widehat{SCJ} = \arctan\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

b). Có $OA = OB = OC = OD$ (O là tâm của hình vuông ABCD) (1).

Có ΔACF vuông tại F, nên $OA = OC = OF$ (2).

Có $\begin{cases} BC \perp SJ \\ BC \perp AB \\ SJ, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$, và $\begin{cases} AE \perp SB \\ AE \perp BC \\ SB, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC)$ mà

$CE \subset (SBC) \Rightarrow AE \perp CE \Rightarrow \Delta ACE$ vuông tại $E \Rightarrow OA = OC = OE$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra sáu điểm A, B, C, D, E, F cách đều tâm O cố định.